Cálculo diferencial e integral

Elena de Oteyza
Emma Lam
Carlos Hernández
Ángel Carrillo



ALWAYS LEARNING

PEARSON

Cálculo diferencial e integral

espacios

Cálculo diferencial e integral

espacios

Elena de Oteyza de Oteyza
Emma Lam Osnaya
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Carlos Hernández Garciadiego
Ángel Manuel Carrillo Hoyo
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Revisión técnica
Tatiana Mendoza von der Borch
Universidad Nacional Autónoma de México

PEARSON

Datos de catalogación

Autora: De Oteyza, Elena, et al.
Cálculo diferencial e integral

1ª edición

Pearson Educación de México, S.A. de C.V., México, 2013
ISBN: 978-607-32-2085-9
Área: Bachillerato/Matemáticas

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 592

Cálculo diferencial e integral

Texto del estudiante

El proyecto didáctico ***Cálculo diferencial e integral,*** de la serie Espacios, es una obra colectiva creada por encargo de la editorial Pearson Educación de México, S.A. de C.V., por un equipo de profesionales en distintas áreas, que trabajaron siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento pedagógico de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Dirección general: Phillip De la Vega ■ **Dirección K-12:** Santiago Gutiérrez ■ **Gerencia editorial K-12:** Jorge Iñiguez ■ **Edición sponsor:** Berenice Torruco ■ **Coordinación de arte y diseño:** Asbel Ramírez ■ **Supervisión de arte y diseño:** Mónica Galván ■ **Edición de desarrollo:** Olga Sánchez ■ **Asistencia editorial:** Miriam Serna ■ **Corrección de estilo:** Cristina Segura ■ **Lectura de pruebas:** Arturo Manzo ■ **Diseño de interiores:** Salvador Carmona ■ **Diseño de portada:** Equipo Pearson de Arte y Diseño ■ **Diagramación:** EDITEC.

Dirección regional K-12 Latinoamérica: Eduardo Guzmán Barros
Dirección de contenidos K-12 Latinoamérica: Clara Andrade

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-2085-9
ISBN E-BOOK: 978-607-32-2092-7
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-2086-6

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 16 15 14 13

Atlacomulco 500, 5° piso
Col. Industrial Atoto, C.P. 53519
Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg. Núm. 1031



Contenido



Conoce tu libro

Espacios es una propuesta que, además de exponer los temas propios de la asignatura, tiene actividades para desarrollar habilidades de pensamiento y el pensamiento crítico de los jóvenes.

Esta serie contiene secciones características que hacen que tenga un enfoque metodológico actual y pertinente para los estudiantes de bachillerato.

A continuación se exponen esas secciones especiales:

Texto introductorio a la unidad
Su finalidad es explicar la utilidad de los temas de la unidad y despertar el interés de los alumnos.



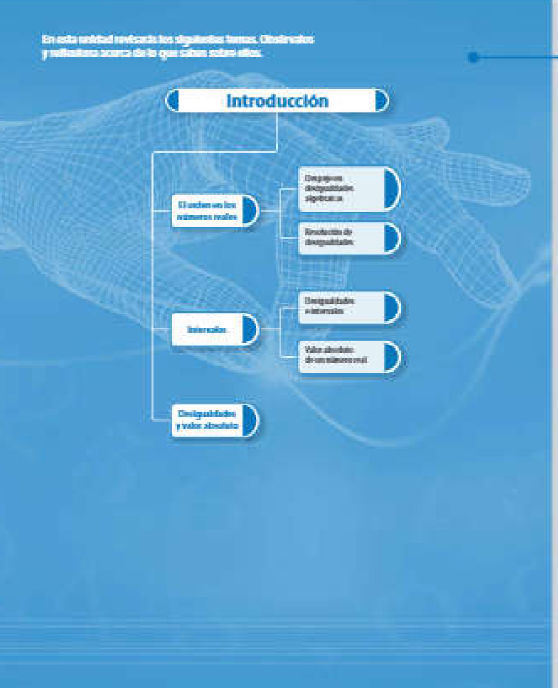
Unidad 1 Introducción

El Cálculo Diferencial es el estudio del cambio. Es decir, estudia cómo cambia una variable en función de otra. Esto nos permite medir, por ejemplo, cómo cambia la distancia recorrida por un automóvil a medida que pasa el tiempo, la presión que soporta un submarino conforme se sumerge, la concentración de un medicamento en la sangre al pasar el tiempo, el precio de un derivado financiero debido al cambio del precio de la acción de la cual depende, etcétera.

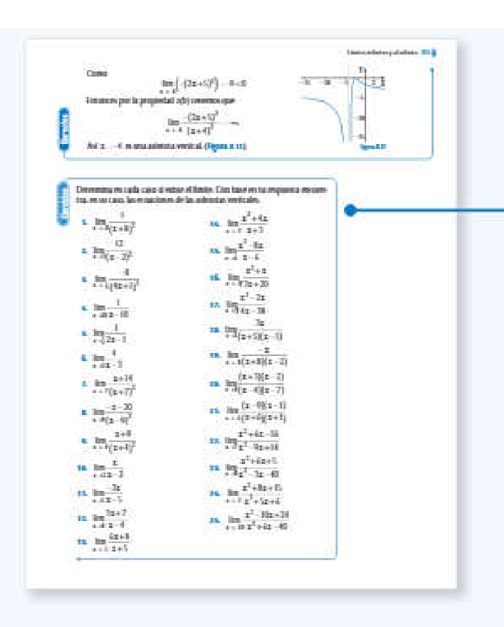
El cálculo diferencial fue inventado, de manera independiente, por Isaac Newton y Gottfried Leibniz en el siglo XVII, quienes estuvieron motivados por problemas diferentes. Newton estaba interesado en la gravitación y las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos celestes, mientras que Leibniz lo estaba en el problema geométrico de encontrar la recta tangente a una curva.

A la par del cálculo diferencial, inventaron también el cálculo integral, cuya principal motivación fue el cálculo de áreas de regiones encerradas por curvas. El origen de este problema se remonta a la antigua Grecia, en la que Eudoxo (408-355 a.C.) desarrolló el llamado "método de exhaución" para calcular el área de un círculo aproximándolo por polígonos regulares, posteriormente Arquímedes (287-212 a.C.) utilizó la misma idea para calcular áreas de otras figuras, por ejemplo, áreas encerradas por parábolas.

Todos estos estudios se refieren a cantidades que podemos medir mediante números reales. Es por eso que empezamos nuestro estudio del cálculo diferencial e integral con un repaso de los conceptos y propiedades de dichos números, en particular, del orden en los reales y las inecuaciones que son esenciales para poder definir y trabajar diversos conceptos del cálculo.

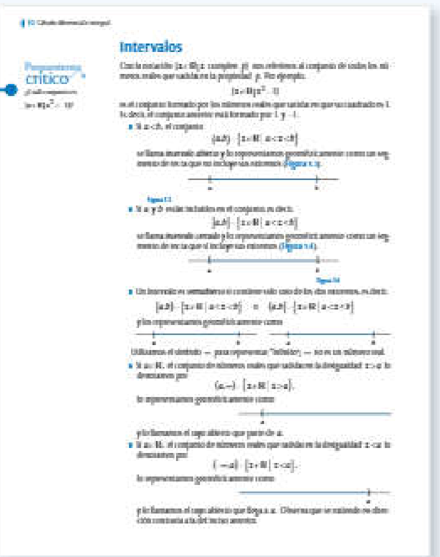


Organizador gráfico
Con el propósito de dar un panorama general, al inicio de cada unidad aparece un esquema que muestra los temas y subtemas que en ella se revisarán.



Ejercicios

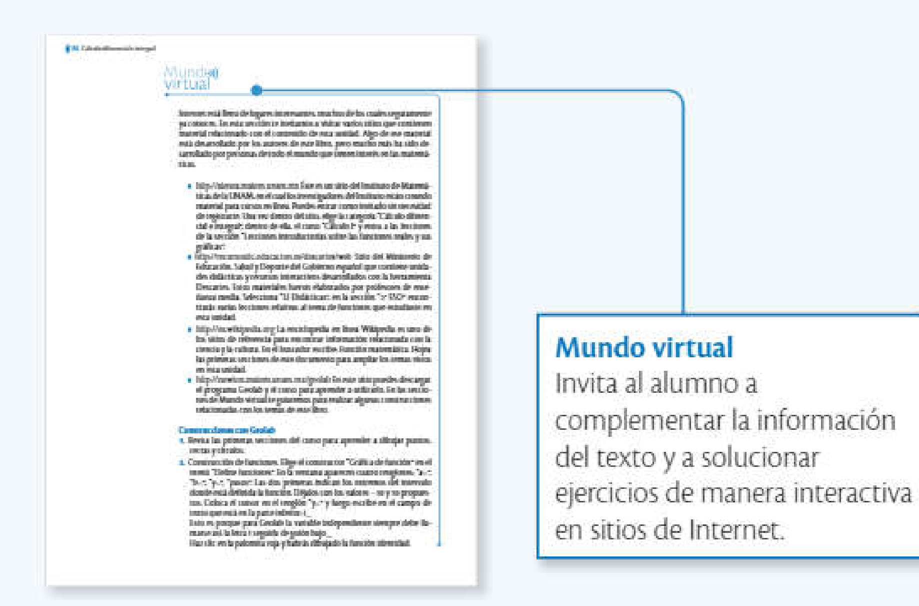
Los diversos tipos de actividades que se presentan tienen como finalidad desarrollar habilidades de pensamiento enfocadas a la solución de problemas.



Pensamiento crítico

Su objetivo es que el estudiante reflexione acerca de acontecimientos de su contexto y desarrolle su capacidad para:

- juzgar la veracidad de determinadas afirmaciones.
- valorar la solidez lógica de una deducción.
- generar hipótesis alternativas.
- deducir datos de una información.
- inducir a partir de hechos particulares.



Mundo virtual

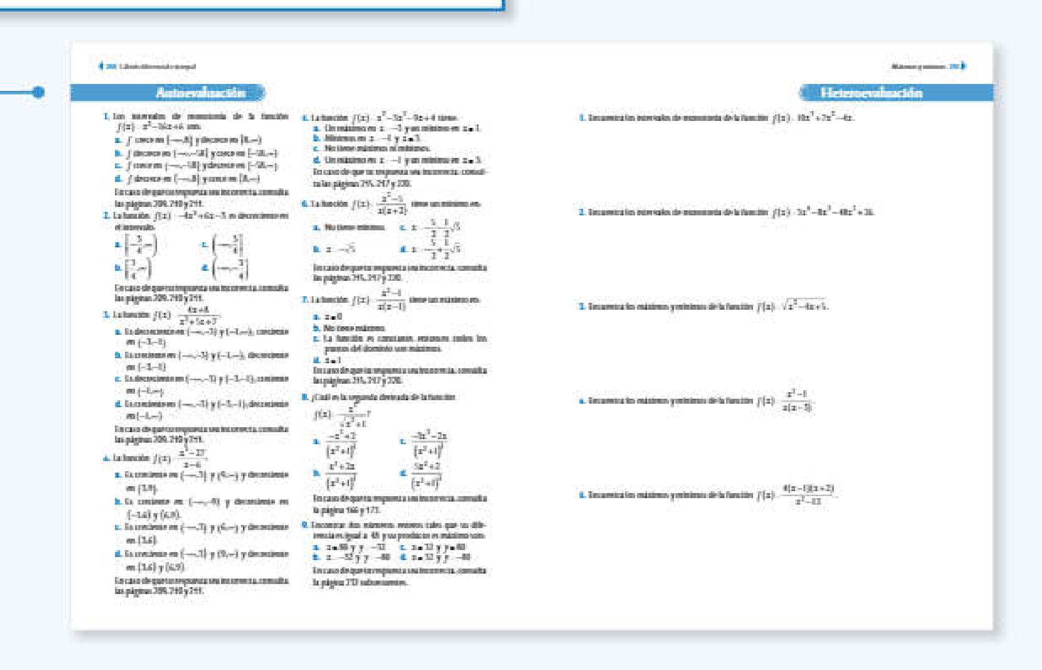
Invita al alumno a complementar la información del texto y a solucionar ejercicios de manera interactiva en sitios de Internet.



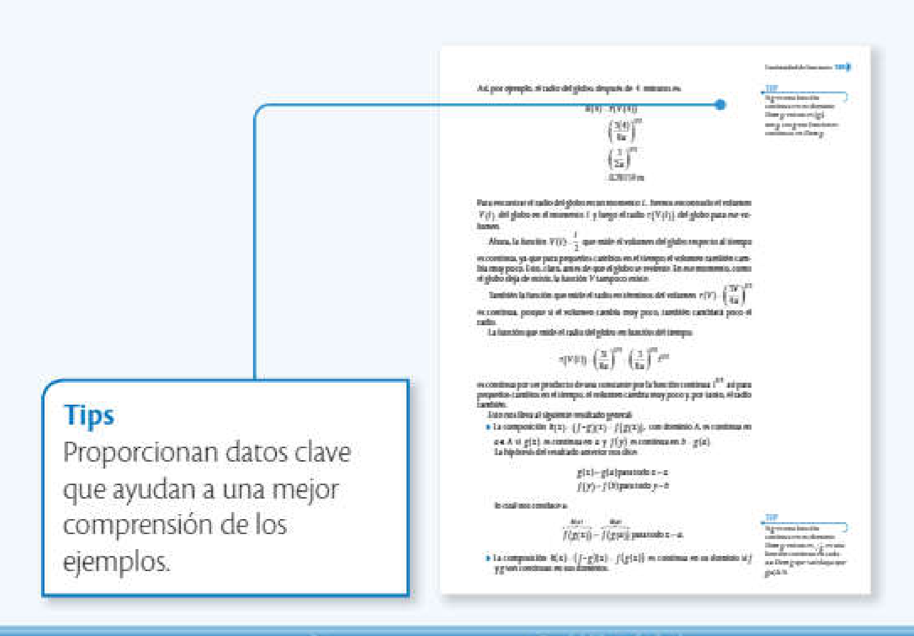
Pensamiento estratégico

Autoevaluación/Heteroevaluación

Son dos páginas ubicadas al final de cada unidad: en la primera se incluyen reactivos de opción múltiple desarrollados a partir del contenido de la unidad, y en la segunda se presenta una heteroevaluación cuyo propósito es que los estudiantes apliquen los contenidos que han revisado en la unidad.


Autoevaluación

Heteroevaluación



Tips

Proporcionan datos clave que ayudan a una mejor comprensión de los ejemplos.

Presentación

El *Cálculo diferencial e integral* fue inventado en el siglo XVIII y desde entonces ha sido un poderoso auxiliar para el estudio de fenómenos de muy diversa naturaleza. Destacan sus aplicaciones en la física y la geometría, pero las hay también en la economía y medicina, por citar solo otras dos disciplinas. Ha sido la base para el desarrollo de importantes áreas de las matemáticas como son el Análisis matemático, las Ecuaciones diferenciales y la Geometría diferencial.

Este libro está escrito para el nivel medio superior, aunque también puede ser útil en los primeros años de carreras universitarias en las que el Cálculo diferencial e integral es parte del plan de estudios.

Incluye los conceptos y algorítmos básicos, y a través de las introducciones a los distintos capítulos y los ladillos que aparecen a lo largo de la obra se señalan personajes y hechos relevantes para el desarrollo del Cálculo.

Hay también notas al margen y los llamados "pensamientos críticos". En las primeras, se resaltan hechos que el estudiante debe tener presentes para avanzar de modo más eficaz en el estudio de los distintos temas. En los segundos, se plantean preguntas con un grado de dificultad superior o que exigen una reflexión un poco más profunda sobre los conceptos vistos en la obra. Podrás revisar la solución a estos problemas en la página de Internet http://www.pearsonenespanol.com/calculo_oteyza.

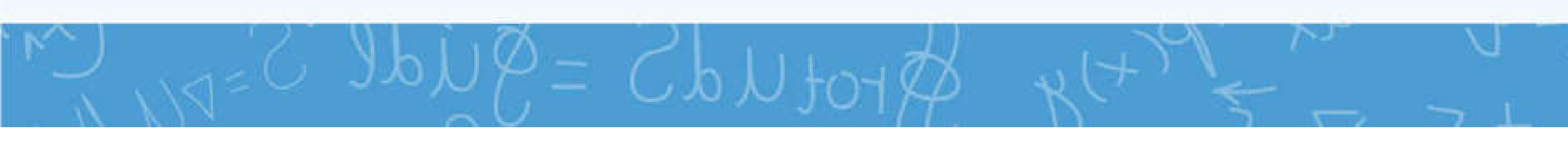
Cada sección se inicia con un ejemplo introductorio que da pie al desarrollo de los temas a tratar. Al final de cada unidad se encuentran las secciones: Resumen, Ejercicios de repaso, Mundo virtual, Autoevaluación y Heteroevaluación.

El interés principal al realizar este libro es que los estudiantes aprendan a usar el cálculo para la resolución de problemas. Se enfatiza en el manejo de los conceptos y algoritmos, más que en su fundamentación técnica y rigurosa. Sin embargo, siempre que se considera adecuado; se trata de dar una explicación breve y lo más sencilla posible.

En la obra hay casi 1500 ejercicios; se da la solución de todos los impares. Así, el profesor tendrá suficiente material para la práctica en clase, las tareas y los exámenes. Por otra parte, el alumno podrá en muchos casos confrontar sus resultados con los proporcionados por los autores.

En Mundo virtual se dan referencias a páginas de Internet relacionadas con lo visto en la unidad y se proponen construcciones con el programa interactivo Geolab, del cual incluye la referencia para obtenerlo de manera gratuita.

En la Autoevaluación y Heteroevaluación se presentan ejercicios donde los alumnos deberán aplicar los contenidos que han estudiado a lo largo de las diferentes unidades.





En el caso de las heteroevaluaciones la solución detallada a cada ejercicios se encontrará en http://www.pearsonenespanol.com/calculo_oteyza.

En la primera unidad se recuerdan hechos fundamentales sobre el orden en los números reales, de cómo se resuelven las inecuaciones y el manejo del valor absoluto de los números y su relación con los intervalos. En la segunda se introduce uno de los conceptos matemáticos más importantes: las funciones. Nos interesan especialmente aquellas definidas en subconjuntos de números reales y cuyos valores son dichos números.

Con base en lo anterior se procede al estudio de dos conceptos básicos: la continuidad y el límite de las funciones. En ambos se usa la idea de proximidad entre números. Preferimos desarrollar primero el tema de las funciones continuas por considerar que le resulta más claro al estudiante, pues le permite entrar al manejo de la proximidad de manera más natural que con el límite de una función. Para analizar la continuidad de una función en un punto a se tiene establecido a qué valor ℓ deberán aproximarse los que toma la función cuando estamos cerca de a. En el caso del límite, dicho valor ℓ no está predeterminado.

Se dedica una unidad a los límites infinitos y al infinito, ya que las técnicas usadas para calcularlos difieren de las previamente empleadas. Ahí se muestra, con base en múltiples ejemplos resueltos, el uso de la regla de L'Hôpital para analizar las indeterminaciones. También se muestran las limitaciones de dicha regla.

En ninguno de los casos se hace una presentación exageradamente técnica, sino que se apela a la intuición del lector. Hay anexos a algunas unidades en los que se dan definiciones rigurosas y demostraciones de algunos de los resultados enunciados en el libro, por si el alumno tiene interés en las mismas.

A partir del límite de funciones se introduce una de las dos poderosas herramientas del Cálculo: la derivada. Se dan las distintas fórmulas para encontrar las derivadas de muchas funciones. Destacan las relativas a las sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones y la muy importante regla de la cadena. Un poco más adelante, cuando se introduce la función inversa de una función inyectiva, se presenta la fórmula para derivar las funciones inversas.

Lo anterior nos permite determinar las derivadas de las funciones que aparecen con mayor frecuencia en las aplicaciones. Entre éstas, destacan las funciones exponenciales y logarítmicas a las que se les dedica toda una unidad y que incluye el uso de estas funciones para la modelación de fenómenos físicos y económicos.



La utilidad y fuerza del concepto de derivada se manifiesta en la unidad dedicada a encontrar los máximos y mínimos de funciones, lo que es de gran ayuda en todas las ciencias.

En esa unidad se dan los criterios de la primera y segunda derivadas y en su parte final se estudian problemas en distintas ciencias como: geometría, física, economía y de la construcción, que se resuelven encontrando máximos o mínimos de funciones. Para la resolución de estos problemas, los estudiantes tienen a veces dificultad en plantear matemáticamente el problema y construir la función o funciones de las que hay que encontrar el máximo o mínimo. Para ayudarlos, se incluyen muchos ejemplos resueltos y se dan fórmulas relacionadas con los problemas.

Para la graficación de funciones se indican los distintos aspectos que deben considerarse para dibujar la gráfica: dominio de la función, continuidad, intervalos de monotonía, máximos y mínimos, puntos de inflexión y asíntotas. Los ejemplos ahí resueltos cubren muchas de las situaciones que pueden presentarse.

La presentación de la otra herramienta fundamental del Cálculo se hace en tres unidades. En la primera se introduce el concepto de primitiva, antiderivada o integral indefinida. Éste es usado en el que trata de la integral definida, donde son presentados los llamados Teoremas Fundamentales del Cálculo que relacionan la integral y la derivada. Ahí mismo se dan aplicaciones de la integral a la resolución de problemas de física y geometría relativos a velocidad, trabajo, área y volumen. En la unidad final se dan distintos métodos para el cálculo de integrales indefinidas: por sustitución o cambio de variable, incluidas las sustituciones trigonométricas, por partes y por fracciones parciales. Se incluye el método de Ostrogradski, lo que no es frecuente. Además, se da un criterio de fácil aplicación, debido a Chebyshev que nos hace ver que no siempre es posible encontrar una primitiva usando los métodos anteriores, no obstante que la función a integrar parezca lo suficientemente sencilla como para lograrlo.



Los Gráficos 3D son un proceso de cálculos matemáticos.



Introducción

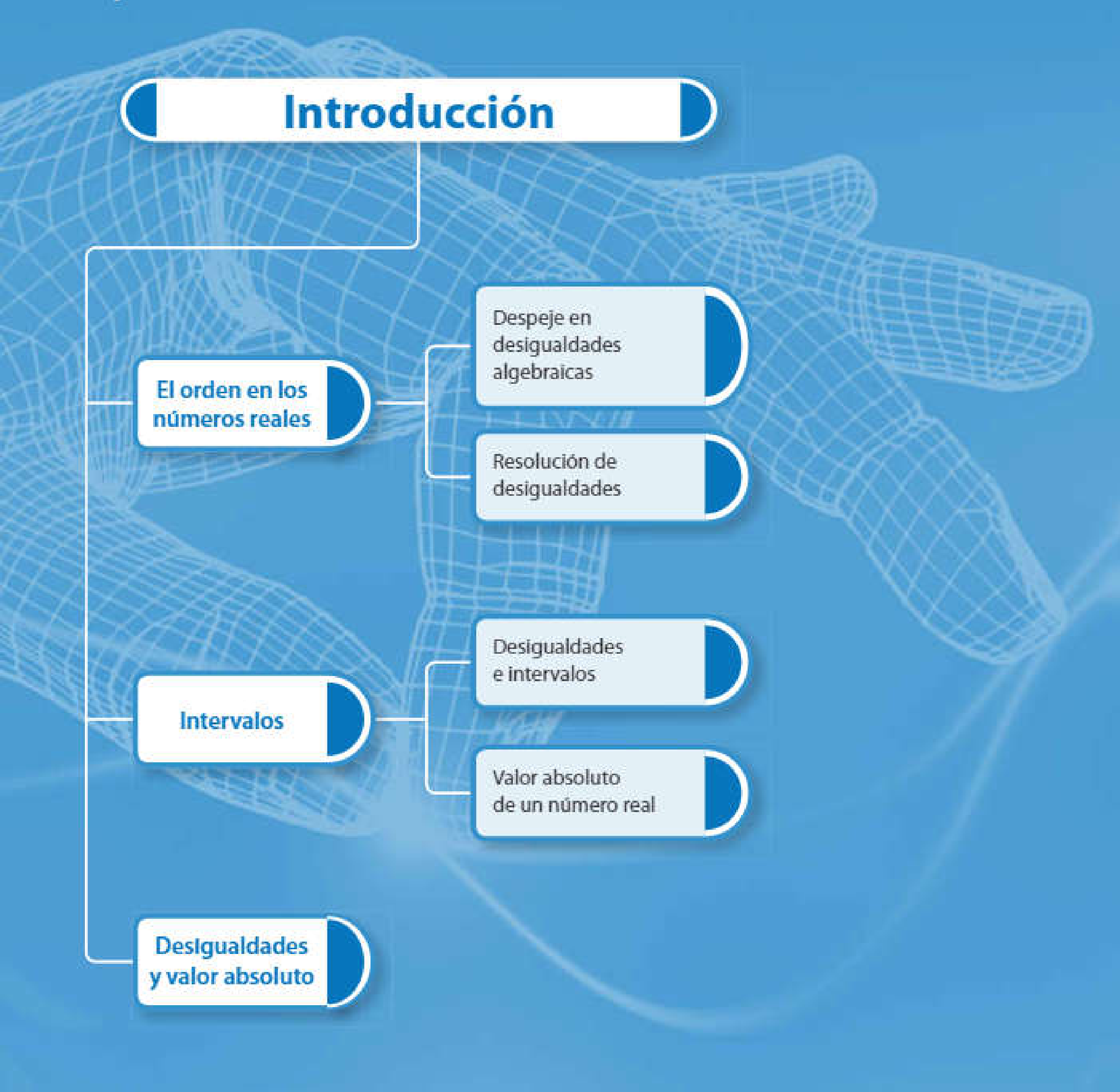
El *Cálculo Diferencial* es el estudio del cambio. Es decir, estudia cómo cambia una variable en función de otra. Esto nos permite medir, por ejemplo, cómo cambia la distancia recorrida por un automóvil a medida que pasa el tiempo, la presión que soporta un submarino conforme se sumerge, la concentración de un medicamento en la sangre al pasar el tiempo, el precio de un derivado financiero debido al cambio del precio de la acción de la cual depende, etcétera.

El cálculo diferencial fue inventado, de manera independiente, por Isaac Newton y Gottfried Leibniz en el siglo XVII, quienes estuvieron motivados por problemas diferentes. Newton estaba interesado en la gravitación y las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos celestes, mientras que Leibniz lo estaba en el problema geométrico de encontrar la recta tangente a una curva.

A la par del cálculo diferencial, inventaron también el cálculo integral, cuya principal motivación fue el cálculo de áreas de regiones encerradas por curvas. El origen de este problema se remonta a la antigua Grecia, en la que Eudoxio (408-355 a.C.) desarrolló el llamado "método de exhaución" para calcular el área de un círculo aproximándolo por polígonos regulares, posteriormente Arquímedes (287-212 a.C.) utilizó la misma idea para calcular áreas de otras figuras, por ejemplo, áreas encerradas por parábolas.

Todos estos estudios se refieren a cantidades que podemos medir mediante números reales. Es por eso que empezamos nuestro estudio del cálculo diferencial e Integral con un repaso de los conceptos y propiedades de dichos números; en particular, del orden en los reales y las inecuaciones que son esenciales para poder definir y trabajar diversos conceptos del cálculo.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.



El orden en los números reales

En los números reales, que denotamos por $\mathbb{R}$, hay un orden que nos permite identificarlos con los puntos de una recta horizontal de modo tal que si a es *menor* que b, entonces el punto correspondiente a a está a la izquierda del que le corresponde a b (ver Figura 1.1).



Figura 1.1

En este caso escribimos $a < b$. Una vez hecho lo anterior llamamos a la recta una *recta numérica*, y damos el mismo nombre al número real y al punto que le corresponde.

TIP

$a < b$ si el punto correspondiente a a está a la izquierda del que le corresponde a b.

Otra manera de escribir $a < b$, es $b > a$ y en este caso leemos b es *mayor* que a.

Un número real a es *positivo* si $a > 0$ y es *negativo* si $a < 0$ (ver Figura 1.2).

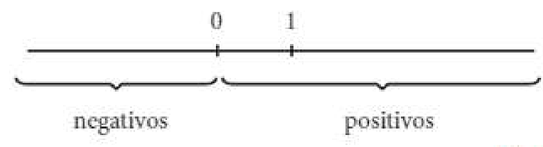
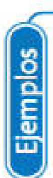


Figura 1.2

Escribimos $a \leq b$ para indicar que $a < b$ o $a = b$. Así, $3 < 5$, $3 \leq 5$ y $5 \leq 5$ son expresiones verdaderas.

Una desigualdad consta de dos expresiones numéricas o algebraicas relacionadas por alguno de los símbolos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$.



Las siguientes desigualdades son ciertas:

1. $-4 < -1$. **2.** $2 \leq 2$. **3.** $8 > -3$.

Propiedades de orden

Supongamos que a, b y c son números reales.

I. Se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones:

i) $a < b$.

ii) $a = b$.

iii) $a > b$ (Equivalentemente $b < a$).

A esta propiedad la llamamos tricotomía.

II. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

Ésta es llamada la propiedad transitiva.

III. El orden se relaciona con la suma de la siguiente manera:

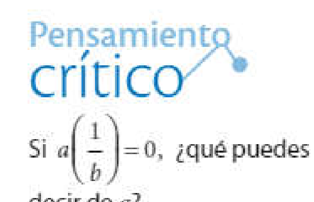
Si $a < b$, entonces

$$a + c < b + c.$$

IV. El orden también se relaciona con el producto:

Si $a<b$ y $c>0$, entonces
$$ac<bc.$$
Si $a<b$ y $c<0$, entonces
$$ac>bc.$$
Esta última propiedad establece: *Si en una desigualdad multiplicamos a sus miembros por un número negativo, entonces la desigualdad cambia de sentido.*

Observa que en todas estas propiedades del orden, solo en la última se modifica el sentido de la desigualdad.



Si $a\left(\frac{1}{b}\right)=0$, ¿qué puedes decir de a?

Ejemplo

- Multiplicar $-8<4$ por -5.

Solución:
Aplicando la última propiedad de orden:
$$(-5)(-8)>(-5)(4)$$
Simplificando,
$$40>-20.$$

TIP
Cuando multiplicamos una desigualdad por un número negativo, el símbolo de la desigualdad se invierte.

A partir de las propiedades I-IV podemos deducir otras más que serán de gran utilidad al trabajar con desigualdades.

- Relación entre orden y números positivos.
$$a>b \text{ si y solo si } a-b>0.$$
- La suma de números positivos es positiva.
$$\text{Si } a>0,\ b>0 \text{ entonces } a+b>0.$$
- Leyes de los signos.
  a. Si $a>0$, $b>0$ entonces $ab>0$.
  b. Si $a>0$, $b<0$ entonces $ab<0$.
  c. Si $a<0$, $b<0$ entonces $ab>0$.

Despeje en desigualdades algebraicas

Una desigualdad en la que aparece al menos una incógnita es llamada desigualdad algebraica o *inecuación*.

- Para despejar la variable x de la desigualdad algebraica $x-3<9$ seguimos los siguientes pasos:

$x - 3 < 9$ ← Queremos despejar a x
$x - 3 + 3 < 9 + 3$ ← Sumamos en ambos lados 3, que es el opuesto de -3
$x < 9 + 3$

En el primer renglón el 3 está restando en el lado izquierdo y en el tercero lo vemos sumando en el lado derecho. Al simplificar tenemos:
$$x<12.$$

TIP

Ley de los signos				
+	×	+	=	+
+	×	–	=	–
–	×	+	=	–
–	×	–	=	+

En general, si un número está restando de un lado de una desigualdad,

$$a-b<c,$$

al sumar su simétrico de ambos lados de la desigualdad se obtiene:

$$\begin{aligned} a-b &< c \\ a-b+b &< c+b \\ a &< c+b \end{aligned}$$

Es decir, el número "pasó al otro lado de la desigualdad sumando". Así:

si $a-b<c$ entonces $a<c+b$.

De forma semejante, si un número está sumando de un lado de la desigualdad,

$$a+b<c,$$

al sumar su simétrico de ambos lados de la desigualdad se obtiene:

$$\begin{aligned} a+b &< c \\ a+b-b &< c-b \\ a &< c-b, \end{aligned}$$

y el número "pasó al otro lado de la desigualdad restando". Así:

si $a+b<c$ entonces $a<c-b$.

Es decir, las reglas usuales para despejar en igualdades, relativas a la suma y la resta, son válidas para las desigualdades.

- Para despejar la variable de la desigualdad algebraica $8x<3$ seguimos los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} 8x &< 3 && \leftarrow \text{Queremos despejar a } x \\ \left(\frac{1}{8}\right)8x &< \left(\frac{1}{8}\right)3 && \leftarrow \text{Multiplicamos por el recíproco de 8 y como } \frac{1}{8} \text{ es positivo la desigualdad no se altera} \\ x &< \frac{3}{8} && \leftarrow \text{Simplificamos} \end{aligned}$$

  En el primer renglón el 8 está multiplicando del lado izquierdo y en el segundo renglón lo vemos dividiendo del lado derecho.

En general, si un número *positivo* está multiplicando de un lado de una desigualdad,

$$ab<c,$$

entonces al multiplicar por su recíproco de ambos lados de la desigualdad y simplificar, tenemos que;

$$\begin{aligned} ab &< c \\ ab\left(\frac{1}{b}\right) &< c\left(\frac{1}{b}\right) \\ a &< \frac{c}{b}, \end{aligned}$$



el número "pasa al otro lado de la desigualdad dividiendo". Por lo tanto:

$$\text{si } ab<c \text{ y } b>0 \text{ entonces } a<\frac{c}{b}.$$

De forma similar, si un número *positivo* está dividiendo en un lado de la desigualdad:

$$\frac{a}{b}<c,$$

al multiplicar por él ambos lados de la desigualdad se obtiene:

$$\frac{a}{b}<c$$

$$\frac{a}{b}(b)<c(b)$$

$$a<cb.$$

Es decir, el número "pasó al otro lado de la desigualdad multiplicando". De donde:

$$\text{si } \frac{a}{b}<c \text{ y } b>0 \text{ entonces } a<cb.$$

Si tenemos la desigualdad:

$$ab<c$$

y $b<0$ entonces al multiplicar por el recíproco $\frac{1}{b}$, que también es negativo, la desigualdad cambia de sentido, obteniéndose;

$$\text{si } ab<c \text{ y } b<0 \text{ entonces } a>\frac{c}{b}.$$

Análogamente:

$$\text{si } \frac{a}{b}<c \text{ y } b<0 \text{ entonces } a>bc.$$

O sea, las reglas usuales para despejar en igualdades, relativas al producto y al cociente, valen para las desigualdades solo cuando se "pasa de uno a otro lado" un número positivo. En caso de que "se pase" un número negativo, debe cambiarse el sentido de la desigualdad.

TIP
Todo número y su recíproco son ambos positivos o bien, ambos son negativos.

Resolución de desigualdades

Un boxeador pesa 57.330 kg y quiere participar en una pelea de peso gallo. ¿Cuánto debe disminuir de peso para estar en la categoría de peso gallo? (La categoría de peso gallo comprende de 50.802 kg hasta 53.525 kg.)

Solución:
Llamamos x al número de kilos que debe bajar el boxeador. Planteamos las desigualdades:

$$50.802 \le 57.330 - x \le 53.525$$

Entonces tenemos que resolver:

$$50.802 \le 57.330 - x \quad \text{y} \quad 57.330 - x \le 53.525$$



¿Todo número real tiene recíproco?

Es decir,

$$\begin{array}{rcl} 50.802 & \leq & 57.330 - x \\ 50.802 - 57.330 & \leq & -x \\ -6.528 & \leq & -x \\ (-1)(-6.528) & \geq & (-1)(-x) \\ 6.528 & \geq & x \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} 57.330 - x & \leq & 53.525 \\ -x & \leq & 53.525 - 57.330 \\ -x & \leq & -3.805 \\ (-1)(-x) & \geq & (-1)(-3.805) \\ x & \geq & 3.805, \end{array}$$

de donde,

$$3.805 \leq x \leq 6.528.$$

El boxeador debe bajar entre 3.805 y 6.528 kg.

Resolver una desigualdad algebraica o inecuación significa encontrar todos los valores numéricos que al sustituirlos en las variables la hacen verdadera.

Dos inecuaciones que tienen las mismas soluciones se llaman equivalentes.

Para manipular las desigualdades algebraicas usamos las propiedades de la suma y el producto de los números reales así como las del orden.

Ejemplos

1. Resolver la desigualdad $7z + 8 < -3$.

Solución:
Usamos las reglas vistas para el despeje. Primero despejamos la expresión $7z$. Para esto en $7z + 8 < -3$ pasamos restando a 8 al lado derecho y obtenemos:

$$7z < -3 - 8$$
$$7z < -11.$$

Ahora en $7z < -11$ despejamos z: pasamos dividiendo a 7 al lado derecho:

$$z < -\frac{11}{7}.$$

Por lo tanto la desigualdad se cumple para cualquier número real menor que $-\frac{11}{7}$.

2. Resolver la desigualdad $-4w + 6 > 5$.

Solución:
Primero despejamos la expresión $-4w$. Para esto en $-4w + 6 > 5$ pasamos restando a 6 al lado derecho y obtenemos:

$$-4w > 5 - 6$$
$$-4w > -1.$$

Ahora en $-4w > -1$ despejamos w: pasamos dividiendo a -4 al lado derecho,

TIP
Cuando sumamos un número a ambos lados de una desigualdad, la desigualdad se conserva.

$$w < \frac{-1}{-4}$$
$$w < \frac{1}{4}.$$

Observemos que en este paso cambiamos el sentido de la desigualdad porque dividimos entre el negativo -4.

Por tanto, la desigualdad se cumple para cualquier número real menor que $\frac{1}{4}$.

3. Resolver $\frac{6}{5}x + 8 > -4$.

Solución:
Despejamos x:

$$\frac{6}{5}x + 8 > -4$$
$$\frac{6}{5}x > -4 - 8$$
$$\frac{6}{5}x > -12$$
$$x > \frac{5}{6}(-12)$$
$$x > -10.$$

La desigualdad es cierta si $x > -10$.

TIP
Al multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número positivo, la desigualdad se conserva.

4. Resolver $y^2 + 5 < 5$.

Solución:
Despejamos y^2:

$$y^2 + 5 < 5$$
$$y^2 < 0.$$

Recuerda que cualquier número real al cuadrado siempre es mayor o igual a cero, y entonces esta desigualdad no tiene solución.

5. Resolver $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$.

Solución:
Para resolver esta desigualdad debemos quitar los denominadores. Sabemos que 3 es positivo, pero no sabemos si $x+2$ es positivo o negativo, por esto es necesario considerar dos casos:

- Supongamos que $x + 2 > 0$. Es decir, x satisface:

$$x + 2 > 0$$
$$x > -2.$$

Y al pasar multiplicando $x+2$ al otro lado de la desigualdad $\frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}$, ésta no cambia de sentido. Entonces,

$$\frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}$$
$$3(2x-3)<x+2$$
$$6x-9<x+2$$
$$6x-x<2+9$$
$$5x<11$$
$$x<\frac{11}{5}$$

como teníamos que $x<-2$, concluimos que:

$$x>-2 \quad \text{y} \quad x<\frac{11}{5}$$

Esto lo podemos escribir como:

$$-2<x<\frac{11}{5}.$$

- Supongamos ahora que $x+2<0$, entonces x satisface:

$$x+2<0$$
$$x<-2.$$

Además, al pasar multiplicando $x+2$ al otro lado de la desigualdad $\frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}$, ésta cambia de sentido. Entonces,

$$\frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}$$
$$3(2x-3)>x+2$$
$$6x-9>x+2$$
$$5x>11$$
$$x>\frac{11}{5}$$

y como supusimos que $x<-2$, tenemos:

$$x<-2 \quad \text{y} \quad x>\frac{11}{5},$$

pero no hay ningún número real que cumpla con estas dos condiciones, dado que, por la propiedad transitiva, $\frac{11}{5}<-2$; lo cual es falso.

Por tanto, todas las soluciones de la desigualdad $\frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}$ son las que obtuvimos en el primer paso; es decir los números reales x que satisfacen la desigualdad son:

$$-2<x<\frac{11}{5}$$

Ejemplos

Observación:
En general, si $a<x$ y $x<c$ escribimos $a<x<c$.

6. Resolver $t^2+3t>40$.

Solución:
Para resolver, escribimos la desigualdad como:

$$t^2+3t-40>0$$

y factorizamos el miembro de la izquierda:

$$(t-5)(t+8)>0$$

como el producto es positivo, entonces ambos factores deben tener el mismo signo, por esto es necesario considerar dos casos:

- $t-5>0$ y $t+8>0$, de donde
$$t>5 \quad \text{y} \quad t>-8,$$
entonces $t>5$.
- $t-5<0$ y $t+8<0$, de donde
$$t<5 \quad \text{y} \quad t<-8,$$
así $t<-8$.

Por lo tanto, todas las soluciones de la desigualdad $t^2+3t>40$ son los números que satisfacen algunas de las dos posibilidades $t<-8$ o $t>5$.

Ejercicios

Resuelve las siguientes desigualdades.

1. $x+7>4$
2. $10y<-8$
3. $9z-5\leq 13$
4. $3w-5<2$
5. $6x+7\geq 0$
6. $-5z+1>-4$
7. $-\frac{5}{4}a+\frac{1}{2}<-\frac{3}{4}$
8. $7b-\frac{2}{3}>-8$
9. $\frac{6}{5}x-\frac{3}{5}<5$
10. $x^2-3>6$
11. $w^2+5<1$
12. $y^2-20<-4$
13. $\frac{3x+4}{x-1}>7$
14. $\frac{5x+2}{x+3}>\frac{5}{2}$
15. $\frac{7x-1}{x-9}\leq -3$
16. $a^2-8a>-15$
17. $w^2+10w\leq 11$
18. $z^2+12z\leq -20$
19. $y^2-5y>-3$
20. $x^2+7x+12<0$
21. $z^2-3z<-3$
22. $\frac{4x^2-3x+8}{x^2-1}\geq 4$
23. $\frac{3w^2+10w-27}{(w+2)^2}\leq 2$
24. $\frac{(2x-3)(x+1)}{x+5}<x-6$
25. $1\leq 6x+4\leq 5$
26. $-3\leq -2x+5\leq 7$
27. $-10<4x-2<-6$
28. $\frac{2x^2+10x-12}{x^2-x-30}<1$
29. $\frac{3x^2+7x-31}{x^2-2x-8}>5$
30. $\frac{2x^2+2x-34}{x^2-7x+10}\leq -3$
31. $\frac{-10x^2-9x-28}{6x^2+x-1}>-2$
32. $\frac{16x^2-19x-59}{3x^2-2x-8}<8$
33. $\frac{-52x^2+39x+22}{10x^2-7x-6}\geq -4$

Intervalos

Pensamiento crítico

¿Cuál conjunto es $\{x \in \mathbb{R} | x^2 = -1\}$?

Con la notación $\{x \in \mathbb{R} | x$ cumplen $p\}$ nos referimos al conjunto de todos los números reales que satisfacen la propiedad p. Por ejemplo,

$$\{x \in \mathbb{R} | x^2 = 1\}$$

es el conjunto formado por los números reales que satisfacen que su cuadrado es 1. Es decir, el conjunto anterior está formado por 1 y -1.

- Si $a < b$, el conjunto

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

se llama *intervalo abierto* y lo representamos geométricamente como un segmento de recta que no incluye sus extremos (Figura 1.3).



Figura 1.3

- Si a y b están incluidos en el conjunto, es decir,

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$$

se llama *intervalo cerrado* y lo representamos geométricamente como un segmento de recta que sí incluye sus extremos (Figura 1.4).



Figura 1.4

- Un intervalo es *semiabierto* si contiene solo uno de los dos extremos, es decir,

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} \quad \text{o} \quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$$

y los representamos geométricamente como

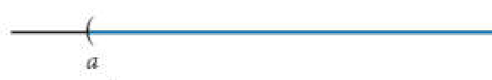


Utilizamos el símbolo ∞ para representar "infinito"; ∞ no es un número real.

- Si $a \in \mathbb{R}$, el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $x > a$ lo denotamos por

$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},$$

lo representamos geométricamente como

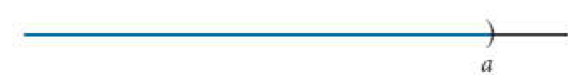


y lo llamamos el rayo abierto que parte de a.

- Si $a \in \mathbb{R}$, el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $x < a$ lo denotamos por

$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\},$$

lo representamos geométricamente como

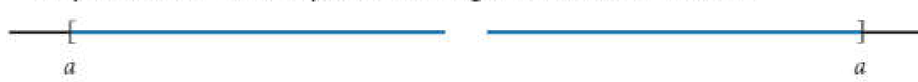


y lo llamamos el rayo abierto que llega a a. Observa que se extiende en dirección contraria a la del inciso anterior.

- De la misma manera que antes, si queremos que el punto a esté incluido, escribimos

$$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq a\}\quad \text{o}\quad (-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq a\}$$

respectivamente, los representamos geométricamente como:



y lo llamamos el rayo cerrado que parte de a y que llega a a, respectivamente.

Utilizando las operaciones de conjuntos podemos hablar de uniones e intersecciones de intervalos.



1. Encontrar $(-2,5)\cap[1,7]$.

Solución:

$$(-2,5)\cap[1,7]=[1,5)$$

TIP

$A\cap B=\{x|x\in A \text{ y } x\in B\}$

2. Escribir usando notación de intervalos, $\{x\in\mathbb{R}|\ -2<x<5\}\cup\{x\in\mathbb{R}|\ -1<x\}$

Solución:

$$\{x\in\mathbb{R}|\ -2<x<5\}\cup\{x\in\mathbb{R}|\ -1<x\}=\{x\in\mathbb{R}|\ -2<x\}=(-2,\infty)$$

TIP

$A\cup B=\{x|x\in A \text{ o } x\in B\}$

Inecuaciones e intervalos

Resolver la inecuación $-2\leq 5x+1\leq 6$.

Solución:

Resolvemos la inecuación.

$$\begin{array}{ccccc} -2 & \leq & 5x+1 & \leq & 6\\ -3 & \leq & 5x & \leq & 5\\ -\frac{3}{5} & \leq & x & \leq & 1 \end{array}$$

Este resultado lo podemos escribir como $x\in\left[-\frac{3}{5},1\right]$. Es decir, las soluciones de la inecuación son los puntos del segmento (Figura 1.5).



Figura 1.5

En muchas ocasiones las soluciones de una inecuación son los puntos de un intervalo o de la unión de intervalos.

Una vez resuelta la desigualdad algebraica, es conveniente expresar la solución usando intervalos.

Ejemplo

1. Resolver la inecuación $2x^2+8x+5>-1$.

Solución:
Pasamos el -1 al lado izquierdo y obtenemos la inecuación equivalente.

$$2x^2+8x+6>0 \tag{1.1}$$

Basta resolver esta inecuación. Para esto, primero resolvemos la ecuación correspondiente.

$$2x^2+8x+6=0$$

Simplificamos:

$$x^2+4x+3=0$$

y resolvemos esta ecuación usando la fórmula general

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}$$

Así, las soluciones de la ecuación son; $x_1=-1$ y $x_2=-3$.
Entonces;

$$2x^2+8x+6=2(x+1)(x+3)$$

y la inecuación (1.1) se transforma en:

$$2(x+1)(x+3)>0$$
$$(x+1)(x+3)>0$$

Recuerda que para que el producto de dos factores sea positivo, ambos deben ser positivos o ambos negativos.

Si ambos factores son positivos:

$$\begin{array}{rcl} x+1 & > & 0 \\ x & > & -1 \\ x & \in & (-1,\infty) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} x+3 & > & 0 \\ x & > & -3 \\ x & \in & (-3,\infty) \end{array}$$

entonces $x\in(-1,\infty)\cap(-3,\infty)=(-1,\infty)$.

Si ambos factores son negativos:

$$\begin{array}{rcl} x+1 & < & 0 \\ x & < & -1 \\ x & \in & (-\infty,-1) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} x+3 & < & 0 \\ x & < & -3 \\ x & \in & (-\infty,-3) \end{array}$$

entonces $x\in(-\infty,-1)\cap(-\infty,-3)=(-\infty,-3)$.

De donde la desigualdad se cumple si:

$$x\in(-\infty,-3)\cup(-1,\infty).$$

O sea, si x pertenece a la unión de los rayos:



TIP
Si $b^2-4ac>0$, entonces hay dos números reales distintos que satisfacen una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$.



Escribe los siguientes conjuntos usando los intervalos.

1. $\{x \in \mathbb{R} |\ -4 < x < 4\}$

2. $\left\{b \in \mathbb{R} \middle| b < \frac{1}{2}\right\}$

3. $\left\{z \in \mathbb{R} \middle| \frac{4}{3} < z \leq 9\right\}$

4. $\{w \in \mathbb{R} |\ -21 \leq w < -7\}$

5. $\{a \in \mathbb{R} |\ -8.74 \leq a\}$

6. $\left\{y \in \mathbb{R} \middle| \frac{12}{11} \leq y \leq \frac{25}{3}\right\}$

7. $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\frac{45}{4} < x < 2\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\frac{11}{2} < x < \frac{11}{2}\right\}$

8. $\{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 6\} \cup \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0\}$

9. $\{x \in \mathbb{R} |\ x < 7\} \cup \{x \in \mathbb{R} |\ 3 < x < 10\}$

10. $\{x \in \mathbb{R} | 5 < x\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x \leq 4\}$

Encuentra los siguientes conjuntos.

11. $(-8,5) \cap [-3,6]$

12. $(5,9) \cup (-2,8)$

13. $(7,\infty) \cap (-\infty,-1)$

14. $(-\infty,1] \cap \left[-\frac{3}{5},1\right)$

15. $(-\infty,-4] \cup \left(0,\frac{12}{7}\right]$

16. $\left(-\infty,-\frac{11}{5}\right) \cap (-2,\infty)$

17. $(-\infty,-2) \cup (-4,\infty)$

18. $(-3,\infty) \cap \left(\frac{9}{2},\infty\right)$

19. $(-\infty,-7.9) \cap (-\infty,-9.7)$

20. $\left(\frac{25}{4},\infty\right) \cup (6.5,\infty)$

21. $(-21,0) \cap \varnothing$

22. $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

23. $(-\infty,-5) \cap (9,\infty)$

24. $\left(-\infty,-\frac{22}{15}\right) \cup \left(-\frac{4}{9},\frac{5}{6}\right)$

25. $\left(\frac{3}{4},6\right) \cup \varnothing$

26. $(5,\infty) \cap ((1,\infty) \cap (21,\infty))$

27. $(-3,10) \cup \left(\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup (6,\infty)\right)$

28. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cap \left(\left(-\infty,\frac{3}{4}\right) \cap (-\infty,-1)\right)$

29. $\left((-8,-7) \cup \left(-\frac{9}{2},\infty\right)\right) \cap (-9,2)$

30. $\left(\left(-\infty,\frac{3}{4}\right) \cap (-\infty,6)\right) \cup (-2,4)$

31. $\left(\frac{7}{5},\infty\right) \cap \left(\left(-3,\frac{1}{2}\right) \cup \varnothing\right)$

Resuelve las siguientes inecuaciones.

32. $x^2 - 4x + 3 < 0$

33. $2x^2 + 10x > 0$

34. $x^2 + 7x + 6 < 0$

35. $6x^2 - 10x + 4 < 0$

36. $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

Valor absoluto de un número real

El *valor absoluto* de un número real es su distancia al cero. Puesto que un número real puede ser positivo, negativo o cero (Figura 1.6), se tiene:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$|-a|$ $|a|$ $-a$ 0 a Si $a > 0$

$|a|$ $|-a|$ $-a$ 0 a Si $a < 0$

Figura 1.6

Observación:

Supongamos que a representa un número, que puede ser positivo, negativo o cero. Por consiguiente $-a$ no es necesariamente un número negativo, y podremos decidirlo hasta que sepamos qué número representa a. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$, por ejemplo, si $a = -4$, entonces

$$-a = -(-4) = 4$$

que es positivo.

Ejemplos

1. Si $a = \frac{3}{4}$, entonces $-a = -\frac{3}{4}$.
2. Si $a = -1.6$, entonces $-a = -(-1.6) = 1.6$.
3. Si $a = 0$, entonces $-a = 0$.

Algunas propiedades del valor absoluto

Si a y b son dos números reales, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $|-a| = |a|$.
- $|a|^2 = a^2$.
- $|a| = \sqrt{a^2}$. Con $\sqrt{b}$ se denota la raíz no negativa de b, para cualquier número $b \geq 0$.
- $|ab| = |a||b|$.
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$.

Ejemplos

1. $|-11| = |11| = 11.$

2. $|-12|^2 = (-12)^2 = 144.$

3. $\sqrt{(-5)^2} = 5 = |5|.$

4. $|8 \cdot 15| = |8||15| = 120.$

5. $\left|\frac{-7}{3}\right| = \frac{|-7|}{|3|} = \frac{7}{3}.$

6. Resolver la ecuación $|x| = 7.$

Solución:
Puesto que en la ecuación aparece un valor absoluto, consideramos tres casos:

- Si $x = 0$, entonces $|x| = 0$. Como $0 \neq 7$, entonces no se satisface la igualdad.
- Si $x > 0$, entonces $|x| = x$, de donde $x = 7$.
- Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, de donde $-x = 7$. Así, $x = -7$.

Por tanto $x = 7$ y $x = -7$ satisfacen la igualdad. Esto era de esperarse ya que 7 y −7 son los únicos puntos cuya distancia al cero es 7 (Figura 1.7).

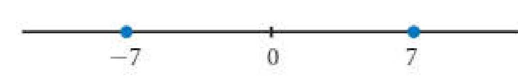


Figura 1.7

En general:

- Si $r \geq 0$, entonces la igualdad $|x| = r$ solo la satisfacen r y $-r$, pues son los únicos puntos cuya distancia a cero es exactamente r (Figura 1.8).

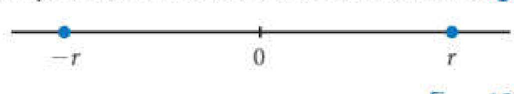
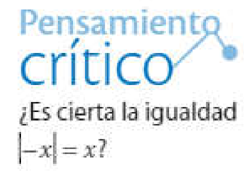


Figura 1.8

- La igualdad $|x| = r$ con $r < 0$ no tiene solución, pues el valor absoluto de x es mayor o igual que 0 para cualquier x.



¿Es cierta la igualdad $|-x| = x$?

Ejemplos

1. Resolver $|z - 4| = 4.$

Solución:
Hagamos $x = z - 4$, entonces la ecuación se transforma en $|x| = 4$. De donde, las soluciones son $x = 4$ y $x = -4$; es decir:

$$z - 4 = 4 \quad \text{y} \quad z - 4 = -4.$$

Así, las soluciones son $z = 8$ y $z = 0$.

Comprobación:
Si $z = 8$, entonces:
$$|z - 4| = |8 - 4| = |4| = 4.$$

Si $z = 0$, entonces:
$$|z - 4| = |0 - 4| = |-4| = 4.$$

2. Resolver $|3z+1|=5$.

Solución:
Hagamos $x=3z+1$ entonces la ecuación se transforma en $|x|=5$. De donde, $x=5$ o bien $x=-5$; es decir:

$$3z+1=5 \quad \text{o bien} \quad 3z+1=-5$$

Así, las soluciones son:

$$\begin{aligned} 3z+1&=5 \\ 3z&=5-1 \\ z&=\frac{4}{3} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 3z+1&=-5 \\ 3z&=-5-1 \\ z&=-2. \end{aligned}$$

Comprobación:
Si $z=\frac{4}{3}$, entonces:

$$|3z+1|=\left|3\left(\frac{4}{3}\right)+1\right|=|5|=5.$$

Si $z=-2$, entonces:

$$|3z+1|=|3(-2)+1|=|-5|=5.$$

3. Encontrar el punto medio x_0 del segmento que une a 1 y 6.

Solución:
El punto x_0 que estamos buscando debe estar entre los puntos 1 y 6, y su distancia a cada uno de ellos debe ser la misma. Si llamamos r a esa distancia (Figura 1.9), entonces debe satisfacerse que;

$$\begin{aligned} x_0&=1+r \\ x_0&=6-r \end{aligned}$$

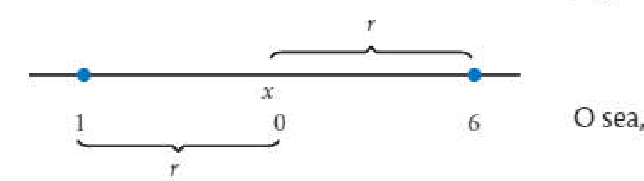


Figura 1.9

O sea,

$$\begin{aligned} 1+r&=6-r \\ 2r&=6-1 \\ r&=\frac{6-1}{2} \\ r&=\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Al sustituir en la primera ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} x_0&=1+\frac{5}{2} \\ &=\frac{7}{2}. \end{aligned}$$



Observa, que el punto medio x_0 del segmento es la semisuma de los extremos 1 y 6:

$$\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2}$$

y la distancia r de él a cualquiera de los extremos es la semidiferencia del mayor 6 menos el menor 1:

$$\frac{6-1}{2}=\frac{5}{2}.$$

En general, el punto medio x_0 de un segmento que tiene extremo izquierdo a y derecho b, es:

$$x_0=\frac{a+b}{2}$$

y su distancia a cualquiera de los extremos es:

$$r=\frac{b-a}{2}.$$

El punto medio $x_0=\frac{a+b}{2}$ también se llama el *centro de los intervalos* (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$ y $(a,b]$ y se dice que $r=\frac{b-a}{2}$ es el *radio* de cualquiera de ellos.

Tenemos que:

$$x_0-r=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=a$$

y

$$x_0+r=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}=b;$$

de donde, por ejemplo,

$$(a,b)=(x_0-r,x_0+r) \qquad (1.2)$$

y de modo semejante se pueden escribir el resto de los intervalos.

TIP
El intervalo (a, b) tiene centro en el punto $x_0=\frac{a+b}{2}$ y su radio es $r=\frac{b-a}{2}$.



Simplifica los siguientes valores absolutos.

1. $|-19|$
2. $-|48|$
3. $|0.63|$
4. $\left|\frac{0}{14}\right|$
5. $\left|-\frac{21}{13}\right|$
6. $\left|-\frac{1}{5}\right|$
7. $|-\sqrt{3}|$
8. $-|-\sqrt{6}|$
9. $-|\sqrt{2}|$
10. $-|37.95|$
11. $|-\pi|$
12. $-|-(-1.28)|$
13. $|-0.25|$
14. $|0.58|$
15. $|-(-9)|$
16. $-|68|$
17. $-|-1.3|$
18. $|-76.05|$
19. $\left|5\frac{3}{4}\right|$
20. $-\left|-3\frac{7}{12}\right|$



Determina el punto medio y radio de los siguientes intervalos.

21. $(2,8)$
22. $(-10,-5)$
23. $[-6,9]$
24. $[1.5,3.5)$
25. $(-\pi,3\pi]$

Escribe cada uno de los siguientes intervalos en la forma (1.2).

26. $(1,3)$
27. $[15,27]$
28. $(-10,4]$
29. $[0.6,1.4)$
30. $(\sqrt{2},2+\sqrt{2})$

Inecuaciones y valor absoluto

Una imprenta compra pliegos de papel que más tarde serán cortados y vendidos como hojas para oficina. Cada pliego mide 70×95 cm y el peso de un millar de ellos debe ser de 36 kilogramos. Para aceptar el envío, la imprenta establece una tolerancia máxima de 95 gramos por millar. ¿Cuánto puede pesar el millar de pliegos para aprobar el control establecido?

Solución:
Llamamos x al peso de un millar de pliegos.

La diferencia entre x y 36 kilogramos debe ser menor o igual que 0.095 kilogramos. Como el error en el peso puede ser hacia arriba o hacia abajo, entonces:

$$|x-36|\leq 0.095$$

Resolvemos la inecuación.

- Si $x-36\geq 0$ entonces la inecuación es:

$$x-36\leq 0.095$$

de donde:

$$x\leq 36.095.$$

- Si $x-36<0$ entonces la inecuación es:

$$-(x-36)\leq 0.095$$

de donde:

$$\begin{aligned}-(x-36)&\leq 0.095\\ x-36&\geq -0.095\\ x&\geq 36-0.095\\ x&\geq 35.905\end{aligned}$$

Así,

$$35.905\leq x\leq 36.095.$$

El millar de pliegos puede pesar entre 35.905 y 36.095 kilogramos para ser aceptado.

- Las soluciones de $|x|<2$ son los números reales que satisfacen $-2<x<2$. Observa en la Figura 1.10 que los puntos que satisfacen que su distancia al cero es menor o igual que 2 son los que se encuentran a la derecha de -2 y a la izquierda de 2. De tal forma que, $x\in(-2,2)$. Es decir, x debe pertenecer al segmento:

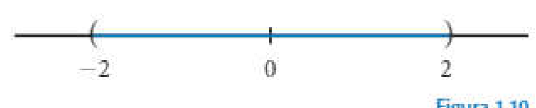
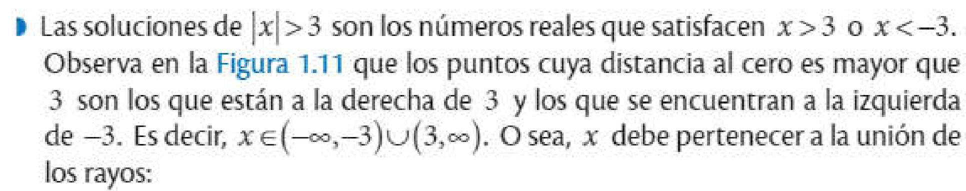


Figura 1.10

TIP
Los puntos x que satisfacen $|x - a| < r$ son los puntos x que están en el intervalo $(a-r, a+r)$.

- Las soluciones de $|x|>3$ son los números reales que satisfacen $x>3$ o $x<-3$. Observa en la Figura 1.11 que los puntos cuya distancia al cero es mayor que 3 son los que están a la derecha de 3 y los que se encuentran a la izquierda de -3. Es decir, $x\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$. O sea, x debe pertenecer a la unión de los rayos:



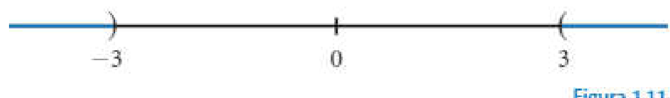


Figura 1.11

Al generalizar el primero de estos dos ejemplos tenemos que si $r>0$, entonces las soluciones de $|x|<r$ son los puntos x que satisfacen

$$-r<x<r$$

Es decir, los del intervalo $(-r,r)$ (Figura 1.12) que tiene por centro a 0 y radio r.

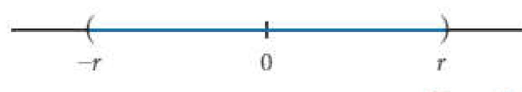


Figura 1.12

A través de ejemplos vamos a generalizar este resultado.

Ejemplos

1. Resolver $|x-3|<1$.

Solución:
Hagamos $y=x-3$. Entonces, la inecuación se transforma en $|y|<1$, cuyas soluciones sabemos que son las que satisfacen:

$$-1<y<1$$

Así, las soluciones x de la inecuación original son las que cumplen:

$$\begin{array}{ccccc} -1 & < & x-3 & < & 1 \\ -1+3 & < & x & < & 1+3 \\ 2 & < & x & < & 4 \end{array}$$

Es decir, los puntos del intervalo abierto $(2,4)$, ver Figura 1.13, el cual tiene por centro a:

$$x_0=\frac{4+2}{2}=3$$

y su radio es;

$$r=\frac{4-2}{2}=1.$$

Observa que $x_0 = 3$ y $r = 1$ aparecen en la inecuación original $|x-3|<1$ y que $(2,4)=(3-1,3+1)$.

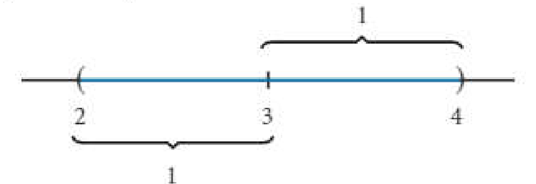


Figura 1.13

2. Resolver $|x+2|<2$.

Solución:
Hagamos $y = x+2$. Entonces, la inecuación se transforma en $|y|<2$, cuyas soluciones sabemos que son los números que satisfacen:

$$-2 < y < 2$$

Así, las soluciones x de la inecuación original son las que cumplen:

$$\begin{array}{ccccc} -2 & < & x+2 & < & 2 \\ -2-2 & < & x & < & 2-2 \\ -4 & < & x & < & 0 \end{array}$$

Es decir, los puntos del intervalo abierto $(-4,0)$, el cual tiene por centro a

$$x_0 = \frac{-4+0}{2} = -2$$

y su radio es;

$$r = \frac{0-(-4)}{2} = 2.$$

Observa que la inecuación original $|x+2|<2$ se puede escribir como $|x-(-2)|<2$ y que $(-4,0)=(-2-2,-2+2)$.

Ejemplos

Observando los dos ejemplos anteriores notamos que resolvimos inecuaciones del tipo;

$$|x-x_0|<r$$

y en cada caso obtuvimos que su conjunto de soluciones es el intervalo abierto con centro en x_0 y radio r (Figura 1.14); o sea (x_0-r, x_0+r). Esto es cierto para cualquier punto x_0 y cualquier número real $r>0$.

Así, decir que $x \in (x_0-r, x_0+r)$ es equivalente a afirmar que x satisface la inecuación $|x-x_0|<r$.

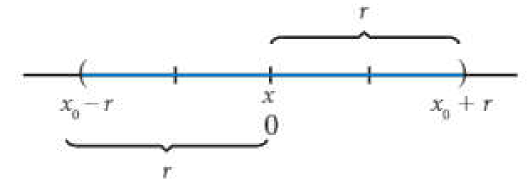


Figura 1.14



Ejemplos

1. $x \in (10-5, 10+5)$ si $|x-10| < 5$ y viceversa.

2. $x \in (5,11)$ si $|x-8| < 3$ y viceversa.

Solución:
$|x-8| < 3$ equivale a,

$$x \in (8-3, 8+3) = (5,11).$$

3. $|x+1| < 4$ si $x \in (-5,3)$ y viceversa.

Solución:
La inecuación $|x+1| < 4$ se puede escribir como:

$$|x-(-1)| < 4$$

y $|x-(-1)| < 4$ equivale a,

$$x \in (-1-4, -1+4) = (-5,3).$$

4. Encontrar las soluciones de $|2z+3| < 4$.

Solución:
La inecuación $|2z+3| < 4$ es equivalente a:

$$2\left|z+\frac{3}{2}\right| < 4,$$

es decir, las dos inecuaciones tienen las mismas soluciones.
Vamos a resolver la segunda inecuación. Pasamos el 2 al lado derecho:

$$\left|z+\frac{3}{2}\right| < 2$$

Al reescribir la inecuación como:

$$\left|z-\left(-\frac{3}{2}\right)\right| < 2.$$

reconocemos que sus soluciones son los puntos del intervalo:

$$\left(-\frac{3}{2}-2, -\frac{3}{2}+2\right) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

TIP

Decir: "si $|x-c| < r$", es lo mismo que decir:
si "$x \in (c-r, c+r)$."



Ejercicios

Resuelve las siguientes inecuaciones.

1. $|x-9| < 3$

2. $|y+1| > 6$

3. $|z+12| \leq 8$

4. $|3w+7| \geq 9$

5. $|2-5x| < 7$

6. $|8y-4| > 10$

7. $|6x-11| \leq 5$

8. $|4z+1| < 2$

9. $|1-9x| \geq 1$

10. $|5y+3| = 7$

Una función asocia a cada elemento del dominio, un único elemento del contradominio.



Unidad 2 Funciones

En la actualidad se define una función especificando un par de conjuntos A y B y una regla de correspondencia f que asigna a cada elemento x en A un único elemento $f(x)$ en B. Este concepto ha sufrido cambios a lo largo del tiempo adecuándose a las necesidades de cada época y a su utilidad tanto en las matemáticas como en otras ciencias.

Antes, una *función* se identificaba con una expresión analítica, por ejemplo un polinomio, que permitía calcular valores a partir de otros.

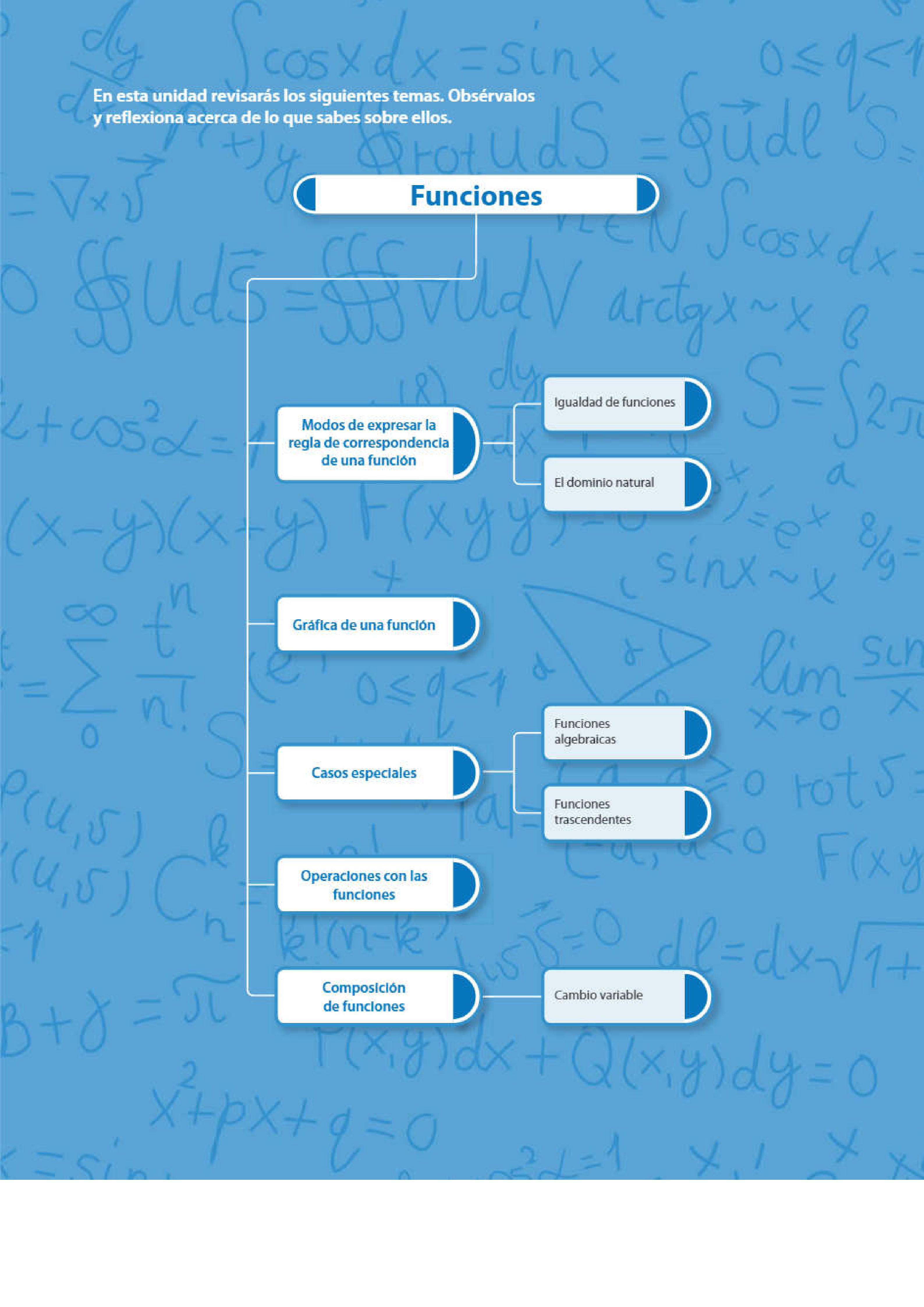
La definición de función comenzó a tomar forma con la invención del *Cálculo* por Newton y Leibniz. En particular este último inventó los términos *función*, *variable*, *constante* y *parámetro*. La notación $f(x)$ que conocemos actualmente fue utilizada por primera vez por Clairau y Euler en 1736 en su obra *Commentarii*.

En 1837, Dirichlet propuso la definición de una función como una correspondencia cualquiera entre dos conjuntos de números, que asocia a cada número en el primer conjunto un único número del segundo. El gran cambio en esta definición es que ya no se habla de una expresión analítica o fórmula para describir la función.

Finalmente, a principios del siglo XX, con la formulación de la teoría de conjuntos se definió a las funciones como se indica en el primer párrafo.

Las funciones son el objeto de estudio del cálculo diferencial e integral. El cálculo nos sirve para saber en qué valores la función es continua y en cuáles no, en qué intervalos es creciente o decreciente, dónde alcanza su valor máximo o mínimo, si es que los hay, cuánto mide el área encerrada por la gráfica de la función y el eje X en cierto intervalo, etcétera.

En este capítulo empezamos el estudio de las funciones, conoceremos cuáles son las funciones elementales a partir de las cuales puede construirse la mayor parte de las que nos interesan, las operaciones aritméticas que pueden definirse entre ellas, su gráfica, etcétera.


En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.
Funciones
Modos de expresar la regla de correspondencia de una función
Igualdad de funciones
El dominio natural
Gráfica de una función
Casos especiales
Funciones algebraicas
Funciones trascendentes
Operaciones con las funciones
Composición de funciones
Cambio variable

Funciones

En una tienda de abarrotes la ganancia por la venta de cada barra de chocolate es de 40 centavos. Haz una tabla que nos indique la ganancia obtenida, en pesos, por la venta de 1 hasta 10 barras. ¿Cuál será la ganancia al vender 200 barras?

Solución:

Número de barras	Ganancia en pesos
1	0.40
2	0.80
3	1.20
4	1.60
5	2.00
6	2.40
7	2.80
8	3.20
9	3.60
10	4.00

Hacemos una tabla de dos columnas como la que se muestra a la izquierda; en la primera columna indicamos el número de barras y en la segunda, la cantidad de pesos recibida como ganancia al venderlas.

Observamos que para encontrar el precio de x barras, multiplicamos x por 0.40. Es decir, si llamamos $g(x)$, a la ganancia (en pesos) que se obtiene al vender x barras de chocolate, tenemos que:

$$g(x)=0.40x$$

Así, para encontrar la ganancia por una venta de 200 barras calculamos:

$$g(200)=0.40\times 200=80$$

por lo que la ganancia por la venta de 200 barras es de \$80.

En el ejemplo anterior vemos que a cada cantidad de barras vendidas se le asocia una ganancia, de modo tal que le corresponde un valor único de la ganancia.

En multitud de situaciones y sucesos de muy diversas características, los valores de una cierta cantidad y dependen, del modo antes descrito, de los valores de otra cantidad x, es decir: a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

Ejemplos

- El área y de un cuadrado depende de la longitud x de su lado:

$$y=x^2.$$

- La velocidad y con que un cuerpo recorre una distancia de 10 kilómetros depende del tiempo x que emplea para hacerlo:

$$y=\frac{10}{x}.$$

- El perímetro y de un círculo depende de su radio x:

$$y=2\pi x.$$

En todos estos casos decimos que y varía con x y de manera más precisa decimos que y es una función de x. Además, y es entonces llamada la *variable dependiente* y x la *variable independiente*.

Una de las herramientas más poderosas para entender nuestro entorno es la colección de fórmulas que hemos podido establecer para relacionar diversas cantidades que nos interesan en momentos o situaciones particulares.

Lo anterior llevó a introducir la noción matemática de *función*. De una manera un tanto informal decimos:

Se establece una *función* de un conjunto A en un conjunto B, cuando se da una regla (criterio o ley) a través de la cual **asociamos a cada elemento** x de A **un único elemento** y de B; a dicha regla se le denomina la *regla de correspondencia*

o *de asociación* de la función y se le denota por una letra, digamos f. Todo esto se resume con la siguiente notación:

$$f : A \to B$$

Para tener una función debemos tener dos conjuntos, que pueden ser iguales entre sí, y una regla de correspondencia con las características antes descritas. Cuando no hay lugar a confusión, nos referimos a una función mediante la letra que usamos para su regla de correspondencia; por ejemplo, en el caso que nos ocupa podemos hablar simplemente de la función f. El conjunto A es llamado el *dominio* de la función y para señalarlo escribimos $Dom\, f = A$. El conjunto B es llamado el *codominio* o *contradominio* de la función f.

En lo que sigue, los conjuntos A y B serán subconjuntos del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. En este caso decimos:

> Una función entre dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ es llamada una función real de variable real.

En el ejemplo introductorio tenemos una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales;

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10, \ldots, 200, \ldots,\}$$

Como codominio podemos considerar cualquier conjunto de números reales que contenga a los múltiplos de 0.40:

$$\{0.40, 0.80, 1.20, \ldots, 4.00, \ldots,\}$$

Para simplificarnos la vida, en general podemos considerar que el codominio es todo el conjunto de números reales.

La regla de correspondencia f es: a 1 asociarle 0.40, a 2 asociarle 0.80, etcétera. Es decir,

$$f(1) = 0.40, \quad f(2) = 0.80, \quad f(3) = 1.20, \ldots$$

En general, cuando se tiene una función $f : A \to B$ se acostumbra denotar por $f(x)$ al elemento y de B que está asociado al elemento x de A a través de f. Usamos las siguientes expresiones para referirnos a $f(x)$: f de x, f en x, el valor que toma f en x y la imagen de f en x. También se acostumbra decir que f asocia $f(x)$ a x, f envía x a $f(x)$ o bien f transforma x en $f(x)$ y podemos escribir $x \to f(x)$ para denotar lo anterior.

La expresión f envía x a $f(x)$ nos sugiere usar la siguiente: f envía los elementos de A a B y nos lleva a considerar que la función es un dispositivo que envía, "dispara" o "proyecta" objetos de un conjunto a otro conjunto.

En tanto que la expresión: f transforma x en $f(x)$, da la idea de que una función actúa a manera de un artefacto que al introducirle un elemento de un conjunto A produce un elemento de un conjunto B, de la misma manera que una máquina transforma los insumos en un producto final. Todas estas imágenes son aceptables si nos ayudan a manejar el concepto de *función*.

Para cualquier función $f : A \to B$, definimos la *imagen* o *rango de la función f* como la colección de todos los elementos $f(x)$, con $x \in A$, es decir, todos aquellos elementos de B que fueron los asociados a los elementos de A. Este conjunto se denota por $f(A)$ o bien $\operatorname{Im} f$.

Es claro que $\operatorname{Im} f$ es un subconjunto del codominio B y puede suceder que $\operatorname{Im} f$ sea un subconjunto propio del codominio, es decir, que sea un subconjunto del codominio que no coincida con él, lo cual se denota por $\operatorname{Im} f \subsetneq B$.

En el ejemplo introductorio podemos considerar a $\mathbb{R}$ como el codominio de la función ganancia y la imagen de esa función es

$$\operatorname{Im} f = \{0.40, 0.80, 1.20, \ldots, 4.00, \ldots\},$$

el cual es un conjunto que está contenido en $\mathbb{R}$ pero distinto de $\mathbb{R}$.

Modos de expresar la regla de correspondencia de una función

I. *Modo tabular*. Éste es el modo más explícito; en él se especifica individualmente el asociado de cada elemento de A. El nombre de modo tabular se justifica por lo que se dice en el siguiente ejemplo, que nos recuerda al ejemplo introductorio.

Sea $f : \{1,2,3,4\} \to \{-1,0,1,3,6,7,9,13\}$ la función cuya regla de correspondencia es la que hace las siguientes asociaciones:

$$1 \to 1$$
$$2 \to 3$$
$$3 \to 6$$
$$4 \to 1$$

lo que equivale a

x	$f(x)$
1	1
2	3
3	6
4	1

En este ejemplo, el dominio es $A = \{1,2,3,4\}$ y el codominio es

$$B = \{-1, 0, 1, 3, 6, 7, 9, 13\}.$$

Observamos que:

- Para garantizar que a cada elemento de A se le asocie un único elemento en B, en la primera columna deben aparecer, una sola vez, todos los elementos del dominio, pero en la segunda columna puede haber elementos repetidos y no es necesario que estén todos los elementos de B.
- Los elementos de la segunda columna son elementos de B que fueron asociados a algún elemento x de A. Recordamos que dichos elementos de B constituyen el conjunto $\operatorname{Im} f$ llamado la imagen o rango de la función f. En este caso $\operatorname{Im} f = \{1,3,6\}$.
- En general, al dar una tabla de dos columnas, donde en la primera columna no hay elementos repetidos, se establece una función tal que: su dominio está formado por los elementos que aparecen en la primera columna; su imagen es el conjunto formado por los elementos de la segunda columna y la regla de asociación es la que relaciona a cada elemento x de la primera columna con el elemento $f(x)$ que está en el mismo renglón. En el ejemplo anterior tenemos: $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 6$ y $f(4) = 1$.

Ejemplo

Decidir si la tabla determina una función y de ser así, establecer su dominio, imagen y regla de asociación.

x	y
−9	6
−5	4
−2	3
2	4
6	3

Solución:
Como en la primera columna no hay repeticiones, entonces sí determina una función.
El dominio de la función es:

$$A=\{-9,-5,-2,2,6\}.$$

El rango o imagen es:

$$B=\{3,4,6\}$$

y la regla de correspondencia f es la que hace las siguientes asociaciones:

$$-9\to 6$$
$$-5\to 4$$
$$-2\to 3$$
$$2\to 4$$
$$6\to 3$$

II. *Mediante una fórmula*. En este modo, la regla de correspondencia se expresa mediante una fórmula que pueda ser evaluada en cada elemento x del dominio de manera que esa evaluación produzca un resultado único $y(=f(x))$.

El siguiente es un ejemplo de este modo de presentar la regla de correspondencia. Consideremos la función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, cuya regla de correspondencia es $y=2x$. Es decir, mediante la fórmula establecemos la regla consistente en asociar a cada natural x su doble $2x$. Así, $f(x)=2x$ para cada natural x, en particular: $f(1)=2$, $f(7)=14$, etcétera.

En este ejemplo, el dominio y codominio de la función es el mismo conjunto: el de los números naturales; en tanto que la imagen es el conjunto formado por los pares positivos.

Para esta función no se puede dar la regla de asociación en modo tabular.

Ejemplo

Decidir si la fórmula $y=x+1$ determina una función real de variable real.

Solución:
Al evaluar el lado derecho en un número real cualquiera x obtenemos un único número real $x+1$.

Por tanto, tenemos que la fórmula sí determina una función real de variable real, y que según ella a cada número real x se le asocia el real $f(x)=x+1$. Por ejemplo, $f(-1)=0$, $f(0)=1$, $f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+1$, etcétera.

TIP

El filósofo y matemático alemán, Gottfried Wilhelm Leibniz utilizó el término *función* entre 1692 y 1694 para referirse a curvas, en el sentido geométrico. En tanto que el matemático suizo Leonhard Euler en su obra *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) considera a las funciones como fórmulas. La definición moderna de *función* ligada a la idea de correspondencia se atribuye al matemático belga Peter Dirichlet.

III. *Mediante una combinación de fórmulas.* Podemos partir al dominio en varios pedazos, ajenos entre sí, y usar en cada uno de ellos una fórmula para obtener los valores asociados a sus elementos.

Sea f la función definida mediante la regla de correspondencia siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{si } x\in[-6,2) \\ 2x & \text{si } x\in[2,7] \end{cases}$$

En este caso el dominio está compuesto por los intervalos $[-6,2)$ y $[2,7]$; es decir, el dominio es el intervalo $[-6,7]=[-6,2)\cup[2,7]$. En el pedazo $[-6,2)$ se usa la fórmula $y=-x+1$ y para la porción $[2,7]$ se usa $y=2x$.

Si deseamos encontrar el valor de $f(x)$ para cualquier $x\in[-6,7]$, debemos ver en cuál de los intervalos $[-6,2)$ o $[2,7]$, se encuentra x y evaluar con la fórmula que corresponda.

Por ejemplo:

- $-4\in[-6,2)$, por tanto usamos la fórmula $f(x)=-x+1$:

$$f(-4)=-(-4)+1=5.$$

- $2\in[2,7]$, por tanto usamos la fórmula $f(x)=2x$:

$$f(2)=2(2)=4.$$

- $7\in[2,7]$, por tanto usamos la fórmula $f(x)=2x$:

$$f(7)=2(7)=14.$$

- $5\in[2,7]$, por tanto usamos la fórmula $f(x)=2x$:

$$f(5)=2(5)=10.$$

A toda función cuya regla de asociación esté definida según este tercer modo se le denomina *función combinada* o *función a pedazos*.

Igualdad de funciones

Decimos que dos funciones f y g son ***iguales*** si:

i. tienen el mismo dominio.

ii. tienen la misma regla de correspondencia, es decir,

$$f(x)=g(x)$$

para cualquier x en el dominio.

Ejemplos

1. Determinar si las funciones

$$f(x)=x;\quad Dom\ f=[0,\infty),$$

$$g(x)=\sqrt{x^2};\ Dom\ g=[0,\infty)$$

son iguales.

Solución:
Las funciones tienen el mismo dominio, entonces solo debemos ver si la regla de correspondencia es la misma.

Para cualquier $x\geq 0$ es lo mismo $\sqrt{x^2}$ que x entonces:

$$g(x)=\sqrt{x^2}=x=f(x)\quad \text{ya que } x\geq 0.$$

Por lo tanto, las funciones son iguales.
Hacemos tres observaciones respecto a este ejercicio.

- Para $x<0$, $\sqrt{x^2}=-x$, ya que con $\sqrt{}$ nos referimos a la raíz cuadrada no negativa. Así $\sqrt{(-3)^2}=-(-3)=3$.
- Es importante notar que si definimos $f(x)=x$, con $Dom\ f=\mathbb{R}$, entonces aunque la regla de asociación de f no cambió, es una función distinta a la que habíamos considerado y tenemos que esta nueva función f no es igual a g ya que sus dominios no coinciden.
- Si consideramos que el dominio de ambas funciones es $\mathbb{R}$ las reglas de correspondencia no son iguales. Por ejemplo $f(-3)=-3$ y $g(-3)=\sqrt{(-3)^2}=3$. Por lo tanto, las funciones son distintas.

2. Determinar si las funciones

$$f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2};\ Dom\ f=\mathbb{R}\setminus\{2\},$$

$$g(x)=x+2;\ Dom\ g=\mathbb{R}$$

son iguales.

Solución:
Como los dominios de las funciones son distintos entonces las funciones no son iguales, no obstante que:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

para todo x donde ambas funciones están definidas, o sea si $x\neq 2$.

TIP
Dos funciones f y g son iguales si:
$Dom\ f = Dom\ g$
$f(x)=g(x)$
para todo $x\in Dom\ f$.

Pensamiento crítico
La regla de correspondencia

$$y=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\in(-5,3)\\ x-2 & \text{si } x\in(1,5)\end{cases}$$

¿corresponde a una función?

Ejercicios

En cada caso determina el dominio, la imagen y la regla de correspondencia.

1.

x	f(x)
−4	1
0	2
2	3

2.

x	f(x)
−2	−10
−3	−7
−8	−15

3.

x	f(x)
6	−9
8	2.5
10	0.8

4.

x	$f(x)$
1	2
2	−5
3	0
4	5
5	−6

5.

x	$f(x)$
−3	11
−1	21
2	−15
12	−6
25	11

6.

x	$f(x)$
−9	−17
−7	−13
−5	−9
−3	−5
−1	−1

En cada caso evalúa la función en los puntos dados.

7. $f(x)=5x+3;\ x=-9,\ x=\pi,\ x=5,\ x=\frac{1}{2}.$

8. $f(x)=x^2-1;\ x=-3,\ x=-1,\ x=0,\ x=\sqrt{2}.$

9. $f(x)=\sqrt{x+3};\ x=-2,\ x=-\frac{1}{3}\ x=0,\ x=-3.$

10. $f(x)=\frac{1}{x};\ x=-\frac{1}{5},\ x=-2,\ x=8,\ x=\frac{5}{9}.$

11. $f(x)=x^2+6x+9;\ x=-4,\ x=-1,\ x=3,\ x=7.$

12. $f(x)=\frac{x-6}{x+2};\ x=-10,\ x=6,\ x=2,\ x=\sqrt{3}.$

13. $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in(-8,2) \\ 3x+2 & \text{si } x\in[2,12] \end{cases};\ x=-6.25,\ x=0,\ x=2,\ x=11.$

14. $f(x)=\begin{cases} 5x & \text{si } x\in[-4,-1] \\ 8x & \text{si } x\in(-1,3] \end{cases};\ x=-2,\ x=-0.5,\ x=1,\ x=\frac{5}{2}.$

15. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in[-3.5,2.5) \\ 7x-9 & \text{si } x\in(6,20] \end{cases};\ x=-3.5,\ x=-2,\ x=12,\ x=18.$

16. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+2 & \text{si } x\in(15,64] \\ x^2-8 & \text{si } x\in(10,15] \end{cases};\ x=11,\ x=15,\ x=36,\ x=49.$

En cada caso determina si las funciones dadas son iguales.

17. $f(x)=\sqrt{x^2+10x+25},\ Dom\ f=\mathbb{R};\ g(x)=x+5,\ \ Dom\ g=\mathbb{R}.$

18. $f(x)=\frac{x^2-16}{x+4},\ Dom\ f=\mathbb{R}\setminus\{-4\};\ g(x)=x-4,\ \ Dom\ g=\mathbb{R}.$

19. $f(x)=\frac{x+12}{x^2-144},\ Dom\ f=\mathbb{R}\setminus\{-12,12\};\ g(x)=\frac{1}{x-12},\ Dom\ g=\mathbb{R}\setminus\{-12,12\}.$

20. $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9},\ Dom\ f=\mathbb{R};\ g(x)=|x-3|,\ Dom\ g=\mathbb{R}.$

Ejercicios

El dominio natural

¿Para qué valores $x \in \mathbb{R}$ la fórmula $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ proporciona un único número real?

Solución:
Para que la raíz cuadrada sea un número real, el radicando debe ser mayor o igual que cero, entonces debe suceder:

$$x^2-9\geq 0$$
$$x^2\geq 9$$
$$|x|\geq 3,$$

de donde

$$x \geq 3 \quad \text{o} \quad x \leq -3$$
$$x \in [3,\infty) \qquad x \in (-\infty,-3],$$

es decir,

$$x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty).$$

Así, en cada uno de los puntos de $(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$ la fórmula $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ define un único real.

En el caso de las funciones reales de variable real, es frecuente que solo se dé explícitamente su regla de correspondencia mediante una fórmula sin especificar cuál es el dominio de dicha función; en ese caso, se sobreentiende que el dominio a considerar es el conjunto de los reales x para los cuales la fórmula toma un único valor real y. Tal conjunto se denomina el *dominio natural de la función*.



1. Encontrar el dominio natural de la función $f(x)=9x-12$.

   Solución:
   Para cualquier número real x la expresión $9x-12$ es un único número real. Entonces el dominio natural de la función es el conjunto de todos los números reales.

2. Encontrar el dominio natural de la función $f(x)=\dfrac{2x}{5x+7}$.

   Solución:
   Para que el cociente

   $$\frac{2x}{5x+7}$$

   produzca un único número real, necesitamos y basta que el denominador sea diferente de cero, es decir,

   $$5x+7\neq 0$$
   $$x\neq -\frac{7}{5}$$

Pensamiento crítico

¿Son iguales las funciones $f(x)=x+3$ y $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, definidas en su domino natural?

Pensamiento crítico

Si $f(x)=\frac{1}{x^2-a}$ con $a<0$, ¿cuál es el dominio de f?

Entonces el dominio natural de la función es el conjunto de los números reales excepto el $-\frac{7}{5}$, lo cual escribimos como:

$$\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{5}\right\}=\left(-\infty,-\frac{7}{5}\right)\cup\left(-\frac{7}{5},\infty\right)$$

3. Encontrar el dominio natural de la función $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

Solución:

Para que el resultado de dicha raíz cuadrada sea un valor real, es necesario y suficiente que la expresión en el radicando sea mayor o igual que cero. Así, el dominio natural de f es la colección de números reales x tales que:

$$4-x^2\geq 0$$
$$4\geq x^2$$
$$2\geq |x|$$
$$-2\leq x\leq 2$$

En resumen, el dominio natural de la función es el intervalo $[-2,2]$.

Ejemplos

Ejercicios

Encuentra el dominio natural de cada función.

1. $f(x)=3x-10$

2. $g(x)=x^2+2x-5$

3. $h(x)=6x^3-2x^2+19$

4. $h(x)=x^4+20x^2-15$

5. $h(x)=\sqrt{6-8x}$

6. $g(x)=\sqrt{5x+4}$

7. $f(x)=\frac{x^2+5x+9}{x^2-16}$

8. $g(x)=\frac{4x^2+x-20}{x^2+12x+27}$

9. $f(x)=\frac{x^2-2}{x+5}$

10. $g(x)=\frac{x^2+3x}{x-8}$

11. $h(x)=\frac{1}{x^2+5x-6}$

12. $f(x)=\frac{7x^2-18}{x^2-81}$

13. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}$

14. $g(x)=\sqrt{-3x^2-4x+4}$

15. $f(x)=\frac{x+15}{\sqrt{x^2-14x+48}}$

16. $h(x)=\frac{x^4+10x^2-34}{\sqrt{33+8x-x^2}}$

17. $g(x)=\frac{x^2+3x-40}{\sqrt[3]{x^2-144}}$

18. $h(x)=\frac{2x^2-31x+84}{\sqrt[4]{169-x^2}}$

Gráfica de una función

Dibujar la gráfica de la función

x	$f(x)$
−4	5
−2	3
0	1
3	4
5	5

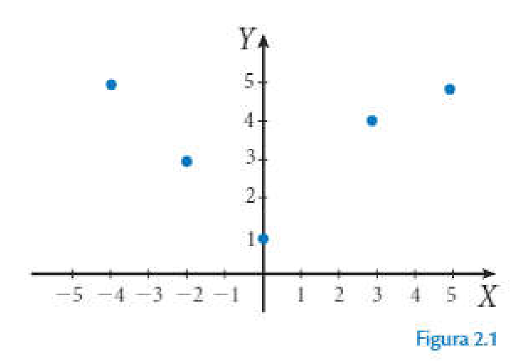


Figura 2.1

Solución:
Localizamos en el plano cartesiano los puntos de la forma $(x, f(x))$ para todos los elementos del dominio.

$$(-4,5), (-2,3), (0,1), (3,4), (5,5),$$

Cualquier colección de puntos en el plano es llamada una gráfica. Entre éstas nos interesan especialmente las llamadas gráficas de funciones.

Consideremos una función real de variable real $f : A \rightarrow B$. El conjunto

$$G = \{(x, f(x)) | \ x \in A\} = \{(x, y) | \ x \in A, \ y = f(x)\}$$

es llamado la *gráfica de la función* f. Observamos que para que un punto (x, y) esté en la gráfica se requieren dos cosas:

a) x es un punto del dominio de f, que en este caso es A.
b) y es el asociado de x, o sea, $y = f(x)$.

En la gráfica de f no puede haber dos puntos distintos (x, y), (x, z) con la misma abscisa x, ya que en este caso habría dos asociados, y y z, al mismo elemento x y esto no es posible porque f es una función.

Cuando localizamos en el plano cartesiano (ver Figura 2.1) los puntos de G obtenemos una colección de puntos que también llamaremos la gráfica de f.

Observación:
Una recta vertical corta la gráfica de una función en un solo punto, o no la corta.
Recordemos que todos los puntos de una recta vertical ℓ tienen la misma abscisa (ver Figura 2.2).

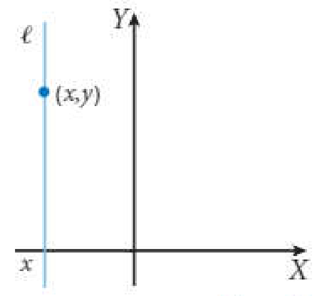


Figura 2.2

Veremos que si una recta vertical ℓ corta la gráfica de una función f, lo hace en un solo punto.

En efecto, si $(x, f(x))$ está en ℓ, entonces todos los puntos de ℓ tienen abscisa x y ya señalamos que en la gráfica de una función no puede haber dos puntos con la misma abscisa. Por lo tanto $(x, f(x))$ es el único punto de la gráfica que está en ℓ (ver Figura 2.3). En otras palabras: *una recta vertical corta a la gráfica de una función en a lo más un punto.*

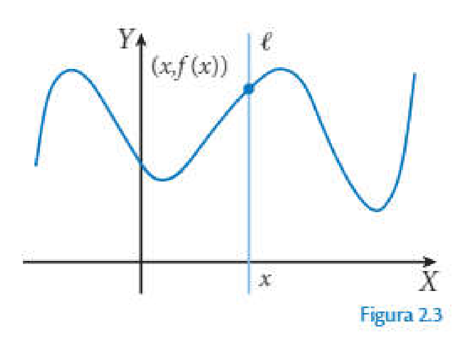


Figura 2.3

Ante una colección de puntos en el plano es en general muy sencillo saber si es o no la gráfica de una función. Sí lo será en el caso de que cada recta vertical ℓ corte a dicha colección en a lo más un punto, en caso contrario, si alguna de ellas lo hace en 2 o más puntos, entonces la colección no es la gráfica de una función. Por ejemplo, una recta horizontal sí es la gráfica de una función y una recta vertical no lo es, ver Figura 2.4.

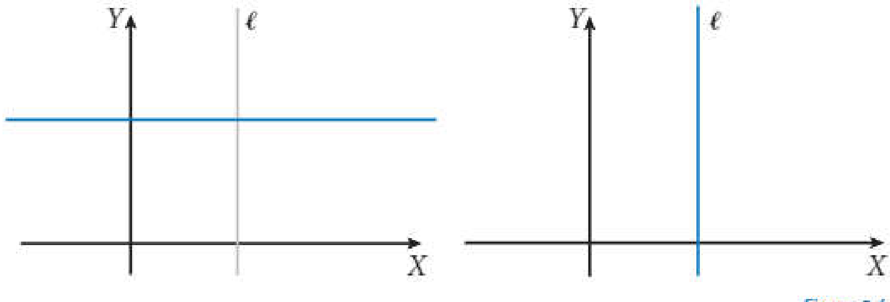


Figura 2.4

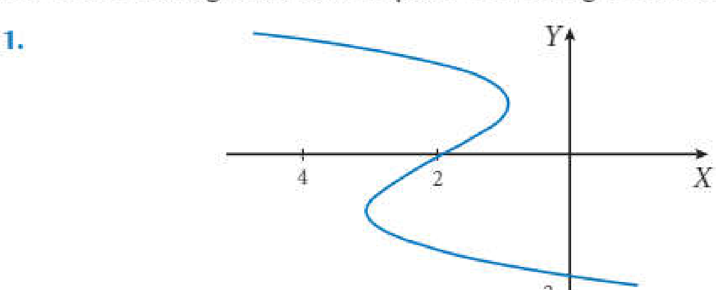
Pensamiento crítico

¿Una recta horizontal puede cortar a la gráfica de una función f en más de un punto?

Ejemplos

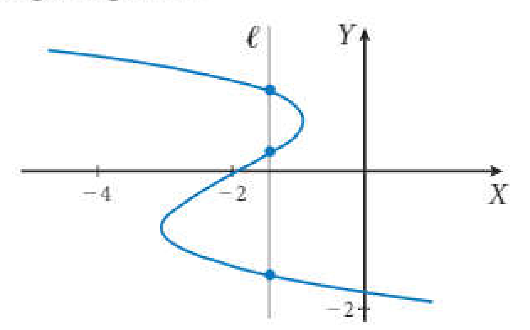
Menciona si las siguientes curvas pertenecen a la gráfica de una función.

1.



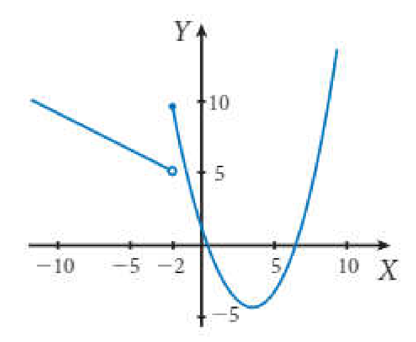
Solución:

Observemos la figura siguiente:

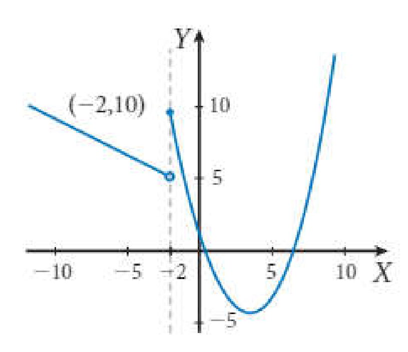


Vemos que no es la gráfica de una función, pues al trazar la recta vertical ℓ, ésta corta a la curva en más de un punto, en este caso, en tres puntos.

2.



Solución:
El único punto donde parece haber problema es donde la curva se rompe, pero al trazar una recta vertical por $x = -2$ del eje X vemos que solo la corta en el punto $(-2, 10)$.

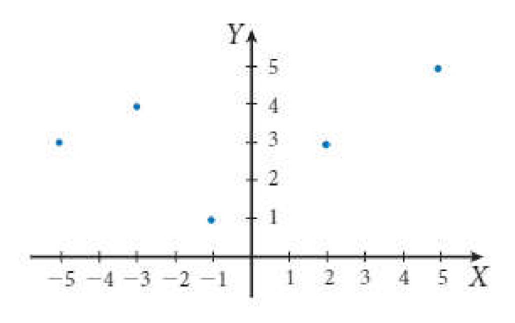


Por tanto, la curva sí es la gráfica de una función.

Observaciones:
- No cualquier curva es la gráfica de una función.
- Si A es el dominio de la función y B es el contradominio, entonces la gráfica es un subconjunto del producto cartesiano
$$A \times B = \{(x, y): x \in A \text{ y } y \in B\}.$$

3. Localizar en el plano cartesiano las parejas siguientes:
$$C = \{(-5,3), (-3,4), (-1,1), (2,3), (5,5)\}$$
y mencionar si esos puntos pertenecen a la gráfica de una función.

Solución:
Los puntos representan la gráfica siguiente:



Ningún par de estos puntos está en una misma recta vertical. Por tanto, al trazar cualquier recta vertical, ésta corta a la colección de puntos en a lo más uno y se sigue que dicha colección sí es la gráfica de una función f; de hecho la tabla siguiente representa a esa función:

x	$f(x)$
−5	3
−3	4
−1	1
2	3
5	5

4. Encontrar las imágenes correspondientes a los valores $x=0$, $x=-4$ y $x=\frac{5}{2}$ para la función:

$$f(x)=x^2-x+1$$

y obtener los puntos de la gráfica que corresponden a tales números.

Solución:

- Si $x=0$ entonces $f(0)=(0)^2-(0)+1=1$.
- Si $x=-4$ entonces $f(-4)=(-4)^2-(-4)+1=21$.
- Si $x=\frac{5}{2}$ entonces $f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)+1=\frac{19}{4}$.

Así, los puntos de la gráfica correspondientes a estos puntos del dominio son $(0,1),(-4,21)$ y $\left(\frac{5}{2},\frac{19}{4}\right)$. Si localizamos estos puntos en el plano cartesiano y muchos otros correspondientes a números reales x, obtenemos una gráfica similar a la curva de la Figura 2.5. Mientras más puntos localicemos mayor será el parecido. La curva dibujada es solo una porción de la gráfica de la función.

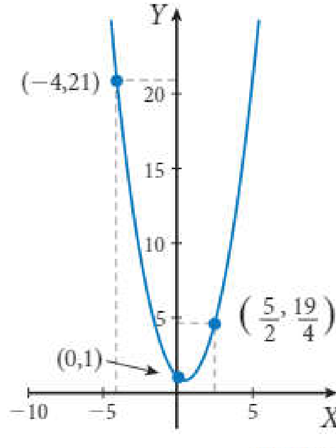


Figura 2.5

5. Consideremos la función combinada

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\in[-4,0] \\ -x+5 & \text{si } x\in(0,5] \end{cases}$$

Encontrar las imágenes correspondientes a los valores $x=-4$, $x=0$, $x=2$ y $x=5$ y obtener los puntos de la gráfica de la Figura 2.6 que corresponden a tales números.

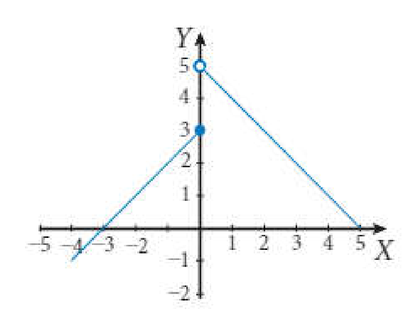


Figura 2.6

En la Figura 2.6, el punto sólido significa que ese punto, cuyas coordenadas son $(0,3)$, pertenece a la gráfica de la función, el punto hueco significa que el punto de coordenadas $(0,5)$ no está en la gráfica de la función.

Solución:
En este caso el dominio es el intervalo $[-4,5]$. Para la porción $[-4,0]$ se usa la fórmula $f(x)=x+3$ y para la porción $(0,5]$ se usa $f(x)=-x+5$. Así,

- $-4\in[-4,0]$ por tanto, usamos la fórmula $f(x)=x+3$:

$$f(-4)=(-4)+3=-1$$

El punto que corresponde a -4 es $A(-4,-1)$.

- $0\in[-4,0]$ por tanto, usamos la fórmula $f(x)=x+3$:

$$f(0)=(0)+3=3$$

El punto que corresponde a 0 es $B(0,3)$.

- $2\in(0,5]$ por tanto, usamos la fórmula $f(x)=-x+5$:

$$f(2)=-(2)+5=3$$

El punto que corresponde a 2 es $C(2,3)$.

- $5\in(0,5]$, por tanto usamos la fórmula $f(x)=-x+5$:

$$f(5)=-(5)+5=0$$

El punto que corresponde a 5 es $D(5,0)$.

Al localizar los puntos obtenemos la Figura 2.7.

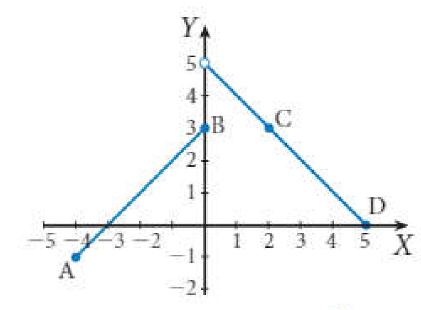


Figura 2.7

Pensamiento crítico

Si una función f cumple con

$f(-x)=f(x)$

$f(-x)=-f(x)$ para todo $x \in Dom\, f$, ¿cuál es la regla de correspondencia de f?

Ejemplos

6. Encontrar $h\left(\frac{x}{x+3}\right)$ si $h(x)=\frac{x-1}{x+5}$.

Solución:

$$h\left(\frac{x}{x+3}\right)=\frac{\left(\frac{x}{x+3}\right)-1}{\left(\frac{x}{x+3}\right)+5}$$

$$=\frac{\frac{x-(x+3)}{x+3}}{\frac{x+5(x+3)}{x+3}}$$

$$=\frac{x-x-3}{x+5x+15}$$

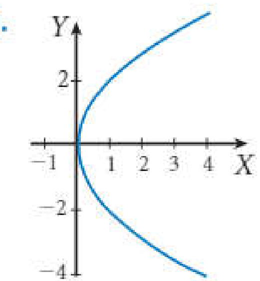
$$=\frac{-3}{6x+15}$$

Por lo tanto, $h\left(\frac{x}{x+3}\right)=\frac{-3}{6x+15}$.

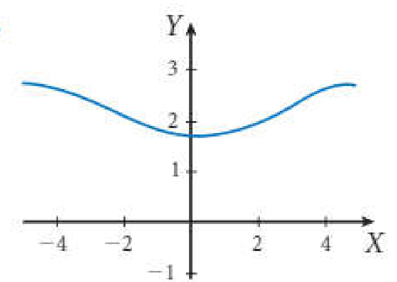
Ejercicios

De las siguientes gráficas menciona cuáles representan una función.

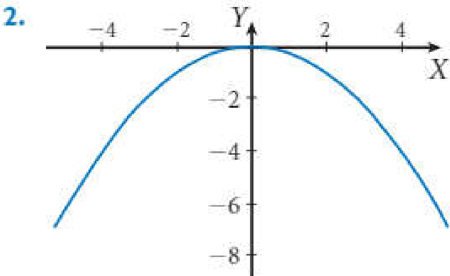
1.



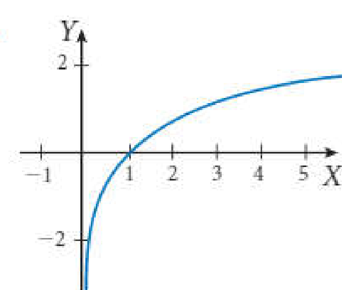
3.



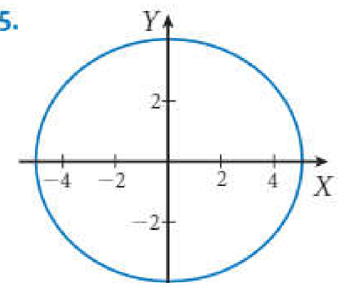
2.



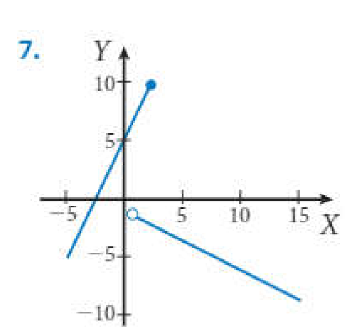
4.



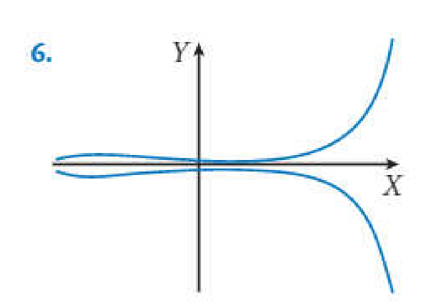
5.



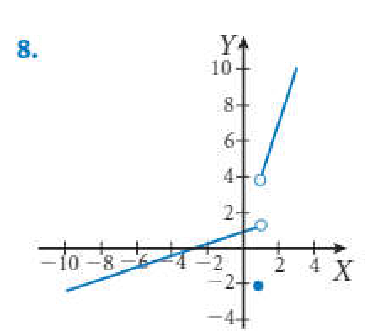
7.



6.



8.



En cada caso evalúa la función dada en el punto indicado.

9. $f(x) = 7x^2 - 2x - 5,\ f(-3)$

10. $g(t) = t^3 - t,\ g(2)$

11. $h(x) = x^2 + 1,\ h(0)$

12. $f(x) = 5x^2 + 10x - 12,\ f(-5)$

13. $f(r) = \sqrt{3r+7},\ f(-2)$

14. $g(x) = \sqrt{8-5x},\ g(1)$

15. $g(t) = \dfrac{1}{t+6},\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)$

16. $h(x) = \dfrac{2x}{4x-9},\ h\left(\dfrac{5}{3}\right)$

17. $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-5},\ h(-6)$

18. $f(t) = \dfrac{(t+5)^3}{3t^2-7t+12},\ f(-3)$

19. $f(x) = 4x^2 - x - 21,\ f(x-1)$

20. $h(x) = 10x^3 + x - 6,\ h(2a)$

21. $f(x) = 9x^2 - 19x + 29,\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

22. $g(x) = \dfrac{(x+5)^2}{x+7},\ g(x+4)$

23. $g(x) = \dfrac{2x^2-11x+25}{x},\ g\left(x^2\right)$

24. $h(x) = 4x^2 + 20x,\ h\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

25. $h(x) = \sqrt{25-x^2},\ h\left(\dfrac{1}{x+3}\right)$

26. $f(x) = \sqrt{7x^2+31},\ f\left(\dfrac{1}{x-4}\right)$

27. $g(x) = \dfrac{x^2-9x+36}{\sqrt{5-x^2}},\ g\left(x^2+1\right)$

28. $h(x) = 16x^4 + 8x^2 + 48,\ h\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

29. $f(x) = \dfrac{1}{x+8},\ f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

30. $g(x) = \dfrac{x}{x-9},\ g\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$

En cada caso evalúa la función dada en los puntos indicados.

31. $f(x)=\begin{cases} x-8 & \text{si } x\in[-10,-4] \\ 3x-1 & \text{si } x\in(-4,20) \end{cases}$, $f(-8)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(10)$, $f(-7.5)$.

32. $g(x)=\begin{cases} 9x+15 & \text{si } x<-2 \\ \dfrac{x}{4}+20 & \text{si } x\geq -2 \end{cases}$, $g(-10)$, $g(-5)$, $g(-2)$, $g(4)$, $g(5)$.

33. $h(x)=\begin{cases} x^2-16 & \text{si } x\leq 0 \\ 14 & \text{si } x>0 \end{cases}$, $h(-4)$, $h(1)$, $h\left(\dfrac{5}{3}\right)$, $h(-6)$, $h(0)$.

34. $f(x)=\begin{cases} x+12 & \text{si } x\in(-\infty,-8] \\ x^2+x-9 & \text{si } x\in(-8,6) \\ 5x+4 & \text{si } x\in[6,\infty) \end{cases}$, $f(-32)$, $f(-8)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f\left(\dfrac{33}{4}\right)$.

35. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+3} & \text{si } x\in[-25,-6] \\ 2x^2-10x & \text{si } x\in[-3,5] \\ \sqrt{x^2-81} & \text{si } x\in[9,36] \end{cases}$, $f(-12)$, $f(-2)$, $f(4)$, $f(9)$, $f(6)$.

Ejercicios

Casos especiales

En esta sección analizaremos algunas funciones reales de variable real que aparecen con frecuencia.

- Las *funciones constantes* son aquellas cuyas reglas de correspondencia son de la forma

$$f(x)=c,$$

donde c es una constante. Su dominio natural es el conjunto de los números reales. Su gráfica (Figura 2.8) es la recta horizontal que pasa por el punto $(0,c)$ del eje Y.

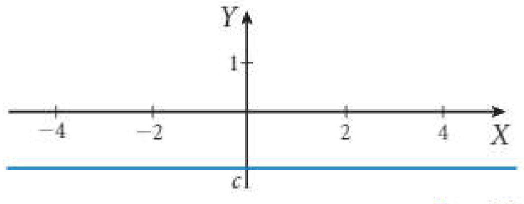


Figura 2.8

Ejemplo

El costo del pasaje del metro de la ciudad de México durante los años 2000, 2001, 2002, 2003 y 2004 fue de $2. La gráfica (Figura 2.9) del costo del pasaje es:

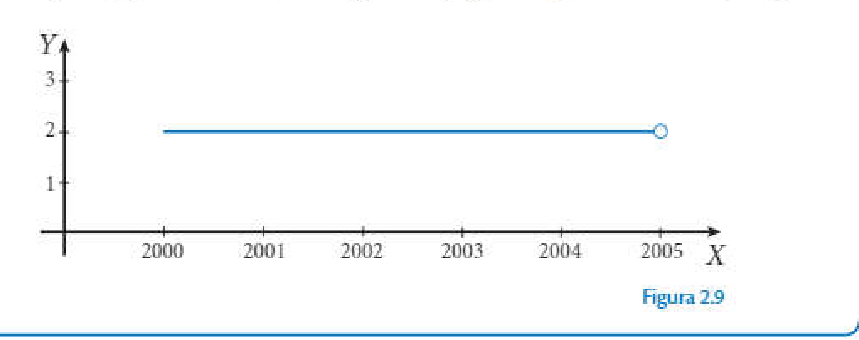
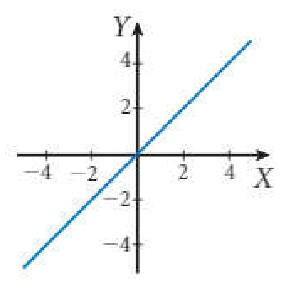


Figura 2.9

- La *función identidad* está dada por

$$f(x) = x$$

Su dominio natural es el conjunto de los números reales. Su gráfica es la siguiente recta:



- Las *funciones lineales* son de la forma:

$$f(x) = ax + b$$

Su dominio natural es el conjunto de los números reales. Su gráfica (Figura 2.10) es una recta no vertical que pasa por el punto $(0, b)$ del eje Y y su inclinación depende del valor a.

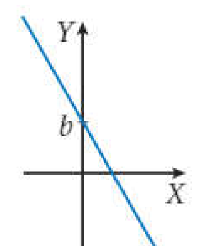


Figura 2.10

TIP

Las funciones lineales son de la forma $f(x) = ax + b$ y $Dom\, f = \mathbb{R}$.



¿Es la función identidad una función lineal?

TIP

El volumen de un cilindro circular con altura h y radio de la base r es $V = \pi r^2 h$.

Ejemplos

1. Para conocer el volumen de agua que tiene un tinaco con forma de cilindro circular recto, con un radio de 50 centímetros, basta con medir la altura a la que llega el agua.

$$V(h) = \pi(50)^2 h$$

2. Para convertir de grados centígrados a grados Fahrenheit utilizamos la fórmula:

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

3. Un fabricante de mochilas tiene gastos fijos mensuales de \$2 580. El costo directo de fabricar cada mochila es de \$40. Para calcular el costo de producir x mochilas en un mes, usamos la función

$$C(x) = 2\,580 + 40x$$

4. Las longitudes de los huesos están relacionadas con la estatura y el sexo de la persona. En particular tenemos:

	Mujer	Hombre
Fémur	$F(e) = \frac{e - 72.85}{1.95}$	$G(e) = \frac{e - 81.31}{1.88}$

donde e es la estatura de la persona medida en centímetros.

5. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-2,5)$ y que tiene pendiente $m = \frac{1}{3}$.

Solución:

Usamos la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, es decir,

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

donde $P(x_0, y_0)$ y m es la pendiente de la recta. Así; la gráfica es: Figura 2.11.

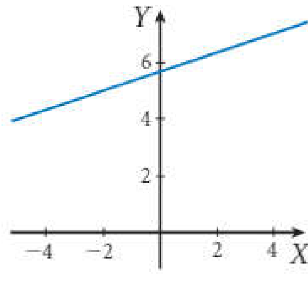


Figura 2.11

$$y-5=\frac{1}{3}(x-(-2))$$
$$y-5=\frac{1}{3}(x+2)$$
$$y=\frac{1}{3}(x+2)+5$$
$$y=\frac{1}{3}x+\frac{17}{3}$$

Ejemplos

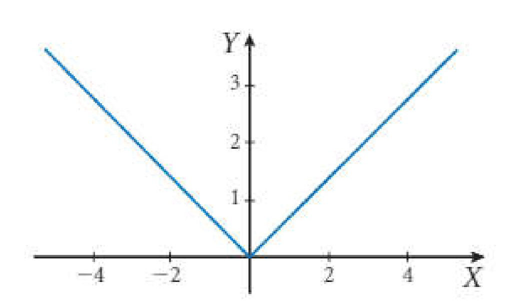
La recta es la gráfica de la siguiente función lineal:

$$f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{17}{3}.$$

- La *función valor absoluto* está dada por $f(x)=|x|$.
  Su dominio natural es el conjunto de los números reales. Por la manera en que está definido el valor absoluto tenemos que se trata de una función combinada, con regla de correspondencia:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Su gráfica es:



TIP
Observamos que $|x|=\sqrt{x^2}$ para todo x. En un principio se usó $\sqrt{x^2}$ para referirse a la función que conocemos como valor absoluto y que denotamos con las barras $|\cdot|$.

Ejemplo

Si se lanza un proyectil hacia arriba con una velocidad inicial de 24 metros por segundo, su velocidad $v(t)$ en el instante t está dada por

$$v(t)=24-9.8t$$

Encontraremos los valores de t para los cuales $v(t)<0$:

$$24 - 9.8t < 0$$
$$24 < 9.8t$$
$$\frac{24}{9.8} < t$$

Así, la velocidad del proyectil es negativa si $t > \frac{24}{9.8}$; o sea, para estos valores de t el proyectil está cayendo.

La rapidez $r(t)$ se define como el valor absoluto de la velocidad. En este caso:

$$r(t) = |24 - 9.8t|.$$

Ejemplo

- Las *funciones escalonadas* están definidas en un intervalo dividido en subintervalos, en cada uno de los cuales la función es constante.

Ejemplos

1. La *función mayor entero* está dada por

$$f(x) = [x] = \text{mayor entero que es menor o igual que } x.$$

Es decir, si x es un número entero, entonces $[x] = x$. Si x no es un número entero, entonces se encuentra entre dos números enteros consecutivos (Figura 2.12), digamos n y $n+1$, en cuyo caso $[x] = n$.

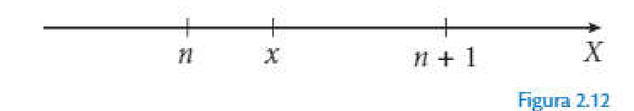


Figura 2.12

Su dominio natural es el conjunto de los números reales.
Calculamos algunos valores de la función:

- $[0]$. Como $0 \leq 0 < 1$, entonces $[0] = 0$.
- $[-2]$. Como $-2 \leq -2 < -1$, entonces $[-2] = -2$.
- $[1.75]$. Como $1 \leq 1.75 < 2$, entonces $[1.75] = 1$.
- $[-3.22]$. Como $-4 \leq -3.22 < -3$, entonces $[-3.22] = -4$.
- $[6]$. Como $6 \leq 6 < 7$, entonces $[6] = 6$.
- $\left[\frac{5}{3}\right]$. Como $1 \leq \frac{5}{3} < 2$, entonces $\left[\frac{5}{3}\right] = 1$.

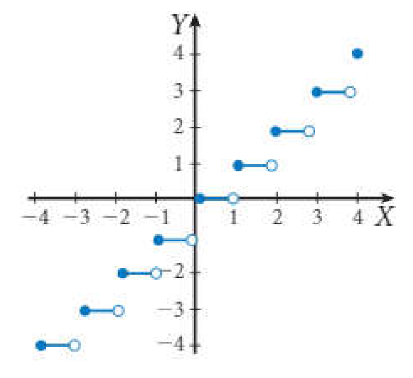
TIP

Si la gráfica de una función tiene un pico, como la función valor absoluto, entonces ahí hay un cambio súbito de dirección cuando se recorre la gráfica.

La regla de correspondencia de la función en el intervalo $[-4,4]$ es

$$f(x)=\begin{cases} -4 & \text{si } x\in[-4,-3) \\ -3 & \text{si } x\in[-3,-2) \\ -2 & \text{si } x\in[-2,-1) \\ -1 & \text{si } x\in[-1,0) \\ 0 & \text{si } x\in[0,1) \\ 1 & \text{si } x\in[1,2) \\ 2 & \text{si } x\in[2,3) \\ 3 & \text{si } x\in[3,4) \\ 4 & \text{si } x=4 \end{cases}$$

Así, su grafica es:





¿Es la función $f(x) = [x]$ una función constante en $\mathbb{R}$?

2. La tarifa de cobro de un estacionamiento es de \$6 las primeras dos horas más \$2 por cada hora o fracción adicional.

Así la regla de correspondencia es

$$f(x)=\begin{cases} 6 & \text{si } x\in(0,2] \\ 6+2 & \text{si } x\in(2,3] \\ 6+4 & \text{si } x\in(3,4] \\ 6+6 & \text{si } x\in(4,5] \\ 6+8 & \text{si } x\in(5,6] \\ 6+10 & \text{si } x\in(6,7] \\ 6+12 & \text{si } x\in(7,8] \end{cases}$$

Así, su gráfica es:

3. Dibujar la gráfica de $f(x)=\left[\frac{x}{3}\right]$ en el intervalo $[-9,9]$.

Solución:

Como la función que debemos dibujar es un mayor entero, entonces utilizando la definición tenemos que:

$$\left[\frac{x}{3}\right]=n \quad \text{si} \quad n\leq\frac{x}{3}<n+1$$

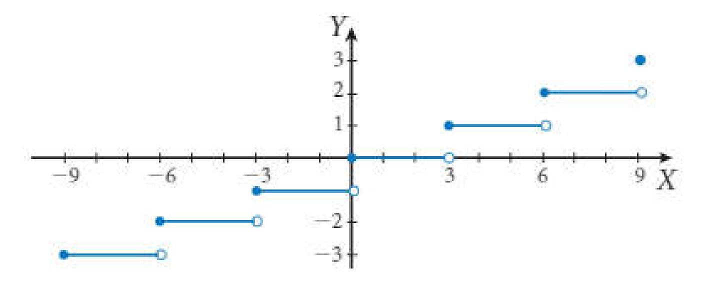
donde n es un número entero. Esto es equivalente a decir que:

$$\left[\frac{x}{3}\right]=n \quad \text{si} \quad 3n\leq x<3(n+1)$$

De donde

$$f(x)=\left[\frac{x}{3}\right]=\begin{cases}-3 & \text{si } -9\leq x<-6\\ -2 & \text{si } -6\leq x<-3\\ -1 & \text{si } -3\leq x<0\\ 0 & \text{si } 0\leq x<3\\ 1 & \text{si } 3\leq x<6\\ 2 & \text{si } 6\leq x<9\\ 3 & \text{si } x=9\end{cases}$$

Así, su gráfica es:



Ejemplos

- La función

$$f(x)=x^2$$

Su dominio natural es el conjunto de los números reales. Su gráfica es la parábola de la Figura 2.13.

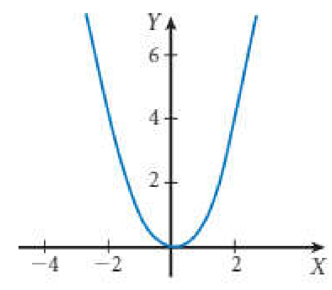


Figura 2.13

Ejemplos

1. La distancia recorrida por un objeto en caída libre en un tiempo t segundos es

$$d(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad, es decir,

$$d(t)=\frac{1}{2}(9.8)t^2=4.9t^2$$

2. Si un automóvil se desplaza a una velocidad v, y frena bruscamente, la distancia que recorre hasta detenerse es:

$$d(v)=kv^2.$$

donde k es una constante que depende del peso del automóvil, el tipo de llantas y las condiciones del piso.

- La función

$$f(x)=\frac{1}{x}.$$

Su dominio natural es el conjunto de los números reales excepto el cero, es decir, $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Su gráfica es la hipérbola de la Figura 2.14.

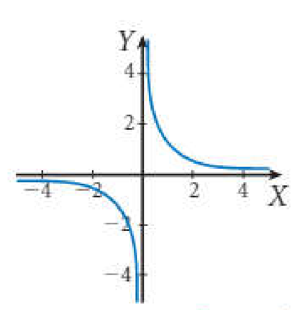


Figura 2.14

Ejemplos

1. En el ejemplo 3 de la página 44 vimos que un fabricante de mochilas tiene gastos fijos mensuales de \$2 580. El costo directo de fabricar cada mochila es de \$40. La función $C(x)=2580+40x$ nos permite calcular el costo de producir x mochilas al mes. La función

$$f(x)=\frac{2580+40x}{x}$$
$$=\frac{2580}{x}+40$$

da el costo de fabricación por unidad o costo promedio.

2. Un automóvil debe recorrer una distancia de 320 kilómetros. La velocidad a la que debe viajar para efectuar el viaje en t horas es:

$$v(t)=\frac{320}{t}$$

3. En un circuito eléctrico, si el voltaje tiene valor constante k, entonces la intensidad de la corriente está dada por:

$$I(R)=\frac{k}{R}$$

- La función

$$f(x)=\sqrt{x}$$

Su dominio natural es el conjunto de los números reales no negativos, es decir, $[0,\infty)$. Su gráfica es la rama de parábola, (ver Figura 2.15).

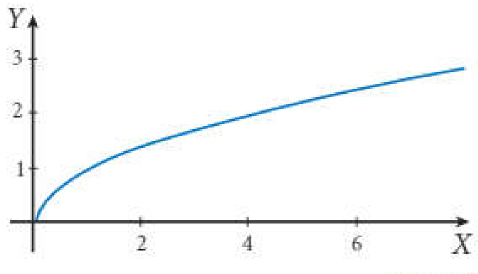


Figura 2.15

Ejemplos

1. El periodo de un péndulo es el tiempo que tarda en hacer una oscilación completa y está dado como el producto de una constante k por la raíz cuadrada de su longitud, es decir:

$$P(x)=k\sqrt{x}.$$



Ejemplos

2. La hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados tienen como longitudes dos enteros consecutivos es

$$h(n)=\sqrt{n^2+(n+1)^2}.$$

su dominio es el conjunto de números naturales.



Si $f(x)=x^3$ y $g(x)=f(x-3)$, ¿cómo podemos obtener la gráfica g a partir de la gráfica de f?

Resumimos parte de lo visto en esta sección en la siguiente tabla:

$f(x)=c$	$Dom\ f=\mathbb{R}$	$f(x)=x$	$Dom\ f=\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b$	$Dom\ f=\mathbb{R}$	$f(x)=\|x\|$	$Dom\ f=\mathbb{R}$
$f(x)=[x]$	$Dom\ f=\mathbb{R}$	$f(x)=x^2$	$Dom\ f=\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$Dom\ f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f(x)=\sqrt{x}$	$Dom\ f=[0,\infty)$

Funciones algebraicas

- Una *función polinomial* es de la forma:

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

donde $a_i\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$ y $n\in\mathbb{N}$.



1. $f(x)=2x^4+6x^3-\dfrac{2}{3}x^2+\pi x+1.$

2. $f(x)=-x^5+\sqrt{2}.$

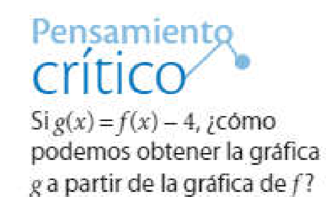
- Una *función racional* es de la forma:

$$r(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

donde f y g son funciones polinomiales.

- *Raíces enésimas.* Si a es un número real y n es un número natural, decimos que un real b es una raíz enésima de a si:

$$b^n=a$$



Si $g(x)=f(x)-4$, ¿cómo podemos obtener la gráfica g a partir de la gráfica de f?

A continuación analizamos esta igualdad según si n es par o impar.

- Supongamos que n es par. Si $a \geq 0$, entonces a tiene dos raíces enésimas, por ejemplo, -2 y 2 son raíces cuartas de 16. Y si $a < 0$, entonces a no tiene raíces enésimas, por ejemplo, si $a = -9$, no hay ningún número real cuyo cuadrado sea -9.
  Así, si n es par, definimos la función **raíz enésima**

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

  como la raíz enésima **no negativa** de x. Su dominio es $[0, \infty)$ (Figura 2.16).

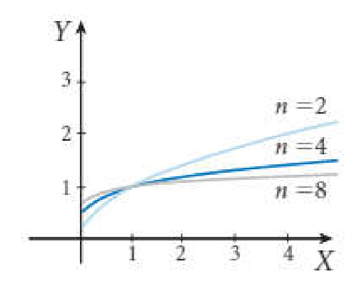


Figura 2.16

- Supongamos que n es impar. Para cualquier número a hay una única raíz enésima. Por ejemplo, 2 es la única raíz cúbica de 8, y -2 es la única raíz cúbica de -8.
  En este caso, la función raíz enésima:

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

  está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ (Figura 2.17).

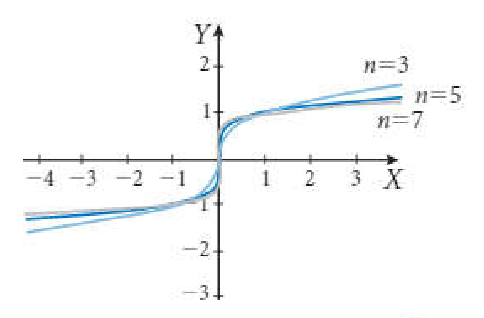


Figura 2.17

- *Potencias con exponente racional.*

Si $r = \dfrac{m}{n}$ es un número racional simplificado (m y n no tienen factores comunes), definimos:

$$f(x) = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Cuando n es par, su dominio es $[0,\infty)$, y cuando n es impar, su dominio es todo $\mathbb{R}$, (Figura 2.18).
Por ejemplo:

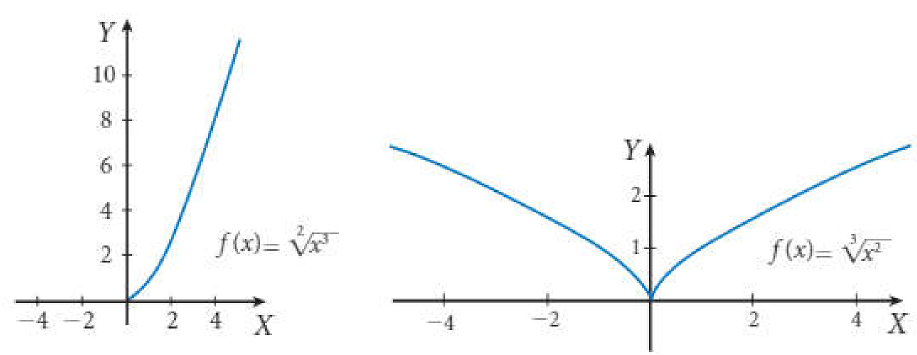


Figura 2.18

Ejemplos

1. La potencia eléctrica medida en watts en un circuito con dos resistencias en serie, conectadas a una fuente de 25 volts, donde una de las resistencias es de 10 ohms, está dada por la ecuación:

$$P(R)=\frac{(25)^2 10R}{(10+R)^2}.$$

2. La media armónica de dos números x y $x+1$ está dada por la función:

$$f(x)=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}},$$

Esta función coincide con la función racional

$$R(x)=\frac{2x^2+2x}{2x+1}.$$

para $x\neq 0,-1,-\frac{1}{2}$.

3. La iluminación que proporciona una fuente de luz es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde ella. Un objeto situado a x metros de la fuente recibirá una iluminación de;

$$f(x)=\frac{I_0}{x^2}.$$

donde I_0 es la iluminación a la salida de la fuente.

4. La velocidad del sonido v en el aire depende de la temperatura y está dada por la función

$$v(T)=20.04\sqrt{T+273},$$

donde $v(T)$ se mide en m y T en grados centígrados.

5. Según la tercera ley de Kepler, el cuadrado del periodo p de un planeta (tiempo que tarda en dar la vuelta al Sol) es directamente proporcional al cubo de la distancia promedio r del planeta al Sol. Si llamamos k a la constante de proporcionalidad tenemos:

$$p^2=kr^3$$

Si queremos expresar a r como función de p hacemos el siguiente despeje;

$$r(p)=\sqrt[3]{\frac{1}{k}p^2}.$$

Ejemplos

Las funciones polinomiales, cocientes de polinomios, raíces de polinomios o cualquier combinación de las anteriores usando los símbolos $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt[n]{\ }$. es llamada *función algebraica*.

Funciones trascendentes

A continuación presentamos algunas familias de funciones trascendentes.

- *Funciones trigonométricas*:

seno	coseno	tangente	cotangente	secante	cosecante
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$

Para ángulos menores que un ángulo recto, las funciones seno y coseno se definen a partir de un triángulo rectángulo (Figura 2.19), como en los cursos de trigonometría.

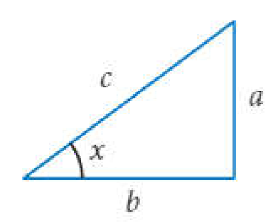
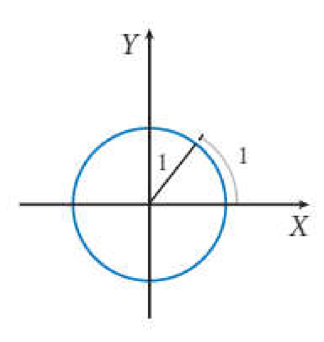


Figura 2.19

$$\operatorname{sen} x=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{a}{c} \qquad \cos x=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{b}{c}$$

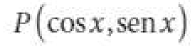


Hay dos maneras usuales de medir los ángulos: en grados y en radianes. En cálculo se utilizan los radianes, ya que de esta manera se facilitan ciertas tareas propias del cálculo.

Un *radián* es la medida de un ángulo con vértice en el centro del círculo de radio 1 que subtiende un arco de longitud 1, (ver Figura que se encuentra a la derecha). Para relacionar esta medida con la medida en grados, observamos que como el perímetro del círculo unitario mide 2π, entonces un ángulo que da una vuelta completa mide 2π radianes. Así que 360° corresponden a 2π radianes y podemos convertir grados a radianes y viceversa utilizando una regla de tres. Un radián equivale a;

$$1 \text{ radián} = \frac{360}{2\pi} \text{ grados.} \quad \text{Por lo que} \quad 1 \text{ radián} \simeq 57°.$$

Para definir el seno y el coseno de ángulos x mayores de $\frac{\pi}{2}$ (90°) nos movemos una distancia x sobre el círculo unitario a partir del punto $Q(1,0)$ y en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj (Figura 2.20). El punto P obtenido tiene coordenadas:



$$P(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

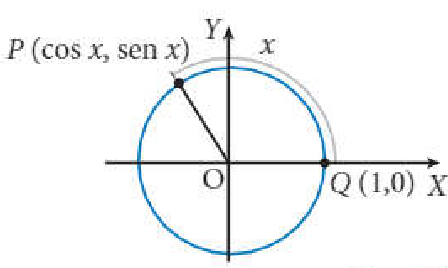


Figura 2.20

El ángulo POQ mide x radianes.

Observa que esta definición coincide con la definición a partir del triángulo rectángulo para ángulos agudos x, ya que la hipotenusa del triángulo formado mide 1 (Figura 2.21).

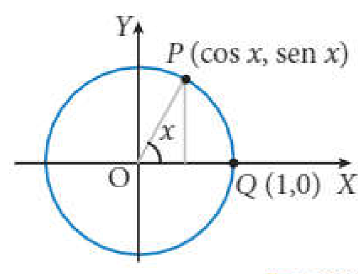


Figura 2.21

Para $x < 0$, nos movemos una distancia $|x|$ sobre el círculo unitario a partir del punto $Q(1,0)$ pero girando en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj (ver Figura 2.22).

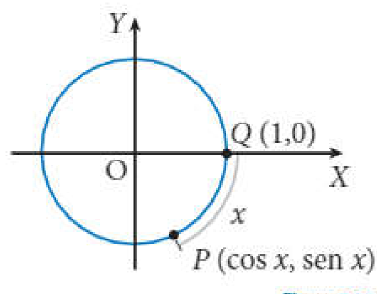


Figura 2.22

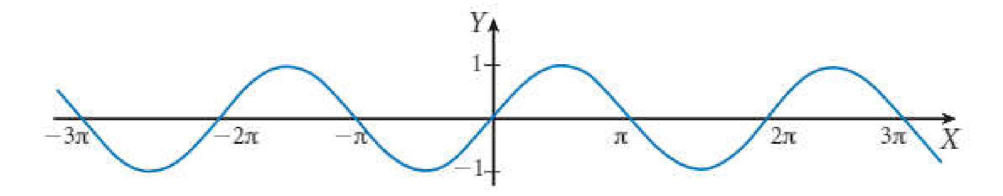
Observa que como el círculo unitario tiene perímetro igual a 2π, entonces un segmento de longitud x y uno de longitud $x+2\pi$ terminan en el mismo punto P luego de enrollarse sobre el círculo, esto significa que:

$$\cos(x+2\pi)=\cos(x)$$
$$\operatorname{sen}(x+2\pi)=\operatorname{sen}(x)$$

- El dominio de la función seno es el conjunto de los números reales y su imagen es $[-1,1]$, es decir:

$$\operatorname{sen}: \mathbb{R}\to[-1,1]$$

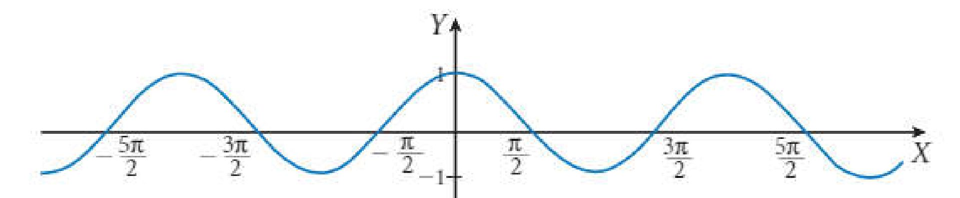
  y su gráfica es:



- El dominio de la función coseno es el conjunto de los números reales y su imagen es $[-1,1]$, es decir:

$$\cos: \mathbb{R}\to[-1,1]$$

  y su gráfica es:



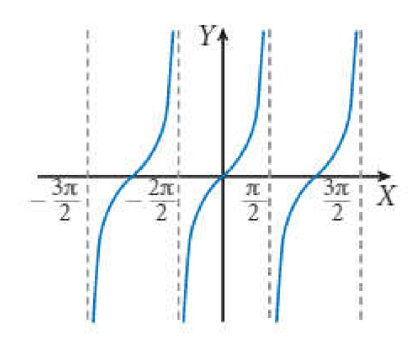
- La *función tangente* se define como:

$$\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

su dominio es el conjunto $\mathbb{R}\setminus\left\{\cdots,-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\cdots\right\}$, ya que en los números $\left\{\cdots,-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\cdots\right\}$, el coseno vale cero, así:

$$\tan:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}.$$

Su gráfica es:



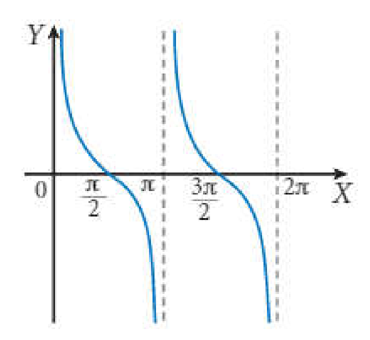
- La *función cotangente* se define como:

$$\cot x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

su dominio es el conjunto $\mathbb{R}\setminus\{\cdots,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,\cdots\}$, ya que en los números $\{\cdots,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,\cdots\}$ el seno vale cero, así:

$$\cot:\mathbb{R}\setminus\{n\pi\ :\ n\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}.$$

Su gráfica es:



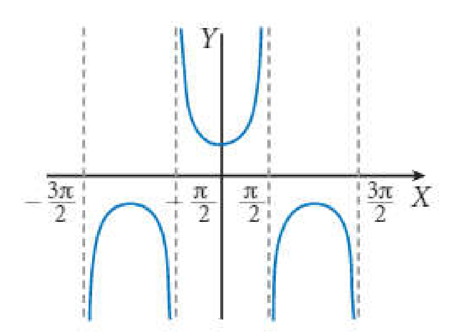
- La *función secante* se define como:

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}$$

Como en el caso de la tangente, los números donde el coseno vale cero no están en su dominio, así

$$\sec : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}.$$

Su gráfica es:



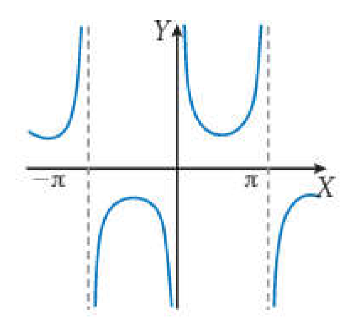
- La *función cosecante* se define como:

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Como en el caso de la cotangente, los números donde el seno vale cero no están en su dominio, así

$$\csc : \mathbb{R} \setminus \{ n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}.$$

Su gráfica es:



Ejemplos

1. El movimiento vertical de un objeto de masa $m = 0.5$ kg que cuelga de un resorte con elasticidad $k = 100$ N/m está dado por:

$$f(t) = \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t = \operatorname{sen} \sqrt{200} t.$$

donde t es el tiempo. O sea, esta función nos da el desplazamiento del objeto hacia abajo (si $f(t) > 0$) o hacia arriba (si $f(t) < 0$) a partir de la posición del extremo del resorte antes de colgarle el objeto.

Ejemplos

2. La fórmula que describe la onda de un sonido sencillo es:

$$f(t)=0.003\,\mathrm{sen}\,2\pi(440)t.$$

donde 440 es el valor de la frecuencia por segundo con la que oscila un diapasón y 0.003 es la amplitud del movimiento de una molécula de aire.

Relaciones trigonométricas

Recordamos algunas de las relaciones trigonométricas más usadas y que emplearemos más adelante, en particular para calcular integrales.

En lo que sigue α y β son dos números reales para los que las funciones correspondientes están definidas.

Fórmulas para la suma

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta)=\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Fórmulas para la diferencia

$$\mathrm{sen}(\alpha-\beta)=\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Identidades pitagóricas

$$\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$$

Fórmulas del doble de un ángulo

$$\mathrm{sen}\,2\theta=2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\theta=1-2\,\mathrm{sen}^2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Fórmulas de la mitad de un ángulo

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades suma-producto

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Identidades producto-suma

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

- *Funciones trigonométricas inversas*:
  Éstas se verán más adelante. Aquí solo damos sus nombres y cómo se denotan.

arco seno	arco coseno	arco tangente
arcsen x	arccos x	arctan x

y

arco cotangente	arco secante	arco cosecante
arccot x	arcsec x	arccsc x

TIP

La potencia de hidrógeno (pH) es la medida de la acidez o alcalinidad de una solución. La solución es ácida si $0 \le pH < 7$, y es alcalina si $7 < pH \le 14$. El agua pura tiene un $pH = 7$, el pH del jugo de limón es 2, el de la leche es 6.5 y el de la sangre varía entre 7.35 y 7.45

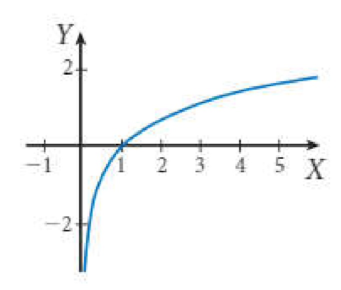
- *Funciones logarítmicas*

logaritmo natural	logaritmo base b
$\ln x$	$\log_b x$

El dominio de la función *logaritmo natural* o logaritmo base e es $(0,\infty)$, es decir:

$$\ln : (0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

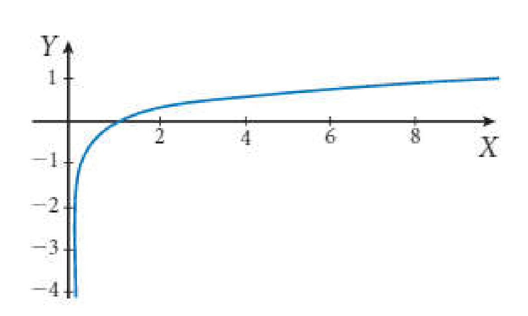
Su gráfica es:



Como otro ejemplo de $\log_b x$, veamos el caso $b = 10$:
El dominio de la función logaritmo base 10 es $(0,\infty)$, es decir:

$$\ln_{10} : (0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Su gráfica es:



TIP

El decibelio, denotado como dB, es un submúltiplo del belio. El belio recibió este nombre en honor de Alejandro Graham Bell, científico escocés.
Un belio equivale a 10 decibelios y representa un aumento de potencia de 10 veces sobre la magnitud de referencia. Cero belios es el valor de la magnitud de referencia. Así, dos belios representan un aumento de cien veces en la potencia, 3 belios equivalen a un aumento de mil veces y así sucesivamente.

Ejemplos

1. La acidez de una solución, conocida como el pH, está dada por:

$$pH = -\log_{10}\left[H^+\right],$$

donde $\left[H^+\right]$ es la concentración de iones de hidrógeno H^+. El pH varía entre 0 y 14.

Ejemplos

2. El nivel de intensidad de un sonido medido en decibeles está dado por:

$$f(I)=10\log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right),$$

donde I es la intensidad del sonido. La constante 10^{-12} es la intensidad del sonido más débil que puede percibir el oído humano.

3. Para medir la intensidad de un movimiento sísmico se utiliza la escala Richter que se define como:

$$R(A)=\log_{10}\left(\frac{A}{10^{-3}}\right),$$

donde A es la amplitud de la mayor onda sísmica del terremoto y 10^{-3} mm es la lectura sismográfica de un terremoto de nivel cero a una distancia de 100 kilómetros del epicentro.

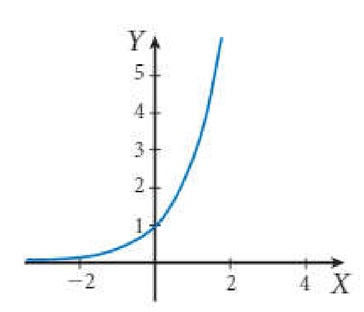
- *Funciones exponenciales*

exponencial base *e*	**exponencial base *b***
e^x	b^x

- La *función exponencial* está definida en $\mathbb{R}$ y su imagen es $(0,\infty)$, es decir:

$$e^x: \mathbb{R}\rightarrow(0,\infty)$$

Su gráfica es:



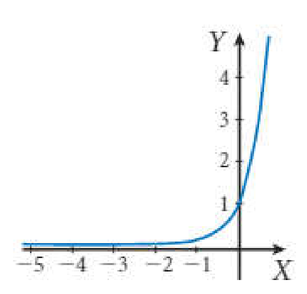
El dominio de la función exponencial base b es $\mathbb{R}$ y su imagen es $(0,\infty)$, es decir:

$$b^x: \mathbb{R}\rightarrow(0,\infty).$$

TIP

Charles Richter, Investigador del Instituto de Tecnología de California, en colaboración con el sismólogo alemán Beno Gutenberg, definió en el año 1935 la Escala Sismológica de Richter o Escala de Magnitud Local. Ésta es una escala logarítmica mediante la cual se cuantifica el efecto de un terremoto. Para establecer la escala, Richter escogió como referencia un temblor en el cual la aguja de un sismómetro Wood-Anderson, localizado a 100 km del epicentro, se desplazaba $1\ \mu m = 10^{-3}$ mm. Este último es denominado terremoto de nivel cero.

Como ejemplo dibujamos la gráfica en el caso 10^x:



Cualquier función de uno de los cuatro tipos anteriores es una función trascendente.

TIP

Una función es algebraica si es suma, producto, cociente o raíz de polinomios con coeficientes enteros. Una función que no es algebraica es llamada trascendente.

Ejemplos

1. Las sustancias radioactivas se desintegran y por lo tanto la cantidad de un material radioactivo disminuye con el tiempo. La cantidad de material $C(t)$ presente al instante t está dada por la fórmula:

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

donde $k > 0$ es una constante, que depende de la sustancia de que se trate, y C_o es la cantidad al instante $t = 0$.

2. La gráfica de la ecuación:

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

es la curva llamada *catenaria* que describe la forma de un cable colgante. Por ejemplo, un cable de luz entre dos postes describe una catenaria.

Ejercicios

Usando los ejemplos de esta sección contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Qué volumen de agua tiene un tinaco cilíndrico con un radio de 50 centímetros, si el agua alcanza una altura máxima de 70 centímetros?
2. ¿Qué temperatura en grados Fahrenheit tiene una persona si el termómetro registra 39.5 °C?
3. ¿Cuál es la medida del fémur de un hombre que mide 1.81 metros de estatura?
4. En el ejemplo 2 de la página 47, ¿cuánto debe pagar una persona si su coche ha estado estacionado 3 horas con 20 minutos?
5. ¿Cuál es el periodo de un péndulo de longitud 0.49 metros si la constante $k = 2$?

TIP

La Figura 2.23 representa la gráfica de e^x va por encima de la de x y ésta va por encima de la de $\log x$.

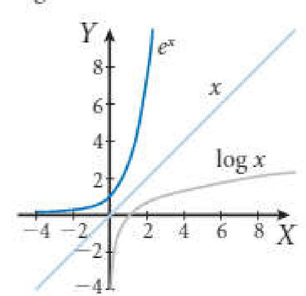


Figura 2.23

6. ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados tienen como longitudes dos enteros consecutivos si el menor de ellos mide 7 unidades?
7. ¿Cuál es la velocidad del sonido en el aire cuando la temperatura es de $22\ ^{\circ}C$?
8. ¿Cuál es la intensidad de un temblor en la escala Richter si la amplitud de la mayor onda sísmica es 10^5?

Para cada una de las funciones dadas, encuentra los valores que se piden.

9. $f(x)=9x+1$; $f(-5)$, $f(0)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(10)$, $f(a)$, $f(-x)$, $f\left(x^2\right)$

10. $h(x)=-x+8$; $h(3)$, $h(-1)$, $h\left(\frac{3}{4}\right)$, $h(1.5)$, $h(2x)$, $h\left(\sqrt{x}\right)$, $h(x+3)$

11. $g(x)=\sqrt{x-6}$; $g(9)$, $g(15)$, $g\left(\frac{29}{2}\right)$, $g\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x+5)$, $g\left(\sqrt{x+5}\right)$, $g(x-6)$

12. $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{-4x^2-4}$; $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(-\frac{1}{4}\right)$, $f(8)$, $f(z)$, $f(-2x)$, $f(x+5)$

13. $g(x)=\ln(x-1)$; $g(2)$, $g(x+1)$, $g(e+2)$, $g\left(\frac{2}{x}\right)$, $g(x+3)$, $g\left(\sqrt{x}\right)$, $g(3w)$

14. $h(x)=e^{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$; $h(\pi)$, $h(0)$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $h\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $h\left(\frac{x}{2}\right)$, $h(\cos x)$, $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

15. $f(x)=\cos\sqrt{x^2-6x}$; $f(-2)$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(b)$, $f(-x)$, $f(6a)$, $f\left(x^2+6x\right)$

16. $g(x)=\dfrac{x^4-x^2+5}{\sqrt{3x^2+2}}$; $g(-1)$, $g(x+a)$, $g\left(\frac{1}{3}\right)$, $g\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x-6)$, $g\left(\sqrt{x}\right)$

Dibuja en cada caso la gráfica de la función.

17. $f(x)=x-3$ si $x\in[-2,2]$
18. $f(x)=-x-1$ si $x\in[-2,2]$
19. $f(x)=\frac{1}{2}x$ si $x\in[-2,2]$
20. $f(x)=2x$ si $x\in[-2,2]$
21. $f(x)=|3x|$ si $x\in[-5,5]$
22. $f(x)=|x-4|$ si $x\in[-5,5]$
23. $f(x)=\sqrt{4x}$
24. $f(x)=[x]$ si $x\in[-4,4]$
25. $f(x)=|2x+1|$ si $x\in[-5,5]$
26. $f(x)=|3-x|$ si $x\in[-5,5]$
27. $f(x)=[2x]$ si $x\in[-2,2]$
28. $f(x)=[3x]$ si $x\in[-1,1]$
29. $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]$ si $x\in[-4,4]$
30. $f(x)=\left[\frac{x}{4}\right]$ si $x\in[-6,6]$

Ejercicios

Operaciones con las funciones

Una fábrica produce envases de plástico. Los gastos fijos por jornada de trabajo son de \$600. En una jornada de ocho horas se pueden producir hasta $15\,000$ envases y el costo de producción es de 40 centavos por unidad. Cada unidad se vende en un peso. Encontrar la función que representa la utilidad diaria para la fábrica al vender x envases (ver Figura 2.24).

Solución:
El costo de producción de x envases en una jornada es:

$$C(x) = 0.40x + 600 \qquad \text{para } 0 \leq x \leq 15\,000$$

El ingreso obtenido al vender x artículos está dado por:

$$I(x) = 1 \cdot x = x$$

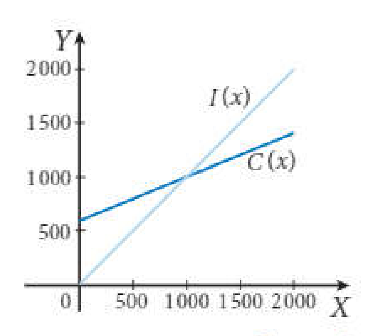


Figura 2.24

Así, la utilidad, es decir, la ganancia obtenida al vender x envases es:

$$\begin{aligned} G(x) &= I(x) - C(x) \\ &= x - (0.40x + 600) \\ &= 0.60x - 600 \end{aligned}$$

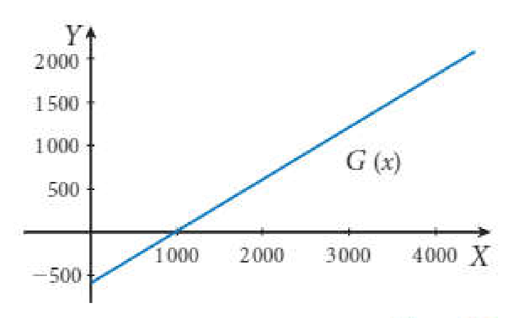


Figura 2.25

A partir de la gráfica de G (Figura 2.25), observamos que para obtener ganancia deben venderse más de 1 000 envases diarios.

Supongamos que tenemos dos funciones reales f y g, de tal manera que $Dom\ f$ es el dominio de f y $Dom\ g$ es el dominio de g. Gracias a que en $\mathbb{R}$ están definidas las operaciones de suma, diferencia, producto y cociente podemos definir esas operaciones para funciones f y g.

- Suma:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \text{si } x\in Dom(f+g)=Dom\ f\cap Dom\ g.$$

- Diferencia:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \quad \text{si } x\in Dom(f-g)=Dom\ f\cap Dom\ g.$$

- Producto:

$$(fg)(x)=f(x)g(x) \quad \text{si } x\in Dom(fg)=Dom\ f\cap Dom\ g.$$

- Cociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{si } x\in Dom\left(\frac{f}{g}\right)\text{, es decir, } x\in Dom\ f\cap Dom\ g \text{ y } g(x)\neq 0.$$

Además definimos las siguientes funciones:

- Producto por un escalar a:

$$(af)(x)=af(x) \quad \text{si } x\in Dom\ f.$$

- Simétrica:

$$(-f)(x)=-f(x) \quad \text{si } x\in Dom\ f.$$

- Recíproco:

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{g(x)} \quad \text{si } x\in Dom\left(\frac{1}{g}\right)\text{, es decir, } x\in Dom\ g \text{ y } g(x)\neq 0.$$

Observaciones:

1. Una función actúa en los puntos de su dominio, por lo tanto el dominio de cada una de las nuevas funciones se establece cuidando que las dos funciones que intervienen en su definición puedan actuar sobre los puntos de dicho dominio y se puedan realizar las operaciones que se indican.
2. Cuando realizamos operaciones con dos funciones f y g que tienen un mismo dominio A, entonces A es también el dominio de las funciones $f+g$, $f-g$, fg ya que $A\cap A=A$.
   En el caso del cociente, lo anterior no necesariamente sucede, ya que aún hay que quitar de A los puntos donde se anula el denominador. Es decir,

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right)=A\setminus\{x\in A : g(x)=0\}.$$

3. De manera más general, podemos dar la siguiente regla: si el dominio de una de las dos funciones f, g está contenido en el dominio de la otra función, entonces el más pequeño de esos conjuntos es el dominio de las funciones $f+g$, $f-g$,

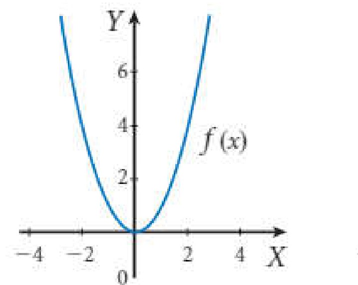
fg. Para el cociente $\frac{f}{g}$, aún tendremos que quitar de ese conjunto los puntos donde se anula el denominador.
No siempre se presenta alguna de estas situaciones, en tales casos cuidaremos de dar los detalles correspondientes.

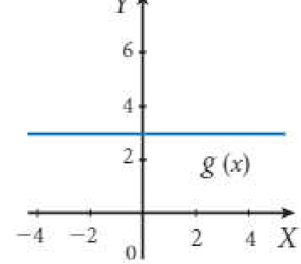
TIP
El dominio de las funciones $f+g$, $f-g$ y fg es $Dom\, f \cap Dom\, g$.

Ejemplos

1. Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=3$ encontrar $f+g$ y $f-g$.

Solución:





Observamos que:

$$Dom(f+g)=\mathbb{R}$$

y la regla de correspondencia es

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+3$$

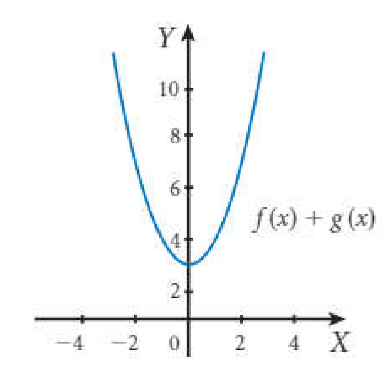
Análogamente

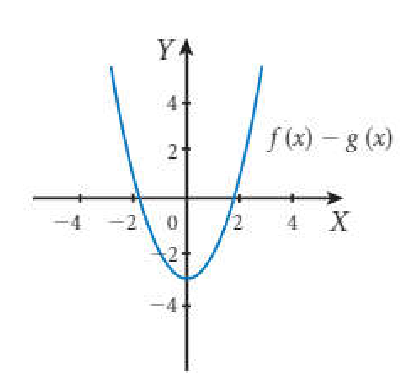
$$Dom(f-g)=\mathbb{R}$$

y la regla de correspondencia es

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2-3$$

Las gráficas de $f+g$ y $f-g$ son las parábolas:





2. Si $f(x)=x-8$ y $g(x)=x^2+2x-5$ encontrar $f+g$ y $f-g$, es decir, su regla de correspondencia y dominio.

Solución:

- $f+g$:

$$Dom(f+g)=\mathbb{R}$$

y la regla de correspondencia es

$$\begin{aligned}(f+g)(x)&=f(x)+g(x)\\&=(x-8)+\left(x^2+2x-5\right)\\&=x^2+3x-13.\end{aligned}$$

- $f-g$:

$$Dom(f-g)=\mathbb{R}$$

y la regla de correspondencia es

$$\begin{aligned}(f-g)(x)&=f(x)-g(x)\\&=(x-8)-\left(x^2+2x-5\right)\\&=-x^2-x-3.\end{aligned}$$

TIP

El dominio de la función $\frac{1}{g(x)}$ es $\{x\in Dom\,g : g(x)\neq 0\}$.

3. Si $f(x)=\frac{x}{x^2-9}$ y $g(x)=\sqrt{x+1}$ encontrar $f+g$, es decir, su regla de correspondencia y dominio.

Solución:

Para encontrar el dominio de f necesitamos determinar cuándo

$$x^2-9=0$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}x^2-9&=0\\x^2&=9\\x&=\pm 3,\end{aligned}$$

es decir, la función $f(x)$ está definida excepto en -3 y en 3. O dicho de otra manera en $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$.

Para que la función $g(x)$ esté definida necesitamos que:

$$\begin{aligned}x+1&\geq 0\\x&\geq -1.\end{aligned}$$

O sea, el dominio de g es $[-1,\infty)$. Entonces, el dominio de $f+g$ son los números reales mayores o iguales que -1 y distintos de 3. Es decir,

$$Dom(f+g)=[-1,3)\cup(3,\infty)$$

y la regla de correspondencia es

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x}{x^2-9}+\sqrt{x+1}.$$

4. Si $f(x)=2x+5$ y $g(x)=6x-7$ encontrar fg y $\frac{f}{g}$.

Solución:

- fg:

$$Dom(fg)=\mathbb{R}$$

y la regla de correspondencia es

$$\begin{aligned}(fg)(x)&=f(x)g(x)\\&=(2x+5)(6x-7)\\&=12x^2+16x-35.\end{aligned}$$

- $\frac{f}{g}$:

Para encontrar el dominio de $\frac{f}{g}$ debemos quedarnos que los puntos que satisfacen:

$$g(x)\neq 0,\text{ es decir, } 6x-7\neq 0$$

Veamos dónde se cumple la igualdad:

$$\begin{aligned}6x-7&=0\\x&=\frac{7}{6}\end{aligned}$$

Es decir,

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{7}{6}\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7}{6}\right\}$$

y la regla de correspondencia es

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x+5}{6x-7}.$$

5. Si $f(x)=\frac{x+6}{5x-4}$, encontrar $\frac{1}{f}$.

TIP

El dominio de la función $\frac{f}{g}$ es $\{x\in Dom\, f\cap Dom\, g:\ g(x)\neq 0\}$.

Solución:
Primero encontramos el dominio de f. Observamos que el denominador de f se hace cero cuando:

$$5x-4=0$$
$$x=\frac{4}{5}$$

Entonces,

$$Dom\ f=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{4}{5}\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{5}\right\}.$$

Además, debemos considerar dónde $f(x)=0$, ya que en este punto $\frac{1}{f}$ no está definido, y esto sucede cuando:

$$\frac{x+6}{5x-4}=0$$
$$x+6=0$$
$$x=-6$$

Por lo tanto,

$$Dom\left(\frac{1}{f}\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{4}{5}\ \text{y}\ x\neq-6\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{5},-6\right\}.$$

La regla de correspondencia es:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{x+6}{5x-4}}=\frac{5x-4}{x+6}.$$

Observación:
Hay que tener cuidado de no dar el dominio después de haber encontrado la regla de correspondencia, pues se pueden cometer errores. Esto es fácil de observar en el ejemplo recién visto, puesto que si consideramos la función:

$$g(x)=\frac{5x-4}{x+6}, \text{ entonces su dominio es } \mathbb{R}\setminus\{-6\}$$

y dicha función es distinta a $\frac{1}{f(x)}$, ya que los dominios de g y $\frac{1}{f}$ son distintos.

6. Encontrar fg y determinar su dominio si

$$f(x)=[x] \text{ si } x\in\left[-\frac{1}{2},1\right), \qquad g(x)=2x \text{ si } x\in\mathbb{R}$$

Solución:
El dominio de f es $\left[-\frac{1}{2},1\right)$ y éste está contenido en el dominio de g.

Por tanto, el dominio de fg es $\left[-\frac{1}{2},1\right)$.

Podemos presentar a f como una función combinada,

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x\in\left[-\frac{1}{2},0\right) \\ 0 & \text{si } x\in[0,1)\end{cases}$$

La regla de correspondencia de fg es:

$$(fg)(x)=\begin{cases}-1(2x) & \text{si } x\in\left[-\frac{1}{2},0\right) \\ 0(2x) & \text{si } x\in[0,1)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-2x & \text{si } x\in\left[-\frac{1}{2},0\right) \\ 0 & \text{si } x\in[0,1)\end{cases}$$

7. Encontrar fg, si

$$f(x)=-x+1 \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases}5x-8 & \text{si } x\in(-11,3] \\ x^2-4 & \text{si } x\in(3,7)\end{cases}$$

Solución:
El dominio de f es $\mathbb{R}$ y el de g es $(-11,3]\cup(3,7)=(-11,7)$. Por tanto, el dominio de fg es $(-11,7)$.
La regla de correspondencia del producto es:

$$(fg)(x)=\begin{cases}(-x+1)(5x-8) & \text{si } x\in(-11,3] \\ (-x+1)(x^2-4) & \text{si } x\in(3,7)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-5x^2+13x-8 & \text{si } x\in(-11,3] \\ -x^3+x^2+4x-4 & \text{si } x\in(3,7)\end{cases}$$

Ejemplos

Pensamiento crítico

¿Qué debe suceder para que el dominio de un cociente de funciones $\frac{f}{g}$ sea la intersección de los dominios?

Ejercicios

En cada caso, encuentra $(f+g)(-1)$, $(f-g)\left(\frac{1}{3}\right)$, $(fg)(-2)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$.

1. $f(x)=4x-8,\ g(x)=x+5$
2. $f(x)=-6x-3,\ g(x)=2x-7$
3. $f(x)=\frac{1}{2}x+2,\ g(x)=-6x+10$
4. $f(x)=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2},\ g(x)=\frac{7}{4}x-\frac{6}{5}$
5. $f(x)=x^2-2x+1,\ g(x)=x-1$
6. $f(x)=-3x^2,\ g(x)=\frac{1}{x+6}$
7. $f(x)=\sqrt{x+2},\ g(x)=-x^2-5x+4$
8. $f(x)=|x|,\ g(x)=x^2-5$
9. $f(x)=|2x-1|,\ g(x)=\frac{x-7}{x-2}$
10. $f(x)=|3x|-1,\ g(x)=|x|+2$
11. $f(x)=-5|x|,\ g(x)=\frac{1}{|x-3|}$
12. $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ g(x)=\sqrt{x+\frac{11}{5}}$
13. $f(x)=[x],\ g(x)=2x+1$
14. $f(x)=\sqrt{x+6},\ g(x)=\sqrt{x+3}$

Si $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $g(x)=\cos x$, encuentra:

15. $(f+g)(\pi)$
16. $(f-g)\left(\frac{\pi}{4}\right)$
17. $(fg)\left(\frac{\pi}{2}\right)$
18. $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$
19. $(f+g)\left(\frac{\pi}{3}\right)$
20. $\left(\frac{g}{f}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$

En cada caso, encuentra $f+g$ y fg, y determina el dominio de cada una de las funciones.

21. $f(x)=7x-1,\ g(x)=8x+3$
22. $f(x)=3x+6,\ g(x)=3x^2-5$
23. $f(x)=2x^2-4x+12,\ g(x)=x^3-2x^2-20$
24. $f(x)=|x-1|,\ g(x)=5x$
25. $f(x)=\frac{x+5}{4x-9},\ g(x)=x^2+2x$
26. $f(x)=\frac{x+2}{x+5},\ g(x)=\frac{x-8}{x-3}$
27. $f(x)=\frac{x}{x^2-1},\ g(x)=x+1$
28. $f(x)=\frac{x^2-6}{x^2-4},\ g(x)=x^2+4x+4$
29. $f(x)=x^3-x,\ g(x)=\sqrt{x+8}$
30. $f(x)=x^4+3x^2,\ g(x)=\sqrt{x^2-9}$
31. $f(x)=\frac{x+12}{\sqrt{x-7}},\ g(x)=\sqrt{x-4}$
32. $f(x)=7x^2+2x-18,\ g(x)=\frac{20}{\sqrt{16-x^2}}$
33. $f(x)=\sqrt{x+5},\ g(x)=\frac{x}{x^2-4}$
34. $f(x)=\frac{x^2-1}{x},\ g(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$
35. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}},\ g(x)=\frac{x-9}{\sqrt{16-x^2}}$
36. $f(x)=\sqrt{x^2+6x},\ g(x)=\sqrt{x^2-6x}$

37. $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in(-6,1) \\ 2 & \text{si } x\in[2,12) \end{cases}$, $g(x)=\ln(x+6)$

38. $f(x)=\begin{cases} 4x-7 & \text{si } x\in(-20,-5) \\ 9x+2 & \text{si } x\in[6,18) \end{cases}$, $g(x)=2x+5$

En cada caso, encuentra $\frac{1}{f}$ determinando su dominio.

39. $f(x)=4x-9$

40. $f(x)=7x+15$

41. $f(x)=4x^2-49$

42. $f(x)=x^2+7x-8$

43. $f(x)=\sqrt{9x^2-64}$

44. $f(x)=\sqrt{100-x^2}$

45. $f(x)=\frac{x-11}{3x-15}$

46. $f(x)=\frac{x^2-9x+18}{x+2}$

47. $f(x)=\frac{x^2+4x-45}{x^2+16x+60}$

48. $f(x)=\frac{2x^2+23x-12}{3x^2-19x+28}$

49. $f(x)=\sqrt{\frac{x-8}{x+13}}$

50. $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+3}{x^2+3x-28}}$

En cada caso, encuentra $f-g$ y $\frac{f}{g}$ y determina el dominio de cada una de las funciones.

51. $f(x)=x^2+4x+4$, $g(x)=x+7$

52. $f(x)=5x^2-1$, $g(x)=x-9$

53. $f(x)=x+12$, $g(x)=6x+14$

54. $f(x)=|5x-1|$, $g(x)=x^2+6x+5$

55. $f(x)=\frac{x^3-6}{2x+9}$, $g(x)=\sqrt{4x-14}$

56. $f(x)=\frac{12x-8}{x^2-16}$, $g(x)=\frac{4x}{x^2-16}$

57. $f(x)=e^{x+10}$, $g(x)=x^3-2x^2-15x$

58. $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}$, $g(x)=e^x$

59. $f(x)=\ln\left(x^2+12x+36\right)$, $g(x)=\sqrt{x^4+9}$

60. $f(x)=\operatorname{sen} x$, $g(x)=\tan x$

Ejercicios

61. $f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{si } x\in[-10,4] \\ x+1 & \text{si } x\in(7,13) \end{cases}$, $g(x)=x$

62. $f(x)=\begin{cases} x^2+9x & \text{si } x\in(-25,-5) \\ x^2+13x-30 & \text{si } x\in[-5,5] \end{cases}$, $g(x)=x+15$

Composición de funciones

Para $f(y)=y+6$ y $g(x)=4x-7$, escribe la regla que resulta de aplicarle a x la función g, y al valor resultante $y=g(x)$ aplicarle la función f.

Solución:
Al aplicar a x la función g obtenemos:

$$y=g(x)=4x-7$$

Ahora aplicamos f a este valor, obteniendo

$$\begin{aligned} f\left(\overbrace{y}^{4x-7}\right) &= \overbrace{y}^{4x-7}+6 \\ &= 4x-7+6 \\ &= 4x-1 \end{aligned}$$

O sea,

$$f(4x-7)=4x-1$$

La regla obtenida es:

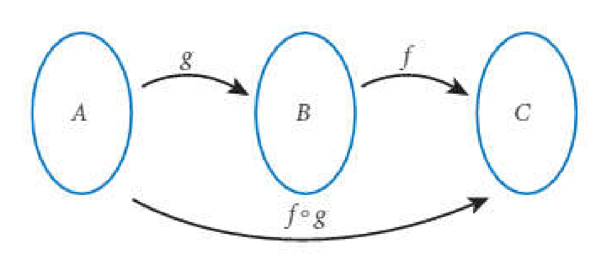
$$f(g(x))=4x-1$$

La *composición* de g con f, denotada con $f\circ g$, que también se lee g compuesta con f, o bien g seguida de f (advierte el orden), es la función cuyo *dominio* es

$$\{x\in Dom\, g \mid g(x)\in Dom\, f\}$$

y cuya regla de correspondencia es

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$



De manera un tanto informal, y sugerida por el diagrama anterior, podemos decir que el dominio de $f\circ g$ está formado por los puntos x que son enviados por g a donde f se aplica ($x\in Dom\ g$ y $g(x)\in Dom\ f$) y la regla de asociación se obtiene en dos pasos; primero enviamos x a $g(x)$ y después aplicamos f a $g(x)$.

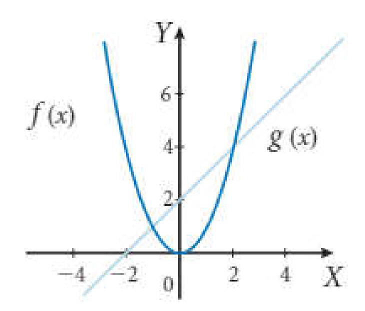
Pensamiento crítico

Si f y g son funciones tales que $Dom\ f = Dom\ g = (a,b)$, entonces ¿$Dom\ (f\circ g) = (a,b)$?

Ejemplos

1. Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=x+2$, encontrar $f\circ g$ y $g\circ f$.

Solución:

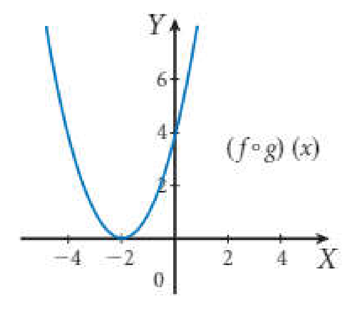


- Primero, encontramos el dominio de la composición $f\circ g$:

$$Dom\ (f\circ g)=\{x\in Dom\ g \mid g(x)\in Dom\ f\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R} \mid x+2\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}.$$

La regla de correspondencia es:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f(x+2)\\&=(x+2)^2\\&=x^2+4x+4\end{aligned}$$

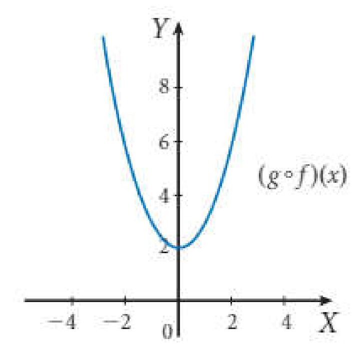


- Analizamos ahora la composición $g\circ f$:

$$Dom\ (g\circ f)=\{x\in Dom\ f \mid f(x)\in Dom\ g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}.$$

La regla de correspondencia es:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(x^2)\\ &= x^2+2.\end{aligned}$$



Por lo tanto,

$$(f\circ g)(x)=x^2+4x+4;\ \ (g\circ f)(x)=x^2+2;\ \ Dom(f\circ g)=Dom(g\circ f)=\mathbb{R}.$$

Pensamiento crítico

Si $f(x)=ax$ con $a\in\mathbb{R}$, ¿qué condiciones debe cumplir a para que $(f\circ f)(x)=f(x)$?

Observación:
Este ejemplo muestra que la composición de funciones no es conmutativa, es decir, en general:

$$(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$$

2. Si $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=2x+3$ encontrar $f\circ g$ y $g\circ f$.

Solución:
Determinamos los dominios de f y de g.

$$Dom\ f=[0,\infty) \qquad Dom\ g=\mathbb{R}$$

- Para la composición $f\circ g$ tenemos:

$$\begin{aligned}Dom(f\circ g) &= \{x\in Dom\ g \mid g(x)\in Dom\ f\}\\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid 2x+3\in[0,\infty)\}.\end{aligned}$$

Analizamos la condición $2x+3\in[0,\infty)$, es decir,

$$2x+3\geq 0$$

lo que equivale a:

$$x\geq-\frac{3}{2}$$

Por lo tanto,

$$Dom\ (f\circ g)=\left[-\frac{3}{2},\infty\right).$$

La regla de correspondencia es:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f(2x+3)\\&=\sqrt{2x+3}.\end{aligned}$$

- Para la composición $g\circ f$ tenemos:

$$\begin{aligned}Dom\ (g\circ f)&=\{x\in Dom\ f|\ f(x)\in Dom\ g\}\\&=\{x\in[0,\infty)\ |\ \sqrt{x}\in\mathbb{R}\}\\&=[0,\infty).\end{aligned}$$

La regla de correspondencia es:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=g(\sqrt{x})\\&=2\sqrt{x}+3\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(f\circ g)(x)=\sqrt{2x+3},\ Dom\,(f\circ g)=\left[-\frac{3}{2},\infty\right)$$
$$(g\circ f)(x)=2\sqrt{x}+3,\ Dom\,(g\circ f)=[0,\infty).$$

3. Si $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$ encontrar $f\circ g$ y $g\circ f$.

Solución:
Determinamos los dominios de f y de g.

$$Dom\ f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}\qquad Dom\ g=\mathbb{R}\setminus\{3\}$$

- La composición $f\circ g$ es:

$$\begin{aligned}Dom(f\circ g)&=\{x\in Dom\ g|\ g(x)\in Dom\ f\}\\&=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\left|\frac{1}{x-3}\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}\right.\right\}.\end{aligned}$$

La última condición es que $\frac{1}{x-3}$ no es -2. Veamos cuándo sucede lo contrario:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-3} &= -2\\ 1 &= -2x+6\\ \frac{-5}{-2} &= x,\end{aligned}$$

es decir, $\frac{1}{x-3}$ es distinto de -2 siempre que $x \neq \frac{5}{2}$.

Así, el dominio son los puntos distintos de 3 y de $\frac{5}{2}$, así

$$Dom(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}, 3\right\}$$

La regla de correspondencia es;

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f\left(\frac{1}{x-3}\right)\\ &= \frac{1}{\frac{1}{x-3}+2}\\ &= \frac{x-3}{2x-5}.\end{aligned}$$

Observación:
Es conveniente obtener el dominio de manera independiente a la regla de correspondencia, puesto que si primero obtenemos ésta y después nos quedamos con su dominio natural, este último puede no coincidir con el dominio de la composición. Por ejemplo, el dominio natural de

$$h(x) = \frac{x-3}{2x-5},$$

es $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$, que no es el dominio de la composición $f \circ g$.

Continuamos ahora con la solución de este ejemplo.

- La composición $g \circ f$ es:

$$\begin{aligned}Dom(g \circ f) &= \{x \in Dom\, f \mid f(x) \in Dom\, g\}\\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \,\middle|\, \frac{1}{x+2} \in \mathbb{R} \setminus \{3\}\right\}.\end{aligned}$$

La condición es que $\frac{1}{x+2}$ no es 3. Veamos cuándo sucede que

$$\frac{1}{x+2}=3$$
$$1=3x+6$$
$$-\frac{5}{3}=x$$

Es decir, $\frac{1}{x+2}$ es distinto de 3 siempre que $x\neq-\frac{5}{3}$.

Así, el dominio de $g\circ f$ son los puntos distintos de -2 y de $-\frac{5}{3}$.

$$Dom\,(g\circ f)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{3},-2\right\}.$$

La regla de correspondencia es;

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{x+2}-3}$$
$$=-\frac{x+2}{3x+5}.$$

Por lo tanto,

$$(f\circ g)(x)=\frac{x-3}{2x-5}\qquad Dom\,(f\circ g)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{2},3\right\}$$
$$(g\circ f)(x)=-\frac{x+2}{3x+5}\qquad Dom\,(g\circ f)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{3},-2\right\}$$

4. Encontrar $f\circ f$, si $f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

Solución:

Para saber cuál es el dominio de *f*, es necesario que determinemos cuándo:

$$x^2-4\geq 0$$
$$x^2\geq 4$$
$$|x|\geq 2$$

de donde

$$x\geq 2 \quad \text{o} \quad x\leq -2$$

Entonces,

$$Dom\ f=(-\infty,-2]\cup[2,\infty).$$

Calculamos ahora el dominio de $f\circ f$:

$$Dom\ (f\circ f)=\{x\in Dom\ f\ |\ f(x)\in Dom\ f\}$$
$$=\left\{x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)\,\middle|\,\sqrt{x^2-4}\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)\right\}.$$

Analizamos la condición $\sqrt{x^2-4}\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$, es decir,

$$\sqrt{x^2-4}\in(-\infty,-2]\quad \text{o}\quad \sqrt{x^2-4}\in[2,\infty)$$

Solo es posible que $\sqrt{x^2-4}\in[2,\infty)$, ya que estamos considerando la raíz positiva. Es decir, debemos determinar cuándo:

$$\sqrt{x^2-4}\geq 2$$
$$x^2-4\geq 4$$
$$x^2\geq 8$$
$$|x|\geq\sqrt{8}$$

Así,

$$x\geq\sqrt{8}\quad \text{o}\quad x\leq-\sqrt{8}$$

Entonces:

$$Dom\ (f\circ f)=\left\{x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)\ \text{ y }\ x\in\left(-\infty,-\sqrt{8}\right]\cup\left[\sqrt{8},\infty\right)\right\},$$

O sea

$$Dom\ (f\circ f)=\left((-\infty,-2]\cup[2,\infty)\right)\cap\left(\left(-\infty,-\sqrt{8}\right]\cup\left[\sqrt{8},\infty\right)\right).$$

Con base en la Figura 2.26,

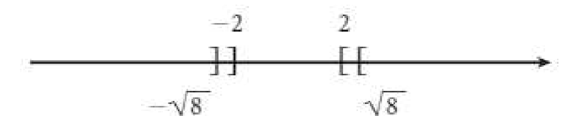


Figura 2.26

obtenemos que $Dom\ (f\circ f)$ es:

$$Dom\ (f\circ f)=\left(-\infty,-\sqrt{8}\right]\cup\left[\sqrt{8},\infty\right).$$

La regla de correspondencia es:

$$
\begin{aligned}
(f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\
&= f\left(\sqrt{x^2-4}\right) \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2-4} \\
&= \sqrt{x^2-4-4} \\
&= \sqrt{x^2-8}.
\end{aligned}
$$

5. Encontrar dos funciones f y g tales que $(f \circ g)(x) = \ln\left(x^2-9\right)$.

Solución:
Para obtener el valor $\ln\left(x^2-9\right)$ lo primero que se hace es evaluar el polinomio x^2-9 y al resultado aplicarle el logaritmo natural, entonces si hacemos:

$$g(x) = x^2-9 \quad \text{y} \quad f(x) = \ln x$$

Tenemos:

$$(f \circ g)(x) = \ln\left(x^2-9\right).$$

Ejemplos

Pensamiento crítico

¿La composición de dos funciones lineales es una función lineal?

Ejercicios

En cada caso, encuentra dos funciones f y g tales que $f \circ g$ sea igual a la función dada.

1. $h(x) = \left(x^3+6x^2\right)^{12}$

2. $h(x) = |5x-18|$

3. $h(x) = \sqrt{x^2-6}$

4. $h(x) = \sqrt{\sec x}$

5. $h(x) = \cos(\ln x)$

6. $h(x) = \operatorname{sen}^4 x$

7. $h(x) = e^{\tan x}$

8. $h(x) = \ln\left(x^4+x^2+1\right)$

9. $h(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)$

10. $h(x) = \dfrac{1}{x^2+x-5}$

11. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}+7$

12. $h(x) = \dfrac{1}{\cot x}$

En cada caso, encuentra $f \circ g$ y $g \circ f$ y determina el dominio de cada una de las funciones.

13. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ g(x) = x^2-3x-13$

14. $f(x) = x-8,\ g(x) = e^x$

15. $f(x) = \ln x,\ g(x) = x^2+7$

16. $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = \cos x$

Ejercicios

17. $f(x)=|x|,\ g(x)=2x+5$

18. $f(x)=5x+4,\ g(x)=-6x+1$

19. $f(x)=x^2+7,\ g(x)=4x^2+14x$

20. $f(x)=2x-12,\ g(x)=3x+20$

21. $f(x)=x^2+1,\ g(x)=\sqrt{x+9}$

22. $f(x)=\sqrt{x-7},\ g(x)=2x+12$

23. $f(x)=\dfrac{x+9}{x^2-4},\ g(x)=6x-5$

24. $f(x)=\dfrac{x+5}{x},\ g(x)=x^2-1$

25. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}},\ g(x)=x^2+3x-9$

26. $f(x)=\dfrac{x}{x-8},\ g(x)=\dfrac{x+2}{x}$

27. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x^2+x-12},\ g(x)=\sqrt{25+x^2}$

28. $f(x)=\dfrac{x+10}{x-5},\ g(x)=\dfrac{4x-1}{x+9}$

29. $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x-4}},\ \ g(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x-6}}$

30. $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x^2-x-12},\ \ g(x)=\dfrac{x^2-5}{x^2-16x+60}$

Cambio de variable

Consideremos la función $h(x)=\sqrt{x^2+6x-9}$. Escribir $h(x)$ como la composición de dos funciones f y g.

Solución:
Tomamos $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2+6x-9$.
Entonces:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f\left(x^2+6x-9\right)\\&=\sqrt{x^2+6x-9}\\&=h(x).\end{aligned}$$

Si escribimos $u=g(x)$, entonces:

$$f(g(x))=f(u)=\sqrt{u}.$$

Observamos que h es una función de la variable x, pero al considerar $u=g(x)$, lo que obtenemos queda escrito en términos de la variable u.

Cuando en una composición de dos funciones $h(x)=f(g(x))$ escribimos $u=g(x)$, entonces la función h que inicialmente depende de x, queda escrita en términos de la variable u y decimos que hemos efectuado un *cambio de variable*. Esto lo hacemos para obtener una expresión más simple.

El cálculo de límites e integrales, temas que abordaremos en unidades posteriores, en ocasiones puede simplificarse mediante un cambio de variable.

Ejemplos

1. Escribir la función $h(x)=\cos\left(\frac{5x+2}{x^2+1}\right)$ como la composición de dos funciones f y g.

Solución:
Consideramos $f(x)=\cos x$ y $g(x)=\frac{5x+2}{x^2+1}$.
Entonces:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f\left(\frac{5x+2}{x^2+1}\right)\\&=\cos\left(\frac{5x+2}{x^2+1}\right)\\&=h(x).\end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable $u=\frac{5x+2}{x^2+1}$, entonces:

$$h(u)=\cos u.$$

2. Escribir la función $h(x)=\left(9x^3-7x+1\right)^5$ como la composición de dos funciones f y g.

Solución:
Consideramos $f(x)=x^5$ y $g(x)=9x^3-7x+1$.
Entonces:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f\left(9x^3-7x+1\right)\\&=\left(9x^3-7x+1\right)^5\\&=h(x).\end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable $u=9x^3-7x+1$, entonces tenemos:

$$h(u)=u^5.$$

3. Escribir la función $h(x)=\frac{1}{\left(4x^2-1\right)^3}$ como la composición de dos funciones f y g.

Solución:
Consideramos $f(x)=\frac{1}{x^3}$ y $g(x)=4x^2-1$.

Entonces:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f\left(4x^2-1\right)\\&=\frac{1}{\left(4x^2-1\right)^3}\\&=h(x).\end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable $u=4x^2-1,$ entonces tenemos:

$$h(u)=\frac{1}{u^3}.$$

Observación:

En muchos casos, es posible que haya más de una manera de escribir una función como composición de otras dos, en el ejemplo anterior, otra manera sería considerar $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\left(4x^2-1\right)^3$.

Entonces:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f\left(\left(4x^2-1\right)^3\right)\\&=\frac{1}{\left(4x^2-1\right)^3}\\&=h(x).\end{aligned}$$

Es decir, si hacemos el cambio de variable $u=\left(4x^2-1\right)^3$, entonces tenemos:

$$h(u)=\frac{1}{u}.$$

4. Efectuar el cambio de variable $u=\frac{1}{x}$ en la expresión $\dfrac{6\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\left(\frac{1}{x}\right)+1}{5\left(\frac{1}{x}\right)^2-7}$.

Solución:

Sustituimos $u=\frac{1}{x}$:

$$\frac{6\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\left(\frac{1}{x}\right)+1}{5\left(\frac{1}{x}\right)^2-7}=\frac{6u^2-2u+1}{5u^2-7}.$$

5. Efectuar el cambio de variable $u = 3x$ en la expresión $\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$.

Solución:

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}$$
$$= 3\frac{\operatorname{sen} u}{u}.$$

6. Efectuar el cambio de variable $u = 6x^2 - 1$ en la expresión $\frac{\sqrt{6x^2 - 1}}{x^2}$.

Solución:
Como $u = 6x^2 - 1$, entonces:

$$u + 1 = 6x^2$$
$$\frac{u+1}{6} = x^2$$

de donde:

$$\frac{\sqrt{6x^2 - 1}}{x^2} = \frac{\sqrt{u}}{\frac{u+1}{6}}$$
$$= 6\frac{\sqrt{u}}{u+1}.$$

Ejemplos

Ejercicios

En cada caso efectúa el cambio de variable que se pide.

1. $u = \sqrt{x}$ en la expresión $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
2. $u = \frac{t^3 - 1}{t^3 + 1}$ en la expresión $\sqrt[3]{\frac{t^3 - 1}{t^3 + 1}}$
3. $u = \cos x$ en la expresión $\operatorname{sen}(\cos x)$
4. $u = \sqrt{x}$ en la expresión $e^{\sqrt{x}}$
5. $u = \frac{1}{x}$ en la expresión $5^{-\frac{1}{x}}$
6. $u = x + 9$ en la expresión $\frac{x}{x+9}$
7. $u = x^2 + 1$ en la expresión $(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 3}$
8. $u = \sqrt{x}$ en la expresión $\frac{5 - \sqrt{x}}{x - 25}$
9. $u = e^x$ en la expresión $\frac{e^{3x}}{1 + e^x}$
10. $u = e^x$ en la expresión $\frac{1}{1 + e^{-x}}$

Mundo virtual

Internet está lleno de lugares interesantes, muchos de los cuales seguramente ya conoces. En esta sección te invitamos a visitar varios sitios que contienen material relacionado con el contenido de esta unidad. Algo de ese material está desarrollado por los autores de este libro, pero mucho más ha sido desarrollado por personas de todo el mundo que tienen interés en las matemáticas.

- http://atenea.matem.unam.mx Éste es un sitio del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en el cual los investigadores del Instituto están creando material para cursos en línea. Puedes entrar como invitado sin necesidad de registrarte. Una vez dentro del sitio, elige la categoría "Cálculo diferencial e integral", dentro de ella, el curso "Cálculo I" y entra a las lecciones de la sección "Lecciones introductorias sobre las funciones reales y sus gráficas".
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web Sitio del Ministerio de Educación, Salud y Deporte del Gobierno español que contiene unidades didácticas y recursos interactivos desarrollados con la herramienta Descartes. Estos materiales fueron elaborados por profesores de enseñanza media. Selecciona "U. Didácticas", en la sección "3° ESO" encontrarás varias lecciones relativas al tema de funciones que estudiaste en esta unidad.
- http://es.wikipedia.org La enciclopedia en línea Wikipedia es uno de los sitios de referencia para encontrar información relacionada con la ciencia y la cultura. En el buscador escribe: Función matemática. Hojea las primeras secciones de este documento para ampliar los temas vistos en esta unidad.
- http://newton.matem.unam.mx/geolab En este sitio puedes descargar el programa Geolab y el curso para aprender a utilizarlo. En las secciones de Mundo virtual te guiaremos para realizar algunas construcciones relacionadas con los temas de este libro.

Construcciones con Geolab

1. Revisa las primeras secciones del curso para aprender a dibujar puntos, rectas y círculos.
2. Construcción de funciones. Elige el constructor "Gráfica de función" en el menú "Define funciones". En la ventana aparecen cuatro renglones: "a=", "b=", "y=", "pasos". Las dos primeras indican los extremos del intervalo donde está definida la función. Déjalos con los valores −10 y 10 propuestos. Coloca el cursor en el renglón "y=" y luego escribe en el campo de texto que está en la parte inferior: t_

   Esto es porque para Geolab la variable independiente siempre debe llamarse así: la letra t seguida de guión bajo _

   Haz clic en la palomita roja y habrás dibujado la función identidad.

Para dibujar la función x^2 escribe en el renglón "y="t_ ^2
Recuerda, siempre la variable se llama t_ y el símbolo ^ significa que lo que sigue es el exponente.

Para indicar multiplicaciones siempre tienes que escribir el signo de multiplicación * (el asterisco). Por ejemplo: 3*t_^4

Resumen de la unidad

- Suma: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ si $x\in Dom(f+g)=Dom\ f\cap Dom\ g$.
- Diferencia: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ si $x\in Dom(f-g)=Dom\ f\cap Dom\ g$.
- Producto: $(fg)(x)=f(x)g(x)$ si $x\in Dom(fg)=Dom\ f\cap Dom\ g$.
- Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ si $x\in Dom\left(\frac{f}{g}\right)$, es decir, $x\in Dom\ f\cap Dom\ g$ y $g(x)\neq 0$.
- Composición: $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ si $x\in Dom(f\circ g)=\{x\in Dom\ g \mid g(x)\in Dom\ f\}$.

Ejercicios de repaso

1. Encuentra la regla de correspondencia de $f(x)=\frac{|x|}{x}$ si $x\neq 0$ y dibuja su gráfica en el intervalo $[-5,5]$.
2. Encuentra la regla de correspondencia de $f(x)=x-[x]$ si $x\neq 0$ y dibuja su gráfica en el intervalo $[-5,5]$.

En cada caso calcula $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, donde $h\neq 0$ y $h\in\mathbb{R}$.

3. $f(x)=5x+2$
4. $f(x)=-x+7$
5. $f(x)=x^2$
6. $f(x)=x^3$
7. $f(x)=\frac{1}{x}$
8. $f(x)=\sqrt{x}$

Encuentra $f \circ g$ donde:

9. $f(x)=x^2+3x$; $g(x)=2x^3-8x$

10. $f(x)=\sqrt{x+7}$; $g(x)=4x-5$

11. $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$; $g(x)=\frac{2x+6}{x-1}$

12. $f(x)=\frac{5x}{x^2-9}$; $g(x)=\sqrt{4-x^2}$

13. $f(x)=\frac{x^2+4x-1}{x^2-x-6}$; $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+5}}$

14. $f(x)=\sqrt{x^2-25}$; $g(x)=\frac{x+12}{x-6}$

15. $g(x)=\begin{cases} x+5 & \text{si } -3\le x<2 \\ 2x-3 & \text{si } 2\le x<6 \end{cases}$, $f(x)=x^2$

16. $f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } -5\le x<-1 \\ x^2 & \text{si } 3\le x<8 \end{cases}$, $g(x)=x-1$

En cada caso efectúa el cambio de variable que se pide.

17. $u=x^2-1$ en la expresión $x^4\sqrt{x^2-1}$

18. $u=1-x$ en la expresión $\frac{\sqrt{1-x}}{x^2}$

19. $u=e^x+1$ en la expresión $\frac{e^x-1}{(e^x+1)\ln(e^x+1)}$

20. $u=e^x$ en la expresión $e^x\sqrt{1+e^{2x}}$

Autoevaluación

1. El dominio natural de la función $f(x)=\dfrac{3x+2}{5x-4}$ es:

a) $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$ **b)** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{4}{5}\right\}$ **c)** $\mathbb{R}$ **d)** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{4}{5},-\dfrac{2}{3}\right\}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 33.

2. Si $f(x)=\sqrt{x^2-5x}$, entonces $f(x+3)$ es igual a:

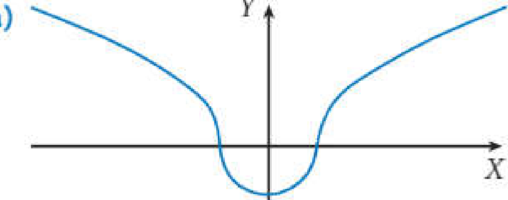
a) $\sqrt{x^2+x+9}$ **b)** $\sqrt{x^2-5x-15}$ **c)** $\sqrt{x^2+x-6}$ **d)** $\sqrt{x^2-5x}+3$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 39 y 40.

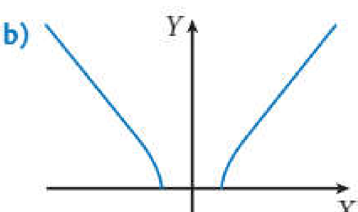
3. ¿Cuál de las siguientes gráficas no representa una función?

a)

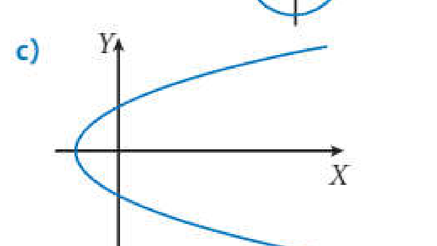




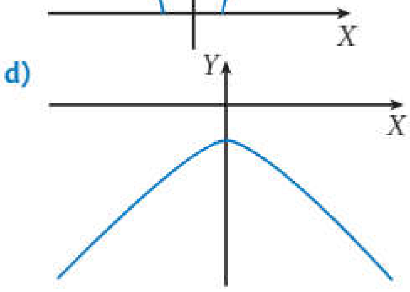
b)



c)



d)



En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 35.

4. El dominio natural de la función $g(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$ es:

a) $Dom\,g=[-2,\infty)$ **b)** $Dom\,g=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ **c)** $Dom\,g=(-\infty,-2]\cup[3,\infty)$ **d)** $Dom\,g=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 33.

5. Si $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$, $g(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ entonces la regla de correspondencia y el dominio de $f\circ g$ son:

a) $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x}$, $Dom(f\circ g)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ **b)** $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x}$, $Dom(f\circ g)=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

c) $(f\circ g)(x)=\dfrac{3}{3x+1}$, $Dom(f\circ g)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ **d)** $(f\circ g)(x)=\dfrac{3}{3x+1}$, $Dom(f\circ g)=\mathbb{R}\setminus\{1,4\}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 74.

6. El dominio de la función $f(x)=\frac{\tan x}{\sqrt{x-4}}$ es:

a) $Dom\, f=\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x=(2n+1)\frac{\pi}{2}\quad \text{con } n\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $Dom\, f=(4,\infty)$

c) $Dom\, f=(4,\infty)\cup\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x=(2n+1)\frac{\pi}{2}\ \text{con } n\in\mathbb{Z} \text{ y } n\geq 1\right\}$

d) $Dom\, f=(4,\infty)\setminus\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x=(2n+1)\frac{\pi}{2}\ \text{con } n\in\mathbb{Z} \text{ y } n\geq 1\right\}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 33-34 y 57.

7. Si $f(x)=\frac{x}{x+3}$, $g(x)=\frac{5x}{x^2+7x+12}$ y $h(x)=\frac{x+3}{x+4}$, la regla de correspondencia y el dominio de $(f-g+h)(x)$ son:

a) $(f-g+h)(x)=\frac{2x^2+5x+9}{x^2+7x+12}$. $Dom(f-g+h)=\mathbb{R}\setminus\{-4,-3\}$

b) $(f-g+h)(x)=\frac{2x^2+15x+9}{x^2+7x+12}$. $Dom(f-g+h)=\mathbb{R}\setminus\{4,3\}$

c) $(f-g+h)(x)=\frac{2x^2+4x+9}{x^2+7x+12}$. $Dom(f-g+h)=\mathbb{R}\setminus\{-4,-3,0\}$

d) $(f-g+h)(x)=\frac{2x^2+5x+12}{x^2+7x+12}$. $Dom(f-g+h)=\mathbb{R}\setminus\{-4,-3\}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 66.

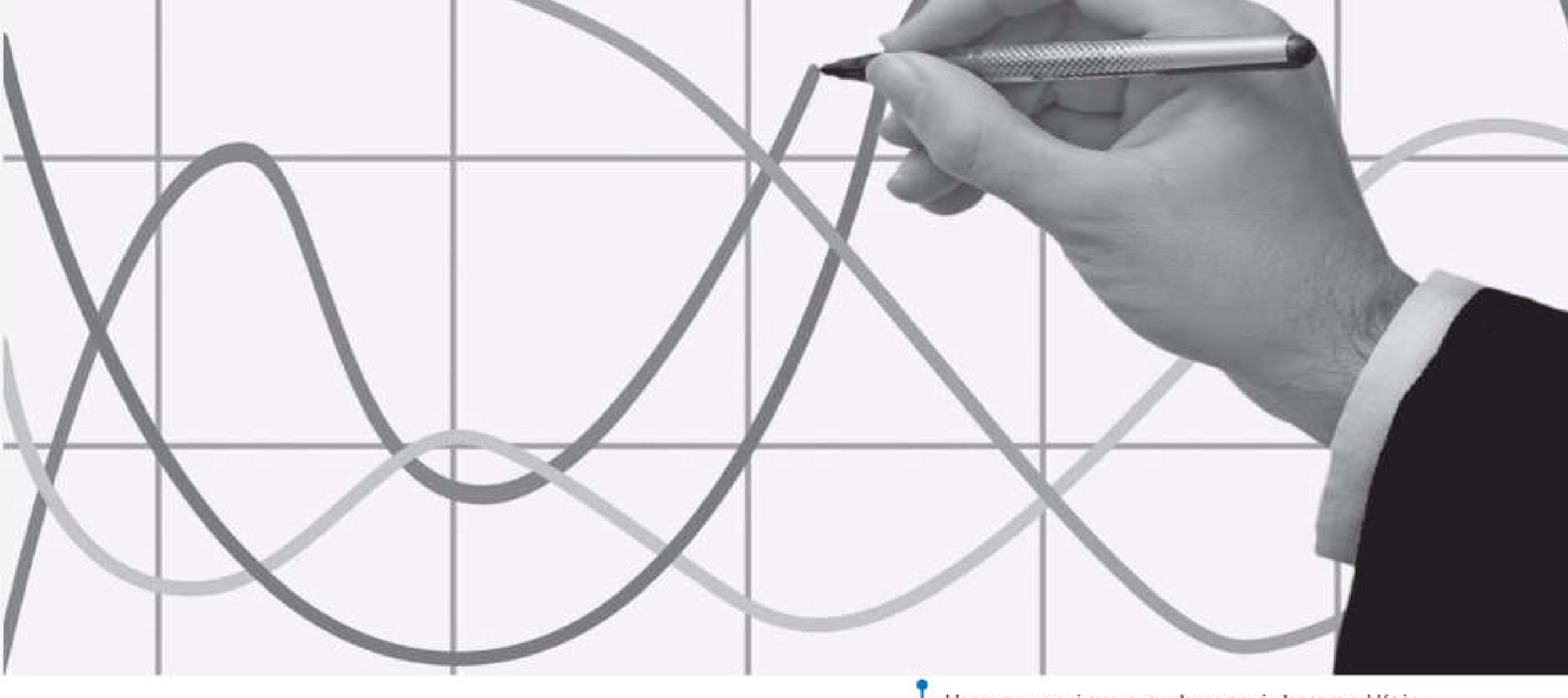
Heteroevaluación

1. Encuentra el dominio natural de la función $h(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2+3x-10}$.

2. Si $g(x)=\begin{cases} 3x+5 & \text{si } x<-4 \\ x^2+2x & \text{si } -4\leq x\leq 0 \\ x-4 & \text{si } x>0 \end{cases}$, calcula $g(-5)g(-3)+g(1)$.

3. Si $f(x)=\dfrac{x^2-x-30}{x^2-7x+12}$ y $g(x)=\dfrac{x^2-4x-12}{x^2-8x+15}$, encuentra la regla de correspondencia y el dominio de $\dfrac{f}{g}(x)$.

4. Si $f(x)=\dfrac{x}{2x-3}$ y $g(x)=\sqrt{x}$, encuentra la regla de correspondencia y el dominio de $(g\circ f)(x)$.



Una curva continua se puede trazar sin levantar el lápiz.



Unidad 3 Continuidad de funciones

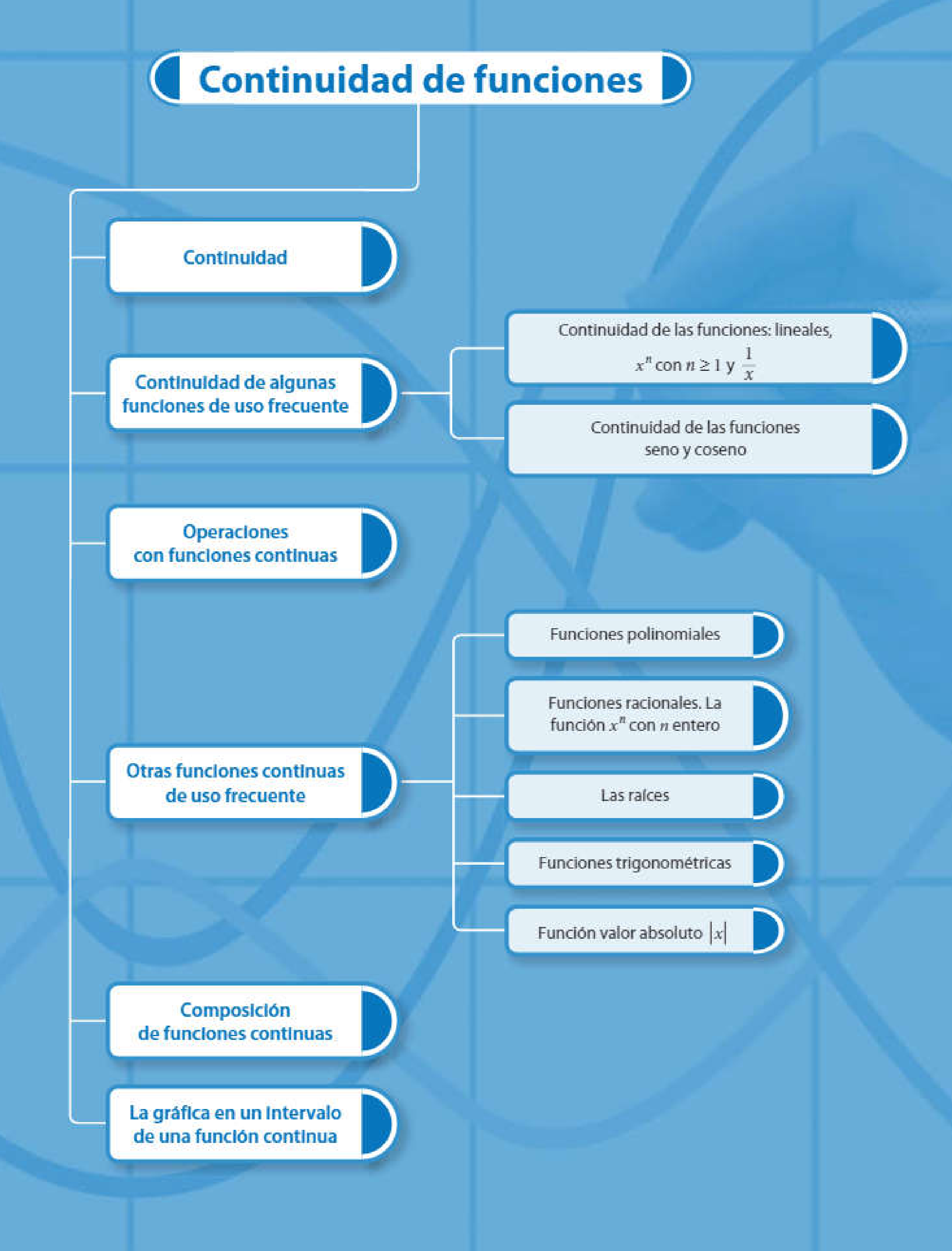
De modo intuitivo podemos decir que una *función continua* es aquella que asigna valores muy parecidos a los puntos de su dominio que están cercanos entre sí. Esto tiene implicaciones prácticas muy importantes. Por ejemplo, al calcular el área de un círculo, a mano aproximamos el valor de π a 3.14 con lo cual, obtenemos un valor muy parecido al área exacta del círculo. También cuando hacemos operaciones con una calculadora u hoja electrónica, las hacemos con números que presentan un número fijo de decimales; es decir, 8 decimales en el caso de las calculadoras. El hecho de que las operaciones de suma, producto, etcétera, sean continuas garantiza que los resultados obtenidos al operar con números truncados a 8 decimales sean muy parecidos a los resultados que obtendríamos si trabajáramos con los números exactos.

Una propiedad geométrica que caracteriza a las funciones continuas definidas en intervalos es que sus gráficas sobre los intervalos se pueden trazar sin levantar el lápiz.

Uno de los primeros matemáticos que trató de formalizar el concepto de continuidad fue Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Él definió la continuidad de una función f diciendo que un incremento infinitamente pequeño en la variable independiente x produce siempre un incremento infinitamente pequeño en $f(x)$. La definición en términos de épsilon-delta que conocemos actualmente fue dada por Bernard Bolzano en 1817.

En esta unidad recurrimos a la experiencia que tenemos con las operaciones aritméticas para mostrar que las funciones de uso frecuente que estudiaste en la unidad anterior, como las polinomiales y más en general las racionales, son continuas. Asimismo, se hace ver la continuidad de funciones construidas a partir de funciones continuas y las operaciones entre funciones.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.



Continuidad

TIP

La primera definición de *función continua* la dio Bernhard Bolzano (1781-1848), nacido en Bohemia, hoy parte de la República Checa. La definición formal de *continuidad de una función en un punto* fue dada por el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897).

Cuatro amigos deben calcular el área de un plato que tiene 5 cm de radio.
El área, en centímetros cuadrados, de un círculo de radio 5 cm es:

$$f = 5^2\pi$$

Para calcular esta área:

- Juan toma $\pi = 3.14$ y obtiene $f = (25)(3.14) = 78.5\ \text{cm}^2$.
- Cristina piensa que la aproximación de π no fue suficientemente buena y utiliza $\pi = 3.1416$, con lo que obtiene $f = (25)(3.1416) = 78.54\ \text{cm}^2$.
- Miguel tiene una calculadora que puede manejar 8 cifras decimales y toma $\pi = 3.14159265$, y obtiene:

$$f = (25)(3.14159265) = 78.53981625\ \text{cm}^2$$

- Por último, Alejandra utiliza una hoja de cálculo en su computadora, que tiene una precisión de 15 cifras decimales y usa $\pi = 3.141592653589790$ y obtiene:

$$f = (25)(3.141592653589790) = 78.539816339744800\ \text{cm}^2$$

Ninguna de estas respuestas es exacta, ya que para calcularla se han considerado números x muy cercanos a π, pero no iguales a él, sin embargo conforme se consideran números x más cercanos a π, la multiplicación $25x$ estará cada vez más cercana al valor exacto del área del círculo, que al ser un número con una infinidad de decimales no podemos escribirlo de manera completa.

Los cuatro amigos se dan cuenta de este fenómeno y también observan que dado el problema, dar la respuesta con una o dos cifras decimales es suficiente ya que el error cometido al truncar es despreciable, incluso puede ser menor que el generado al medir el radio con una regla.

Lo que están utilizando estos cuatro amigos, tal vez sin saberlo formalmente, es que la función:

$$f(x) = 5^2 x = 25x$$

es continua en π, así que si x está muy cerca de π, entonces $f(x)$ estará muy cerca de $f(\pi)$.

En general, decimos que una función $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, es *continua* en $a \in A$ si el valor $f(x)$, es casi igual a $f(a)$ para todo x que es casi igual a a. En símbolos escribimos:

$$\text{si } x \approx a, \text{ entonces } f(x) \approx f(a) \qquad (3.1)$$

donde $\approx$ sirve para indicar que dos números son parecidos (casi iguales).

En la página 27 dimos una forma de interpretar la noción de función que ahora nos permite expresar lo anterior del siguiente modo:

f es continua en $a \in A$ si f envía a todos los números $x \in A$ que están cerca de a a números cercanos a $f(a)$.

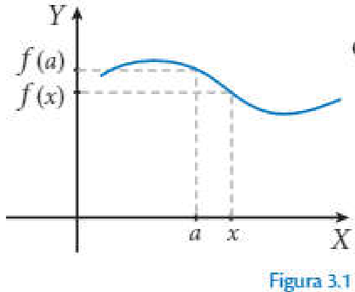


Figura 3.1

En la Figura 3.1 se representa esta situación.

Si para la función $f: A \to \mathbb{R}$ se cumple (3.1) para cualquier $a \in A$, entonces decimos que f es continua en su dominio o simplemente que f es continua.

Con la terminología introducida, podemos decir que el ejemplo introductorio sugiere que la función área del plato es continua en π. Más adelante veremos que es continua en su dominio.

Por supuesto hay una definición técnica de cuándo f es continua en a, la cual damos en seguida aunque no la usaremos sino hasta el Apéndice A, donde se harán las pruebas formales de resultados que presentamos en esta unidad, para aquellos que estén intesados en verlas:

$f: A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, es continua en $a \in A$ si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ con la siguiente propiedad:

$$\text{si } x \in A \text{ y } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Si lo anterior se cumple para cada $a \in A$, entonces f es continua en su dominio (Figura 3.2).

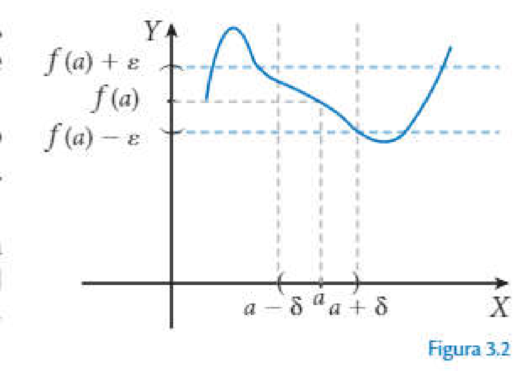


Figura 3.2

Ejemplos

- La identidad $f(x) = x$ es continua en su dominio $(\mathbb{R})$. (Figura 3.3).

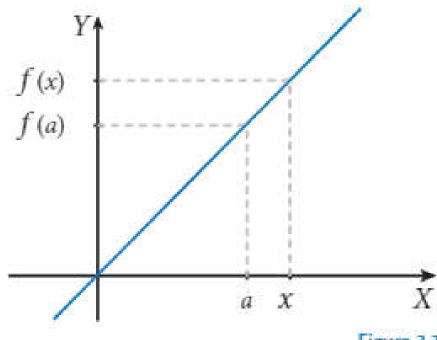


Figura 3.3

Para verificar (3.1) vemos que como $f(x) = x$ y $f(a) = a$, si $x \simeq a$, entonces $f(x) \approx f(a)$.

- Toda función constante $C(x) = c$ es continua en su dominio $(\mathbb{R})$. (Figura 3.4).

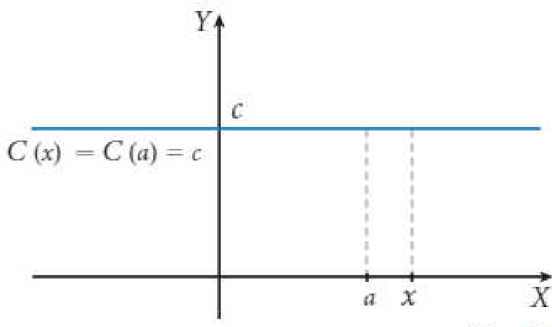


Figura 3.4

Para verificar (3.1) vemos que como $C(x) = c = C(a)$, entonces $C(x) \approx C(a)$ para cualquier valor de x, en particular, cuando $x \simeq a$.



Si f es una función continua en a y $f(a) > 0$, ¿qué se puede decir de los valores de la función f en puntos cercanos al punto a?

Precisemos un poco más la definición dada al principio del capítulo. Decimos que una función $f\colon D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}$, es continua en $a \in D$ si podemos lograr que $f(x)$ y $f(a)$ difieran en tan poco como previamente establezcamos, para todos los puntos $x \in D$ que estén adecuadamente cercanos a a.

En lenguaje un poco más técnico lo anterior equivale a decir que podemos lograr que:

$$|f(x) - f(a)| \approx 0,$$

donde previamente establecemos el grado de parecido $\simeq$ que queremos en esta expresión, siempre que suceda que:

$$|x - a| \approx 0,$$

para un grado de parecido $\simeq$ convenientemente escogido.

Para indicar, por ejemplo, que x^2 difiera de $0^2 = 0$ en menos de $\frac{1}{100}$ escribimos:

$$|x^2 - 0^2| < \frac{1}{100},$$

y esto sucede para todos los números x que difieren de 0 en menos de $\frac{1}{10}$; o sea que cumplen $|x - 0| < \frac{1}{10}$; ya que

$$|x^2 - 0| = |x|^2 = |x - 0|^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$$

Veremos ahora dos ejemplos de funciones que son discontinuas, es decir, no continuas en algunos puntos de su dominio.

Ejemplos

1. La función $s(x)$ que vale -1 en los negativos y 1 en 0 y en los positivos, no es continua en 0.

Solución:

Observamos que si x es negativa, el valor $f(x) = -1$ no está cerca de $f(0) = 1$ aunque x esté muy cerca de 0 (Figura 3.5).

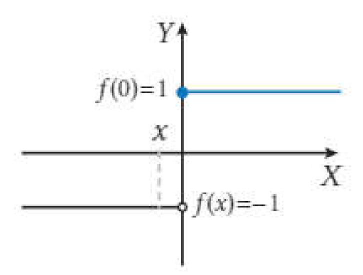


Figura 3.5

2. La función $[x]$ no es continua en a si a es un entero (Figura 3.6).

Solución:

Recordemos que:

$[x]$ = mayor entero que es menor o igual que $x = n$ si $n \leq x < n + 1$.

Figura 3.6

Para esta función y un entero a no sucede lo que señalamos al inicio de esta sección.

Por ejemplo, tomemos $a = 1$, entonces para $0 \leq x < 1$ tenemos que:

$$[x] = 0 \quad \text{y} \quad [a] = [1] = 1$$

y por tanto, por más cercano que escojamos a x por la izquierda de 1 tenemos que sus imágenes difieren en 1, por lo que nunca podremos lograr que para esos puntos se cumpla (Figura 3.7), que:

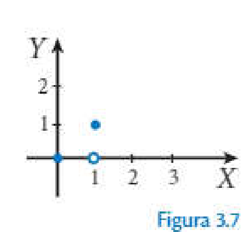


Figura 3.7

$$\left| |x| - |1| \right| < \frac{1}{2}$$

Ejemplos

no obstante que $|x - 1|$ se haga muy pequeño. En general, tenemos:

> $[x]$ no es continua en a si a es un entero.

Continuidad de algunas funciones de uso frecuente

Continuidad de las funciones: lineales, x^n con $n \geq 1$ y $\frac{1}{x}$

Con base en nuestra experiencia con las operaciones aritméticas podemos reconocer la continuidad de otras funciones:

- Si $x \simeq a$, entonces $x + c \simeq a + c$ (si los sumandos se parecen, entonces la sumas son parecidas), así que para cualquier c en $\mathbb{R}$,

  las funciones $f(x) = x + c$ son continuas en $\mathbb{R}$,

  este tipo de función suele llamarse *traslación*.
- Si $x \simeq a$, entonces $cx \simeq ca$ (si los factores se parecen, entonces los productos son parecidos), así que para cualquier c en $\mathbb{R}$,

  las funciones $f(x) = cx$ son continuas en $\mathbb{R}$,

  este tipo de función suele llamarse *homotecia*.
- Si $x \simeq a$, entonces $x^2 \simeq a^2$; $x^3 \simeq a^3$,... (las potencias se parecen si las bases se parecen), así que para cualquier número natural n,

  las funciones $f(x) = x^n$ son continuas en $\mathbb{R}$.

- Si $x \simeq a$, con x, $a \neq 0$, entonces $\frac{1}{x} \simeq \frac{1}{a}$ (los recíprocos de dos números parecidos, son parecidos entre sí), así que:

  la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejemplos

Las siguientes funciones son continuas en su dominio $(\mathbb{R})$.

1. $f(x)=x+5$ (traslación), Figura 3.8.
2. $f(x)=3x$ (homotecia), Figura 3.9.
3. $f(x)=x-3$ (traslación). Observa que en la definición de traslación consideramos cualquier c en $\mathbb{R}$, en particular c puede ser negativa. Recuerda que restar 3 es lo mismo que sumar -3 (Figura 3.10).
4. $f(x)=-x$ (inversión). Este es un caso particular de homotecia, en el cual la constante por la que se multiplica a la variable es $c=-1$ (Figura 3.11).
5. $f(x)=x^2$ (Figura 3.12).
6. $f(x)=x^3$ (Figura 3.13).

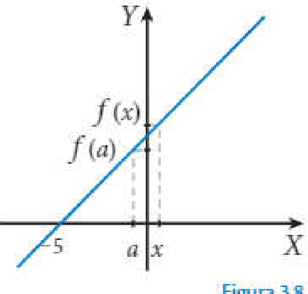



Figura 3.8

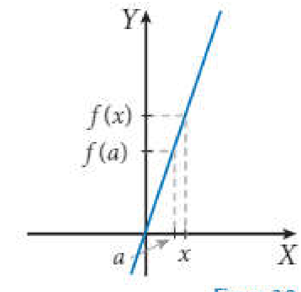


Figura 3.9

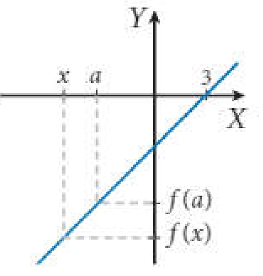


Figura 3.10

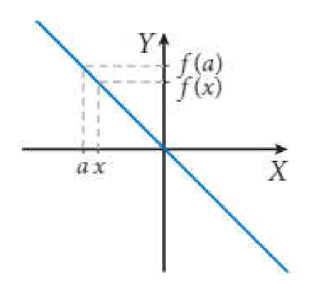


Figura 3.11

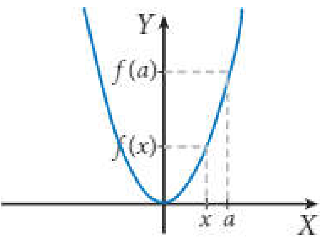


Figura 3.12

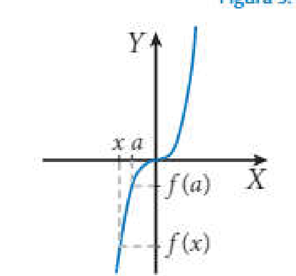


Figura 3.13

TIP

Las funciones lineales $f(x)=mx+c$ donde $m, c \in \mathbb{R}$ son continuas en $\mathbb{R}$.

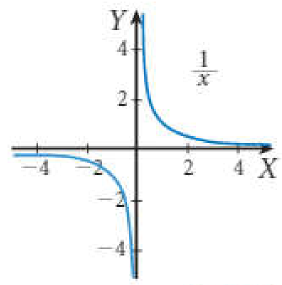


Figura 3.14

Al generalizar los ejemplos 1 a 4 obtenemos:

- Toda función lineal $f(x)=mx+c$ es continua (en $\mathbb{R}$).
  A este tipo de función pertenecen las funciones: identidad (x), constante (c), simetría $(-x)$, traslación $(x+c)$ y homotecia (mx).

  Y al generalizar los ejemplos 5 y 6 obtenemos:
- Para todo $n \geq 1$, la función $f(x)=x^n$ es continua (en $\mathbb{R}$).
  Y por lo dicho sobre los recíprocos de los números parecidos entre sí, (página 97) obtenemos:
- La función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es continua en todo su dominio, que es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  (Figura 3.14)

Continuidad de las funciones seno y coseno

Con estas funciones estamos menos familiarizados, recordemos (ver página 55) que las funciones seno y coseno se definen utilizando un círculo de radio 1. Si $x>0$,

se considera un arco de círculo de longitud x, a partir del punto $Q(1,0)$ y en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj (ver Figura 3.15). Las coordenadas del punto final del arco, P, son:



$$P(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

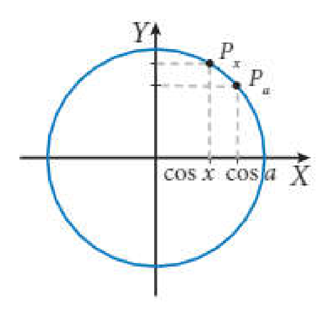
Si $x<0$, se considera el arco de longitud $|x|$ a partir del mismo punto $Q(1,0)$ pero recorriendo el círculo en el sentido de las manecillas del reloj.

Figura 3.15

Para ver que las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son continuas en cada $a \in \mathbb{R}$ observamos que si dos números x y a se parecen, entonces los puntos $P_x(\cos x, \operatorname{sen} x)$ y $P_a(\cos a, \operatorname{sen} a)$ de la circunferencia unitaria están cercanos y por tanto, sus coordenadas son casi iguales; (Figura 3.16) es decir:



- Si $x \approx a$, entonces $\cos x \approx \cos a$.
- Si $x \approx a$, entonces $\operatorname{sen} x \approx \operatorname{sen} a$.



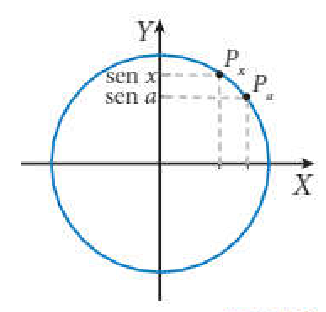
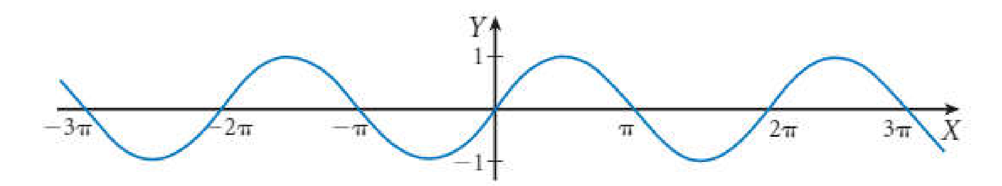


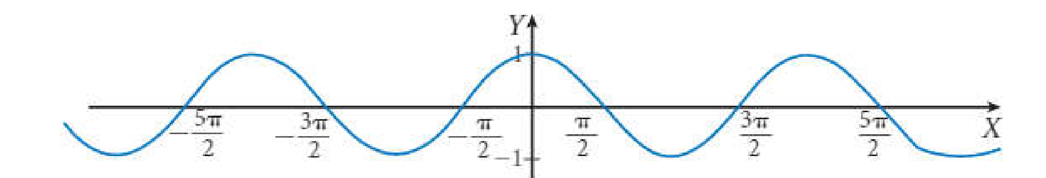
Figura 3.16

En efecto, si por ejemplo, x y a son mayores o iguales que 0, entonces $P_x(\cos x, \operatorname{sen} x)$ y $P_a(\cos a, \operatorname{sen} a)$ se obtienen al recorrer sobre la circunferencia unitaria las distancias x y a, respectivamente.

La gráfica de la función seno es:



La gráfica de la función coseno es:



TIP

Las funciones seno y coseno son continuas en $\mathbb{R}$.

Operaciones con funciones continuas

Si f y g son continuas en a, entonces $f(x) \approx f(a)$ y $g(x) \approx g(a)$ cuando $x \approx a$. Por nuestra experiencia sobre las operaciones con números reales, que ya usamos arriba, tenemos:

- Si $x \approx a$, entonces $f(x)+g(x) \approx f(a)+g(a)$.
  La suma de funciones continuas en a es una función continua en a.
- Si $x \approx a$, entonces $f(x)-g(x) \approx f(a)-g(a)$.
  La diferencia de dos funciones continuas en a es una función continua en a.

- Si $x \simeq a$, entonces $cf(x) \approx cf(a)$.
  El producto de una constante por una función continua en a es una función continua en a.
- Si $x \simeq a$, entonces $f(x)g(x) \approx f(a)g(a)$.
  El producto de dos funciones continuas en a es una función continua en a.
- Si $x \simeq a$, entonces $-f(x) \approx -f(a)$.
  La función simétrica de una función continua en a es una función continua en a.
- Si $x \simeq a$, entonces $f^2(x) \approx f^2(a)$; $f^3(x) \approx f^3(a)$,...
  La potencia entera positiva de una función continua en a es una función continua en a.
- Si $x \simeq a$ y $f(x)$, $f(a) \neq 0$, entonces $\frac{1}{f(x)} \approx \frac{1}{f(a)}$.
  El recíproco de una función continua en a, que no se anula en a, es continuo en a.
- Si $x \simeq a$ y $g(x)$, $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(a)}{g(a)}$.
  El cociente de dos funciones continuas en a, cuyo denominador no se anula en a, es continuo en a.

En resumen:

La suma de dos funciones continuas en a es continua en a.

La diferencia de dos funciones continuas en a es continua en a.

El producto de una constante por una función continua en a es continuo en a.

El producto de dos funciones continuas en a es continuo en a.

La función simétrica de una función continua en a es continua en a.

Las potencias enteras positivas de una función continua en a son continuas en a.

El recíproco de una función continua en a, que no se anula en a, es continuo en a.

El cociente de dos funciones continuas en a, cuyo denominador no se anula en a, es continuo en a.

En los seis primeros renglones del cuadro anterior, podemos cambiar la frase "en a" por "en su(s) dominio(s)" y las afirmaciones resultantes son verdaderas.

Respecto a las dos últimas tenemos:

El recíproco de una función continua en su dominio es continuo en su dominio.

El cociente de dos funciones continuas en sus dominios es continuo en su dominio.

Ejemplos

Las siguientes funciones son continuas en cualquier $a \in \mathbb{R}$:

1. $f(x) = 4x + 1$ (lineal).

Solución:
Escribimos $h(x) = 4x$ y $g(x) = 1$. La función $h(x) = 4x$ es continua por ser una homotecia y la función $g(x) = 1$ es continua por ser una función constante y como la suma de funciones continuas es continua, entonces f es continua en $\mathbb{R}$ (Figura 3.17).

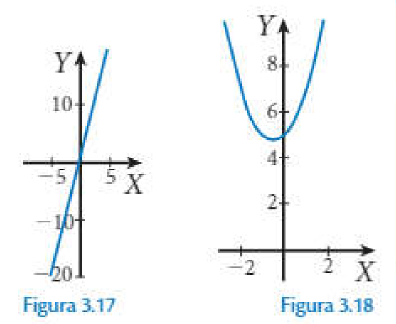


Figura 3.17 Figura 3.18

2. $h(x) = x^2 + x + 5$.

Solución:
Escribimos $h(x) = f(x) + g(x)$, con $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 5$. Como f y g son continuas en $\mathbb{R}$, y la suma de funciones continuas es continua, entonces h es continua en $\mathbb{R}$ (Figura 3.18).

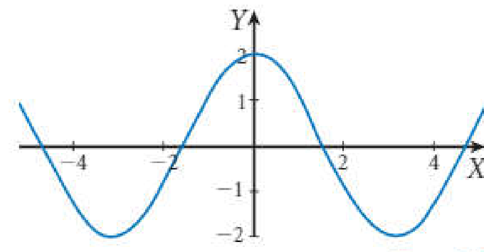


Figura 3.19

3. $h(x) = 2\cos x$.

Solución:
Escribimos $h(x) = 2f(x)$, con $f(x) = \cos x$. Como f es continua en $\mathbb{R}$, y el producto de un número por una función continua es continuo, entonces h es continua en $\mathbb{R}$ (Figura 3.19).

4.  $h(x) = \operatorname{sen}^3 x$.

Solución:
Escribimos $h(x) = f^3(x)$, con $f(x) = \operatorname{sen} x$. Como f es continua en $\mathbb{R}$, y las potencias enteras positivas de funciones continuas son continuas, entonces h es continua en $\mathbb{R}$ (Figura 3.20).

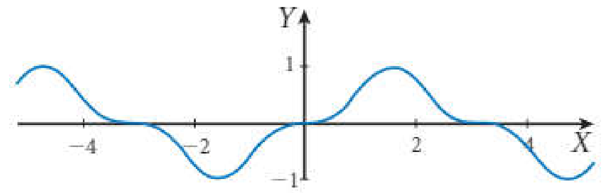


Figura 3.20

5. $h(x) = 2\cos x - \operatorname{sen}^3 x$.

Solución:
Por los ejemplos 3 y 4, las funciones $2\cos x$ y $\operatorname{sen}^3 x$ son continuas en $\mathbb{R}$. Y al ser h la diferencia de dos funciones continuas, ella lo es (Figura 3.21).

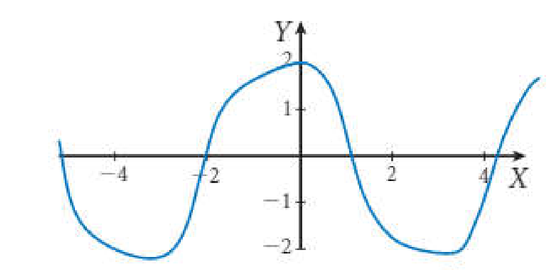


Figura 3.21

6. $h(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$.

Solución:
Observamos que $x^2 + 1$ es continua en cualquier $a \in \mathbb{R}$ y no se anula en ningún número real. Como el cociente de funciones continuas en sus dominios es continuo en su dominio, entonces h es continua en $\mathbb{R}$ (Figura 3.22).

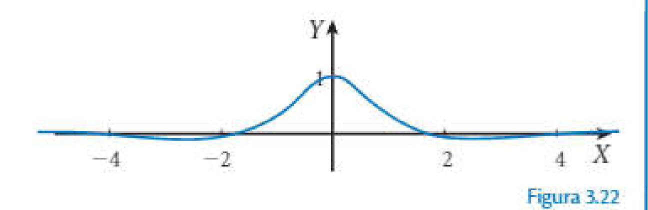


Figura 3.22

Otras funciones continuas de uso frecuente

Funciones polinomiales

Pensamiento crítico

Si $f+g$ es continua en x, entonces ¿es cierto que f y g son ambas continuas en x?

La función polinomial $3x^7+8x^5-x^4+1$ es la suma de las funciones $3x^7$, $8x^5$, $-x^4$, 1 y cada una de las primeras es de la forma una constante por una potencia de la identidad x que sabemos que es continua en cada $a\in\mathbb{R}$; en tanto que 1 es una función constante y por consiguiente continua también en cada a. Por lo visto antes, esta función polinomial es continua en $\mathbb{R}$.

Tenemos el siguiente resultado general:

- Toda función polinomial $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

Analizar la continuidad de una función consiste en determinar los puntos en que es continua.

TIP

El polinomio $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ con $n\geq 0$ y $a_n\neq 0$ tiene grado n. El polinomio 0 no tiene grado. Algunos autores definen el grado del polinomio 0 como $-\infty$.

Ejemplos

1. Analizar la continuidad de la función

$$P(x)=100x^5-\frac{\pi}{4}x^4+2x^3-\sqrt{2}x^2+x-e.$$

Solución:
Por ser una función polinomial, es continua en $\mathbb{R}$.

2. Analizar la continuidad de la función $P(x)=(x-1)^2$.

Solución:
Escribimos $(x-1)^2$ como

$$(x-1)^2=x^2-2x+1,$$

entonces por ser ésta una función polinomial tenemos que es continua en $\mathbb{R}$.

3. Analizar la continuidad de la función

$$P(x)=\left(100x^5-\frac{\pi}{4}x^4+2x^3-\sqrt{2}x^2+x-e\right)^3.$$

Solución:
Lo podemos explicar de 2 maneras: sabemos que la base es un polinomio y una potencia entera positiva de un polinomio es otro polinomio, por tanto es una función continua en $\mathbb{R}$. La segunda forma de explicar su continuidad es observando que ya habíamos visto que las potencias enteras positivas de funciones continuas son continuas.

4. ¿Para qué valor de a la siguiente función es continua en 2?

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=2 \\ ax+1 & \text{si } x\neq 2 \end{cases}$$

Solución:

Queremos encontrar un valor para a tal que $f(x)=ax+1$ esté muy cerca de $f(2)=0$ cuando x esté cerca de 2.

Como la funciones polinomiales son continuas, si x está cerca de 2 entonces $ax+1$ está cerca de $2a+1$.

Pero como queremos que $ax+1$ esté cerca de 0, resolvemos la ecuación:

$$2a+1=0$$

La solución es $a=\frac{-1}{2}$.

Así que si x está cerca de 2, entonces $\frac{-1}{2}x+1$ está cerca de 0.

Ejemplos

TIP

- Las funciones polinomiales son continuas en $\mathbb{R}$.
- Si $Q(x)$ es un polinomio, $a\in\mathbb{R}$ y $Q(a)=0$, entonces se dice que a es una raíz de Q.

Funciones racionales. La función x^n con n entero

Recordamos que una función racional

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

es el cociente de dos polinomios.

Por ejemplo $R(x)=x^n$ con n entero es una función racional ya que:

- Si $n>0$, entonces $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)=x^n \quad Q(x)=1$.
- Si $n=0$, entonces $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)=Q(x)=1$.
- Si $n<0$, entonces $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)=1 \quad Q(x)=x^m$

  donde $m=-n>0$.

Según lo antes visto $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$ y de acuerdo con la continuidad de los cocientes tenemos que cualquier función racional $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en su dominio, o sea, en cada punto donde el denominador no se anula, así;

- Cualquier función racional $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en su dominio natural, (ver la página 66), $\mathbb{R}\setminus\{x\colon Q(x)=0\}$. En particular,
- $\frac{1}{x^n}$ es continua en todo real distinto de 0.

TIP

- Teorema fundamental del álgebra. Si $Q(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $Q(x)$ tiene a lo más n raíces.
- Si $R(x)$ es una función racional cuyo denominador es de grado n, entonces hay más n reales en los que $R(x)$ no está definida.

Ejemplos

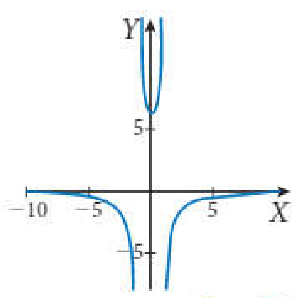


Figura 3.23

1. Analizar la continuidad de la función $Q(x)=\frac{x-6}{x^2-1}$.

Solución:
El denominador es de grado 2 y los puntos donde éste se anula son 1 y -1, así que el dominio de Q es $\setminus\{1,-1\}$ y Q es continua en este conjunto (Figura 3.23).

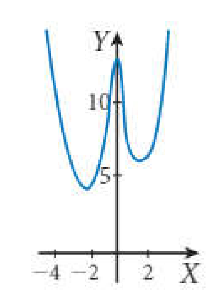


Figura 3.24

2. Analizar la continuidad de la función $Q(x)=\frac{x^4+x^3+12}{x^2+1}$.

Solución:
El denominador es de grado 2 y no se anula en ningún número real, así que el dominio de Q es $\mathbb{R}$ y entonces, Q es continua en $\mathbb{R}$ (Figura 3.24).

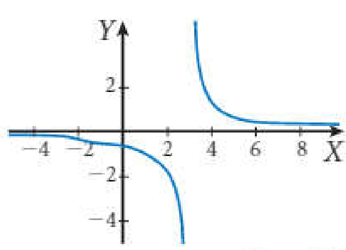


Figura 3.25

3. Analizar la continuidad de la función $Q(x)=\frac{x^4+x^3+12}{(x-3)(x^4+6)}$.

Solución:
El denominador tiene grado 5 y se anula en el entero 3 y solo en ese número. Así que el dominio de Q es $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. Entonces, Q es continua en $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. (Figura 3.25).

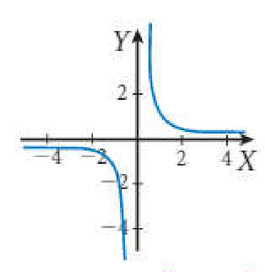


Figura 3.26

4. Analizar la continuidad de la función $Q(x)=\frac{1}{x^3}$.

Solución:
El denominador es de grado 3 y se anula en 0 y solo en ese número. Así que el dominio de Q es $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y Q es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. (Figura 3.26).

Ejercicios

Analiza en cada caso la continuidad de la función dada.

1. $f(x)=3x^5+8x^3-24x+2$
2. $f(x)=-x^3+7x^2-10x$
3. $f(x)=\cos^2 x-8\,\mathrm{sen}\,x$
4. $f(x)=x^3-\frac{1}{x^2}$
5. $f(x)=\frac{x^2+3x-5}{x^6-4x^4}$
6. $f(x)=\frac{\mathrm{sen}\,x}{x^2+7}$
7. $f(x)=(x+2)^3$

Pensamiento crítico

¿Dónde es continua la función $f(x)=\frac{1}{ax+b}$ con $a\neq 0$?

Ejercicios

8. $f(x)=(x^2-1)^2$

9. $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

10. $f(x)=(x^3-x+1)^2$

11. $f(x)=\dfrac{(x+5)(x^2-6)}{(x-8)(x+6)}$

12. $f(x)=\dfrac{1}{x \operatorname{sen} x}$

Las raíces

Recordamos el método geométrico para obtener la raíz cuadrada de un número $a>0$:

En el extremo B de un segmento AB de longitud 1 colocamos otro segmento BC de longitud a, de manera que obtenemos un segmento AC de longitud $1+a$. Construimos un círculo con diámetro AC y levantamos una perpendicular a este segmento a través del punto B, la cual corta al círculo en el punto D. Entonces, BD mide $\sqrt{a}$ (ver Figura 3.27).

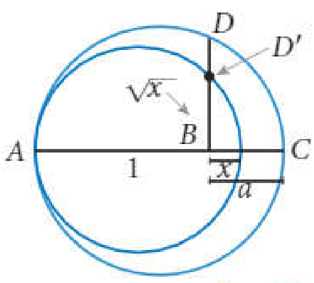


Figura 3.27

Es claro que si repetimos la construcción anterior para una $0<x<a$ y muy parecida a a; es decir, $x \simeq a$, entonces obtenemos un segmento BD' que es parte de BD y cuya longitud es muy parecida a la de BD, o sea, $\sqrt{x} \simeq \sqrt{a}$. Para $x>a$ se puede hacer un argumento similar (ver Figura 3.28), así que:

$$\sqrt{x} \simeq \sqrt{a} \text{ si } x \simeq a$$

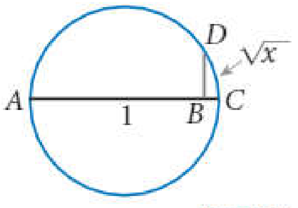


Figura 3.28

O sea, la función $f(x)=\sqrt{x}$ es continua en a.

En 0 la función $f(x)=\sqrt{x}$ es también continua ya que si $x>0$ y $x \simeq 0$, entonces el segmento BD tiene longitud muy pequeña, es decir, parecida a 0.

En resumen:

- La función $\sqrt{x}$ es continua en su dominio: los números reales mayores o iguales que 0, es decir en $[0,\infty)$.

En general tenemos:

- La función raíz enésima $f(x)=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$.
  - Cuando n es impar, está definida en todo $\mathbb{R}$, y es continua ahí.
  - Cuando n es par, únicamente está definida para los números reales mayores o iguales que 0, es decir, en $[0,\infty)$ y es continua ahí.



1. $f(x)=\sqrt{x}-3$.

Solución:

Como $\sqrt{x}$ es continua en su dominio $[0,\infty)$ y la función constante -3 es continua en su dominio $\mathbb{R}$, entonces la suma de estas funciones $\sqrt{x}-3$ es continua en su dominio $[0,\infty)\cap\mathbb{R}=[0,\infty)$ (Figura 3.29).

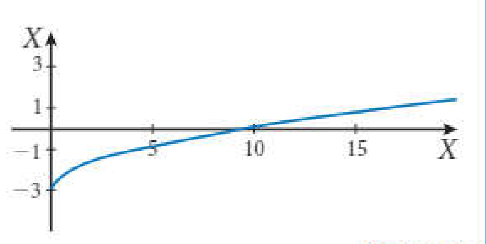


Figura 3.29

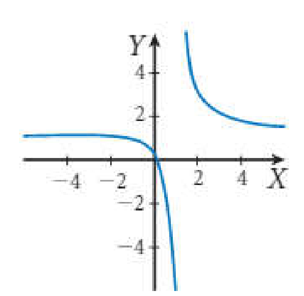


Figura 3.30

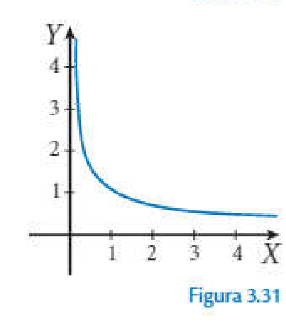


Figura 3.31

Ejemplos

2. $Q(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}+x}{x-1}.$

Solución:

Primero analizamos el numerador. Como $\sqrt[3]{x}$ es continua en su dominio y la función identidad x es continua en su dominio $\mathbb{R}$, entonces la función $\sqrt[3]{x}+x$ es continua en su dominio $\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$.

En cuanto al denominador, sabemos que la función $x-1$ es continua en su dominio $\mathbb{R}$ y solo se anula en 1. Entonces el cociente es continuo en su dominio: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ (Figura 3.30).

3. $R(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

Solución:

La función $\sqrt{x}$ es continua en su dominio $[0,\infty)$ y solo se anula en 0.

Entonces, $R(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en su dominio $[0,\infty)\setminus\{0\}=(0,\infty)$. (Figura 3.31).

Funciones trigonométricas

TIP

La función $f(x)=\sqrt{x}$ es continua en $[0,\infty)$.

Sabemos que las funciones $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ son continuas en $\mathbb{R}$; por consiguiente, cada una de las siguientes funciones que son cocientes obtenidos a partir de ellas

$$\tan x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \csc x=\frac{1}{\operatorname{sen}x}\quad \text{y}\quad \cot x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}=\frac{1}{\tan x}$$

son continuas en todos los números reales a donde no se anula su denominador.

Como:

$$\cos x=0$$

si

$$x\in\left\{\ldots-\frac{3}{2}\pi,-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi,\ldots\right\}$$

y solo en ese caso. Y

$$\operatorname{sen}x=0$$

si

$$x\in\{\ldots-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,\ldots\}$$

y solo en ese caso. Entonces,

TIP

Las funciones tangente y secante son continuas en $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi:\ n\in\mathbb{Z}\right\}$.

De igual forma las funciones cotangente y cosecante son continuas en $\mathbb{R}\setminus\{n\pi: n\in\mathbb{Z}\}$.

- $\tan x$ es continua en su dominio $\setminus\left\{\ldots-\frac{3}{2}\pi,-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi,\ldots\right\}$ (ver Figura 3.32).
- $\sec x$ es continua en su dominio $\setminus\left\{\ldots-\frac{3}{2}\pi,-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi,\ldots\right\}$ (ver Figura 3.33).

Figura 3.32

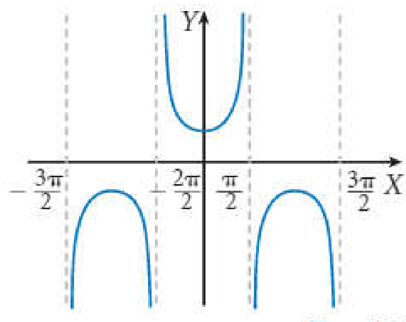


Figura 3.33

- $\csc x$ es continua en su dominio $\mathbb{R} \setminus \{\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$ (ver Figura 3.34).
- $\cot x$ es continua en su dominio $\mathbb{R} \setminus \{\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$ (ver Figura 3.35).

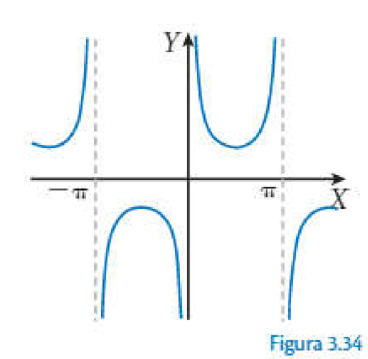


Figura 3.34

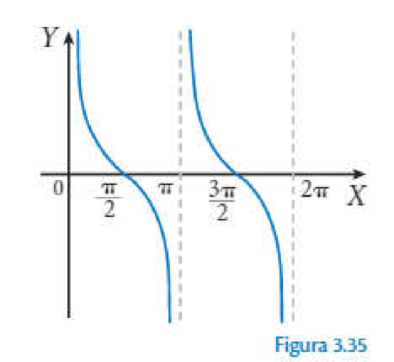


Figura 3.35

Función valor absoluto $|x|$

La función valor absoluto es continua en $\mathbb{R}$.

Solución:
Recordamos que la función valor absoluto está definida como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En cualquier punto $a > 0$ tenemos que si tomamos x muy parecido a a, entonces x y a están del mismo lado respecto al cero, o sea $x > 0$ y por tanto,

$$|x| = x \approx |a| = a;$$

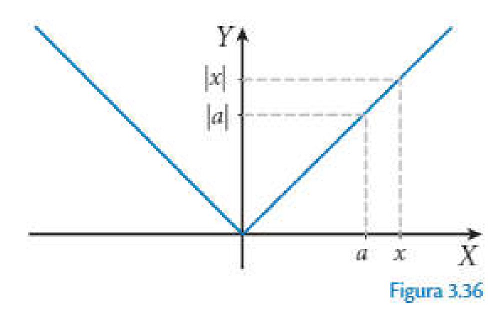


Figura 3.36

es decir, la función $|x|$ es continua en cualquier $a > 0$ (ver Figura 3.36).

De modo similar para $a < 0$, sucede que si tomamos x muy parecido a a, entonces $x < 0$ y por tanto,

$$|x| = -x \approx |a| = -a,$$

porque, como ya vimos, los simétricos de números parecidos son parecidos; o sea la función $|x|$ es continua en cualquier $a < 0$ (ver Figura 3.37).

Cuando $a = 0$ el análisis es un poco diferente porque si tomamos un número x parecido a 0, éste puede estar a la izquierda de 0 $(x < 0)$,

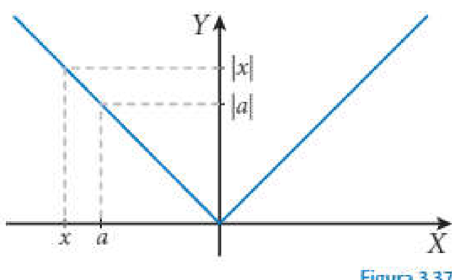


Figura 3.37

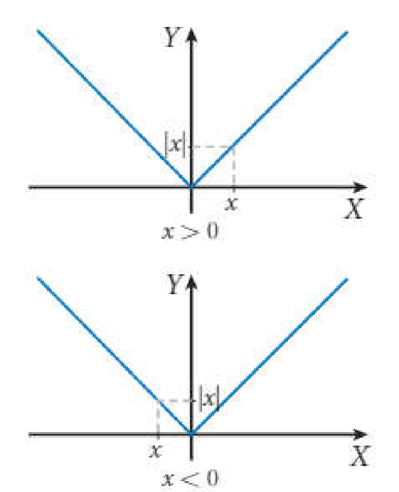


Figura 3.38

coincidir con 0 $(x=0)$, o bien estar a su derecha $(x>0)$; pero en cualquier caso su valor absoluto $|x|=-x, |0|=0$ o $|x|=x$ se parece a 0. Es decir, $|x|$ es también continua en 0 (ver Figura 3.38).

Así,

> $|x|$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

Composición de funciones continuas

Pedro infla un globo con una bomba que introduce $0.5\,\text{m}^3$ de aire por minuto. Si el globo se mantiene esférico, ¿podemos expresar cómo varía su radio con respecto al tiempo? ¿Es continua la función que mide el radio respecto al tiempo?

Solución:
Llamamos $V(t)$ al volumen del globo, medido en m^3, al tiempo t minutos. Como se introduce $0.5\,\text{m}^3 = \frac{1}{2}\,\text{m}^3$ por minuto, tenemos que:

$$V(t)=\frac{t}{2} \tag{3.2}$$

Por otro lado, dado que el globo es esférico, su volumen está dado por

$$V=\frac{4\pi r^3}{3},$$

así que el radio, en términos del volumen es

$$r(V)=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} \tag{3.3}$$

Entonces el radio depende del volumen y éste, a su vez, del tiempo:

$$\begin{aligned} R(t) &= r\big(V(t)\big) \\ &= \left(\frac{3V(t)}{4\pi}\right)^{1/3} \\ &= \left(\frac{3\left(\frac{t}{2}\right)}{4\pi}\right)^{1/3} \\ &= \left(\frac{3t}{8\pi}\right)^{1/3} \end{aligned} \tag{3.4}$$

TIP
La función $f(x)=|x|$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

Así, por ejemplo, el radio del globo, después de 4 minutos es:

$$\begin{aligned} R(4) &= r(V(4)) \\ &= \left(\frac{3(4)}{8\pi}\right)^{1/3} \\ &= \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/3} \\ &= 0.78159 \text{ m} \end{aligned}$$

Para encontrar el radio del globo en un momento t, hemos encontrado el volumen $V(t)$ del globo en el momento t y luego el radio $r(V(t))$ del globo para ese volumen.

Ahora, la función $V(t)=\frac{t}{2}$ que mide el volumen del globo respecto al tiempo es continua, ya que para pequeños cambios en el tiempo el volumen también cambia muy poco. Esto, claro, antes de que el globo se reviente. En ese momento, como el globo deja de existir, la función V tampoco existe.

También la función que mide el radio en términos del volumen $r(V)=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$ es continua, porque si el volumen cambia muy poco, también cambiará poco el radio.

La función que mide el radio del globo en función del tiempo:

$$r(V(t))=\left(\frac{3t}{8\pi}\right)^{1/3}=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3}t^{1/3}$$

es continua por ser producto de una constante por la función continua $t^{1/3}$ así para pequeños cambios en el tiempo, el volumen cambia muy poco y, por tanto, el radio también.

Esto nos lleva al siguiente resultado general:

- La composición $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$, con dominio A, es continua en $a\in A$ si $g(x)$ es continua en a y $f(y)$ es continua en $b=g(a)$.

  La hipótesis del resultado anterior nos dice:

  $$\begin{aligned} g(x) &\approx g(a) \text{ para todo } x\approx a \\ f(y) &\approx f(b) \text{ para todo } y\approx b \end{aligned}$$

  lo cual nos conduce a:

  $$\overbrace{f(g(x))}^{h(x)} \approx \overbrace{f(g(a))}^{h(a)} \text{ para todo } x\approx a.$$

- La composición $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ es continua en su dominio si f y g son continuas en sus dominios.

TIP

Si g es una función continua en su dominio $Dom\ g$, entonces $|g|$, $\operatorname{sen} g$, $\cos g$ son funciones continuas en $Dom\ g$.

TIP

Si g es una función continua en su dominio $Dom\ g$, entonces $\sqrt{g}$ es una función continua en cada $x\in Dom\ g$ que satisfaga que $g(x)\geq 0$.

Ejemplos

1. Si $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=2x+3$, entonces $(f\circ g)(x)=\sqrt{2x+3}$ y $(g\circ f)(x)=2\sqrt{x}+3$ son continuas en sus dominios.

Solución:
Las funciones f y g son continuas en sus dominios:

$$Dom\ f=[0,\infty) \quad \text{y} \quad Dom\ g=\mathbb{R}.$$

Por tanto, $f\circ g$ y $g\circ f$ son continuas en sus dominios, que como vimos en el ejemplo **2** de la página 76, son los siguientes:

- Para la composición $f\circ g$, (Figura 3.39)

$$\begin{aligned} Dom(f\circ g)&=\{x\in Dom\ g \mid g(x)\in Dom\ f\}\\ &=\{x\in\mathbb{R}\mid 2x+3\in[0,\infty)\}\\ &=\left[-\frac{3}{2},\infty\right) \end{aligned}$$

- Para la composición $g\circ f$, (Figura 3.40)

$$\begin{aligned} Dom(g\circ f)&=\{x\in Dom\ f \mid f(x)\in Dom\ g\}\\ &=\{x\in[0,\infty)\mid \sqrt{x}\in\mathbb{R}\}\\ &=[0,\infty) \end{aligned}$$

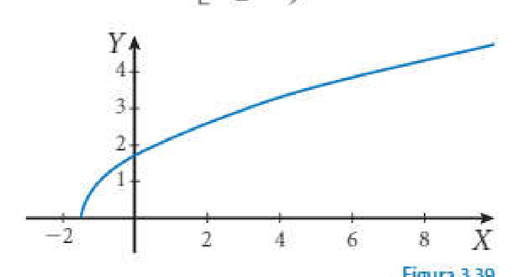


Figura 3.39

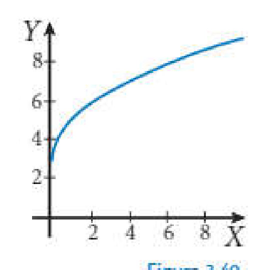


Figura 3.40

2. Si $f(y)=\cos(y)$ y $g(x)=\dfrac{x}{x-3}$, entonces $(f\circ g)(x)=\cos\left(\dfrac{x}{x-3}\right)$ es continua en su dominio.

Solución:
Las funciones f y g son continuas en sus dominios; la segunda por ser una función racional. Dichos dominios son:

$$Dom\ f=\mathbb{R} \quad \text{y} \quad Dom\ g=\mathbb{R}\setminus\{3\}$$

Por tanto, la composición $f\circ g$ es continua en su dominio (Figura 3.41):

$$\begin{aligned} Dom(f\circ g)&=\{x\in Dom\ g \mid g(x)\in Dom\ f\}\\ &=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\ \middle|\ \frac{x}{x-3}\in\mathbb{R}\right\}\\ &=\mathbb{R}\setminus\{3\} \end{aligned}$$

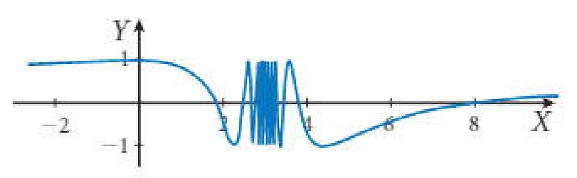


Figura 3.41

3. Si $f(y)=\dfrac{y}{y-8}$ y $g(x)=\dfrac{x+2}{x}$, entonces $(f\circ g)(x)$ es continua en su dominio.

Solución:
Los dominios de f y g son:

$$Dom\ f=\mathbb{R}\setminus\{8\} \quad \text{y} \quad Dom\ g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Así que el dominio de la composición $f \circ g$ es:

$$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom\, g \mid g(x) \in Dom\, f\} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,\middle|\, \frac{x+2}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{8\}\right\}$$

Como la única solución de $\frac{x+2}{x} = 8$ es $x = \frac{2}{7}$ tenemos que:

$$Dom(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{2}{7}\right\}$$

La composición $f \circ g$ es la función:

$$(f \circ g)(x) = \frac{g(x)}{g(x) - 8} = \frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{x+2}{x} - 8} = \frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{-7x+2}{x}} = \frac{x+2}{-7x+2}.$$

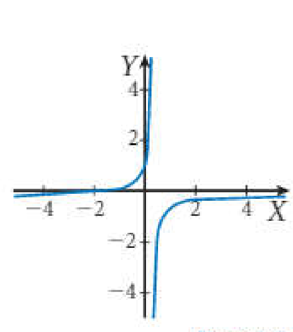


Figura 3.42

Obsérvese que $Dom(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{2}{7}\right\}$ es un subconjunto del dominio natural de $\frac{x+2}{-7x+2}$ que es $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{7}\right\}$, porque el denominador sólo se anula en $x = \frac{2}{7}$.

Como las funciones f y g son funciones racionales, entonces son continuas en sus dominios respectivos y la composición $f \circ g$ es continua en su dominio (ver Figura 3.42).

Ejemplos

Pensamiento crítico

Si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, ¿dónde es continua la función $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$?

Ejercicios

Analiza en cada caso la continuidad de la función dada.

1. $f(x) = |x^2 + x|$
2. $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 1)^{10}$
3. $f(x) = (\operatorname{sen} x + \tan x)^6$
4. $f(x) = \cos(x^4 + 1)$
5. $f(x) = |\cos x|$
6. $f(x) = \operatorname{sen}(2x^4 + 3x - 2)$
7. $f(x) = \sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
8. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+8}{x(x+1)}\right)$
9. $f(x) = \frac{1}{\tan x}$
10. $f(x) = \cot x \csc x$
11. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5}$
12. $f(x) = \cot x \sec^3 x \cos x$

La gráfica en un intervalo de una función continua

Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ continua en su dominio A tiene la propiedad de que si I es un intervalo contenido en A, entonces la gráfica en el intervalo I de la función f no se rompe, es decir, podemos dibujarla sin separar el lápiz del papel.

El intervalo puede ser cerrado, abierto, semiabierto y de cualquier longitud, incluso de longitud infinita. (Figura 3.43)

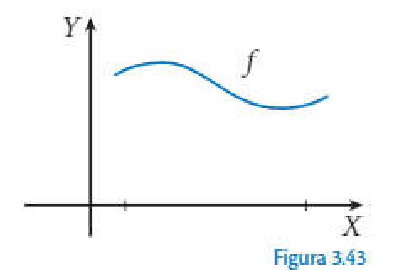


Figura 3.43

Esta propiedad la podemos observar en las gráficas de las funciones continuas consideradas en esta unidad. Al respecto señalamos los siguientes hechos:

- La función $\tan x$ es continua en su dominio y para dibujar la gráfica en el intervalo $(0,\pi)$ tenemos que levantar el lápiz al pasar por $\frac{\pi}{2}$, pero esto no contradice la propiedad establecida al principio de la sección ya que el intervalo $(0,\pi)$ no está contenido en el dominio de la función $\tan x$, debido a que la función no está definida en $\frac{\pi}{2}$. (Figura 3.44)
- Por otra parte, el intervalo $[0,2]$ está contenido en el dominio de la función $[x]$ y la gráfica de $[x]$ en ese intervalo se rompe, eso se debe a que $[x]$ no es continua en 1. (Figura 3.45).

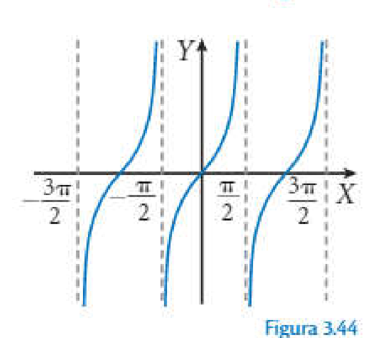


Figura 3.44

Con base en lo anterior, si un punto a está en un intervalo $I \subset Dom\, f$ y la gráfica de f se rompe en a, entonces f no es continua en a. (Figura 3.45).

Como resultado de la propiedad de no rompimiento de la gráfica tenemos el siguiente teorema que tiene múltiples usos en el cálculo:

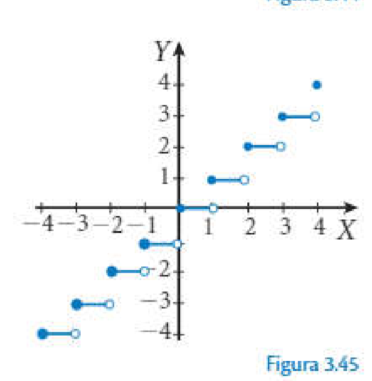


Figura 3.45

Teorema del Valor Intermedio. Supongamos que $f\colon A \to \mathbb{R}$ es continua en su dominio A y el intervalo cerrado $[a,b]$ está contenido en A. Si r es un número que está entre los valores $f(a)$ y $f(b)$, entonces hay un número $c \in [a,b]$ tal que $f(c)=r$.

Es decir, bajo las hipótesis del teorema sucede que la función $f(x)$ toma en $[a,b]$ todos los valores intermedios r comprendidos entre los dos valores $f(a)$ y $f(b)$ que toma en los extremos de ese intervalo.

Justificaremos la validez del teorema a través del siguiente argumento geométrico.

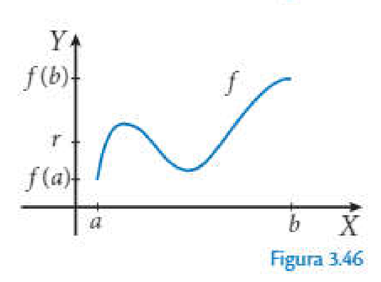


Figura 3.46

Supongamos que $f(a) < f(b)$ y r es un valor intermedio, o sea $f(a) < r < f(b)$. Sobre el eje Y marcamos estos tres valores y en el intervalo $[a,b]$ dibujamos la gráfica de $f(x)$, (ver Figura 3.46).

Ahora trazamos una recta horizontal que pase por el punto r, previamente marcado en el eje Y. Como la gráfica no se rompe, habrá al menos un punto de intersección de esa recta con la gráfica de $f(x)$, (ver Figura 3.47).

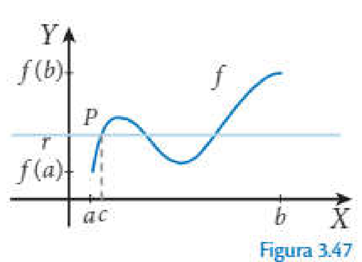


Figura 3.47

Si P es cualquiera de esos puntos, afirmamos que su primera coordenada es un número c que nos sirve. En efecto, como está en la gráfica, las coordenadas de P deben ser $(c, f(c))$ y como P está en la recta horizontal, entonces su segunda coordenada es r; por consiguiente, $f(c)=r$.

Siempre debemos tener presente que son dos los requisitos para que sea válido el teorema, la continuidad de la función f y que $[a,b]$ esté contenido en el dominio de f.

Una consecuencia del teorema del valor intermedio es lo siguiente:

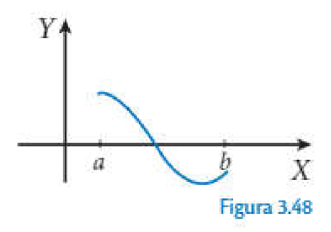
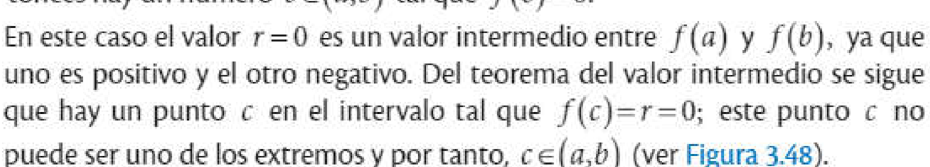


Figura 3.48



- Supongamos que $f: A \to \mathbb{R}$ es continua en su dominio A y el intervalo cerrado $[a,b]$ está contenido en A. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos, entonces hay un número $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

  En este caso el valor $r=0$ es un valor intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$, ya que uno es positivo y el otro negativo. Del teorema del valor intermedio se sigue que hay un punto c en el intervalo tal que $f(c)=r=0$; este punto c no puede ser uno de los extremos y por tanto, $c \in (a,b)$ (ver Figura 3.48).

  Este resultado permite ubicar las raíces de polinomios y encontrar sus valores con el grado de precisión que deseemos, como verás a continuación.

Ejemplos

1. Mostrar que la función polinomial $f(x)=4x^5-3x^4+x^3-10x^2-3x-7$ tiene al menos una raíz.

Solución:

Lo que debemos hacer es buscar dos números para los cuales la función evaluada en ellos tenga signos contrarios.

Evaluamos la función en cero:

$$f(0)=4(0)^5-3(0)^4+(0)^3-10(0)^2-3(0)-7=-7<0,$$

si la evaluamos en 1 obtenemos:

$$f(1)=4(1)^5-3(1)^4+(1)^3-10(1)^2-3(1)-7=-18<0.$$

Como en ambos puntos la función es negativa, evaluamos en otro punto, por ejemplo en 2:

$$f(2)=4(2)^5-3(2)^4+(2)^3-10(2)^2-3(2)-7=35>0.$$

Como $f(1)<0$ y $f(2)>0$, entonces existe $c \in (1,2)$ tal que $f(c)=0$. O sea, hay una raíz en el intervalo $(1,2)$.

2. Encontrar la raíz que está entre 1 y 2 del polinomio del ejemplo anterior con una cifra decimal exacta.

Solución:

Llamemos r a la raíz de dicho polinomio. Sabemos que $1<r<2$ así que la parte entera de r es 1.

Evaluamos f en 1.5:

$$f(1.5)=-15.438<0$$

Como $f(1)<0$ y $f(1.5)<0$ no podemos saber si hay una raíz entre 1 y 1.5, pero como $f(1.5)<0$ y $f(2)>0$ entonces por el teorema anterior, hay una raíz r que está entre 1.5 y 2.

Seguimos aproximando, nos conviene evaluar el polinomio en puntos con una sola cifra decimal, puesto que así queremos la raíz.

Pensamiento crítico

Con relación al teorema del valor intermedio considera la siguiente situación:

la función $f(x)=[x]$ está definida en el intervalo $[0,1]$ y satisface que $f(0)=0$ y $f(1)=1$.

Si $r=\frac{1}{2}$, entonces $f(0)<r<f(1)$ y, sin embargo, no existe $c \in [0,1]$ que satisfaga $f(c)=r=\frac{1}{2}$.

¿Por qué?

Ejemplos

Evaluamos f en 1.7:

$$f(1.7) = -4.349$$

puesto que $f(1.7) < 0$ y $f(2) > 0$, la raíz está entre 1.7 y 2. Evaluamos en 1.8:

$$f(1.8) = 5.1219$$

como $f(1.7) < 0$ y $f(1.8) > 0$, entonces hay una raíz que está entre 1.7 y 1.8, así que r es igual a 1.7 con una cifra decimal exacta. (Figura 3.49).

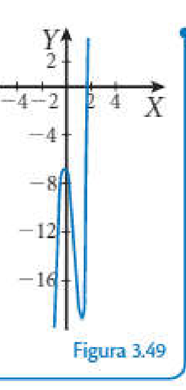


Figura 3.49

Ejercicios

En cada caso, encuentra un par de números enteros consecutivos tales que la función polinomial dada tenga una raíz que esté entre ellos.

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x^3 - 12x - 16$
2. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 32x + 16$
3. $f(x) = 7x^5 - 18x^4 - 11x^3 - 43x^2 - 18x - 25$
4. $f(x) = 3x^5 + 10x^4 + 16x^3 + 27x^2 + 20x + 14$



En esta sección te invitamos a visitar varios sitios que contienen material relacionado con el concepto de *continuidad*. Algo de ese material está desarrollado por los autores de este libro, pero mucho más ha sido elaborado por personas de todo el mundo que tienen interés en las matemáticas.

- http://atenea.matem.unam.mx Éste es un sitio del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en el cual los investigadores del Instituto están creando material para cursos en línea. Puedes entrar como invitado sin necesidad de registrarte. Una vez dentro del sitio, elige la categoría "Cálculo diferencial e integral", dentro de ella, el curso "Cálculo I" y entra a las lecciones de la sección "Continuidad".
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web Sitio del Ministerio de Educación, Salud y Deporte del Gobierno español que contiene unidades didácticas y recursos interactivos desarrollados con la herramienta Descartes. Estos materiales fueron elaborados por profesores de enseñanza media. Selecciona "Aplicaciones" y luego "Análisis"; encontrarás varias lecciones relativas al tema de continuidad que estudiaste en esta unidad.
- http://es.wikipedia.org La enciclopedia en línea Wikipedia es uno de los sitios de referencia para encontrar información relacionada con la ciencia y la cultura. En el buscador escribe: Función continua. Hojea las primeras secciones de este documento para ampliar los temas vistos en esta unidad.
- http://newton.matem.unam.mx/geolab En este sitio puedes descargar el programa Geolab y el curso para aprender a utilizarlo. En las secciones de Mundo virtual te guiaremos para realizar algunas construcciones relacionadas con los temas de este libro.

Construcciones con Geolab

En la unidad anterior aprendiste a introducir fórmulas en Geolab para dibujar gráficas de funciones, ahora vamos a ver cómo introducir varias fórmulas para dibujar funciones dadas a pedazos.

1. Construcción de funciones dadas a pedazos.

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Elige el constructor "Gráfica de función" en el menú "Define funciones". En la ventana aparecen cuatro renglones: "a=", "b=", "y=", "pasos". Las dos primeras indican los extremos del intervalo donde está definida la función.

Para la primera parte de la función introduce los valores:

$a =$	-10
$b =$	0
$y =$	$2*\cos(t_)$
pasos	100

ahora construye otra función con los valores:

$a =$	0
$b =$	10
$y =$	$3*t_+2$
pasos	100

Para Geolab éstas son dos funciones diferentes, pero como pusimos el extremo derecho del dominio de la primera función igual a cero, y el extremo izquierdo de la segunda función también igual a cero, podemos interpretar como que es una sola función.

Podemos observar que ambas partes de la función valen 2 para $x=0$, por lo que la función dada a pedazos es continua en 0.

Resumen de la unidad

- La suma de dos funciones continuas en a es continua en a.
- La diferencia de dos funciones continuas en a es continua en a.
- El producto de una constante por una función continua en a es continuo en a.
- El producto de dos funciones continuas en a es continuo en a.
- La función simétrica de una función continua en a es continua en a.
- Las potencias enteras positivas de una función continua en a son continuas en a.
- El recíproco de una función continua en a, que no se anula en a, es continuo en a.
- El cociente de dos funciones continuas en a, cuyo denominador no se anula en a, es continuo en a.
- La composición $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ es continua en su dominio si f y g son continuas en su dominio.

Ejercicios de repaso

En cada caso, encuentra el dominio de la función dada y justifica la continuidad de la misma.

1. $f(x)=x^6-3x^4+2$

2. $f(x)=x^3+2x\operatorname{sen}x$

3. $f(x)=\sqrt{x^3}+\cos x$

4. $f(x)=\dfrac{(x-2)(x^2-16)}{(x+8)(x^2+1)}$

5. $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{(x^2-4)(x-4)}$

6. $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^3+1}$

7. $f(x)=\sqrt{1+\cos^2(x^3+2)}$

8. $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$

9. $f(x)=\tan^3 x+\cos x$

10. $f(x)=\cos(\csc x)$

11. $f(x)=\tan(\operatorname{sen}x)$

12. $f(x)=\sec(\cos(x^2))$

En cada caso, muestra que la función polinomial dada tiene al menos una raíz real.

13. $f(x)=x^3-\dfrac{1}{20}x^2-\dfrac{49}{40}x+\dfrac{1}{2}$

14. $f(x)=\dfrac{1}{4}x^5+\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{37}{24}x^3-\dfrac{5}{2}x^2-\dfrac{5}{6}x-\dfrac{4}{3}$

15. $f(x)=x^5+4x^4+\dfrac{17}{4}x^3+4x^2+x+\dfrac{3}{4}$

16. $f(x)=\dfrac{1}{60}x^5+\dfrac{1}{20}x^4-\dfrac{7}{36}x^3-\dfrac{17}{60}x^2-\dfrac{1}{15}x-\dfrac{1}{10}$

Autoevaluación

1. La función $f(x)=\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)x$ es continua en:

a. $\mathbb{R}$

b. $\mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{3}{2},2\right\}$

c. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

d. $\mathbb{R}\setminus\left\{0,-\frac{3}{2},2\right\}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 100 y 102.

2. La función $f(x)=\frac{x^3+2x^2-35x}{x^2-2x-35}$ es continua en:

a. $\mathbb{R}\setminus\{-5,7,0\}$

b. $\mathbb{R}\setminus\{5,7,0\}$

c. $\mathbb{R}\setminus\{5,-7\}$

d. $\mathbb{R}\setminus\{-5,7\}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 103.

3. Si $f(x)=\cos x$ con $x\in[0,2\pi]$ y $g(x)=\sqrt{x}$, entonces $(g\circ f)$ es continua en:

a. $[0,2\pi]$

b. $\mathbb{R}$

c. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$

d. $[0,\pi]$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 106.

4. La función $f(x)=\left|\frac{28x^2-x-15}{x-1}\right|$ es continua en:

a. $\mathbb{R}$

b. $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{7},\frac{3}{4},1\right\}$

c. $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{7},\frac{3}{4}\right\}$

d. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 109.

5. La función polinomial

$$f(x)=3x^5+2x^4+6x^3+4x^2+3x+2=0$$

tiene una raíz real en el intervalo:

a. $[1,2]$

b. $[-3,-2]$

c. $[-1,0]$

d. $[3,4]$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 113.

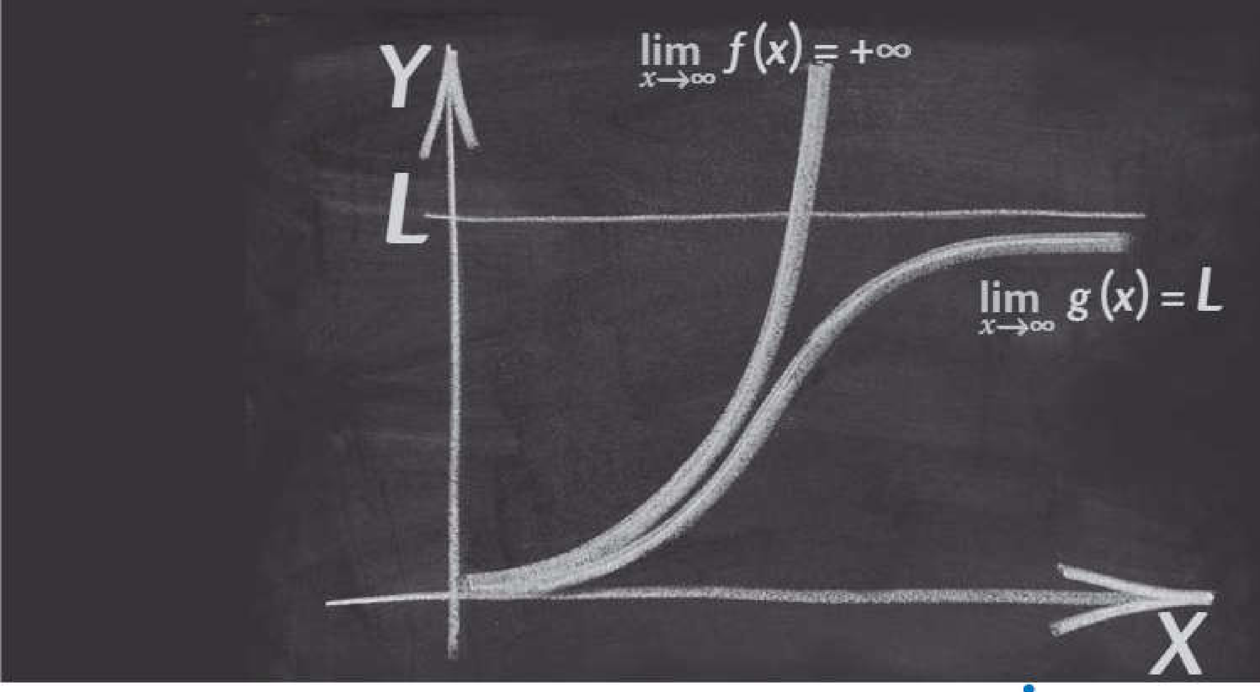
Heteroevaluación

1. Analiza la continuidad de la función $f(x)=\frac{x^2-6x-72}{\sqrt{x^2+14x+52}}$.

2. Analiza la continuidad de la función $f(x)=\frac{x}{x^2-2}+\sqrt{4-x^2}$.

3. Analiza la continuidad de la función $f(x)=\left|\frac{1}{\tan x}\right|$.

4. Encontrar dos números enteros consecutivos de tal manera que la función
$f(x)=5x^5-6x^4-17x^3-38x^2-22x-32$
tenga una raíz que esté entre ellos.



Louis Cauchy propuso el concepto de límite.



Límites de funciones

El concepto de límite es fundamental en el estudio de las funciones. Nosotros hemos preferido, a diferencia de otros textos de *Cálculo*, introducirlo después del concepto de la continuidad de funciones, que consideramos más intuitivo. Decimos que una función f tiene límite L en un punto x_0 si para los números $x \neq x_0$ suficientemente cercanos a x_0 los valores $f(x)$ se parecen mucho a L. La función puede estar o no definida en x_0. En el caso de que la función f es continua en x_0, el valor del límite L es $f(x_0)$, así que el estudio del límite nos da información del comportamiento de la función cerca de x_0 cuando f no es continua en x_0 e incluso cuando ni siquiera está definida en el punto.

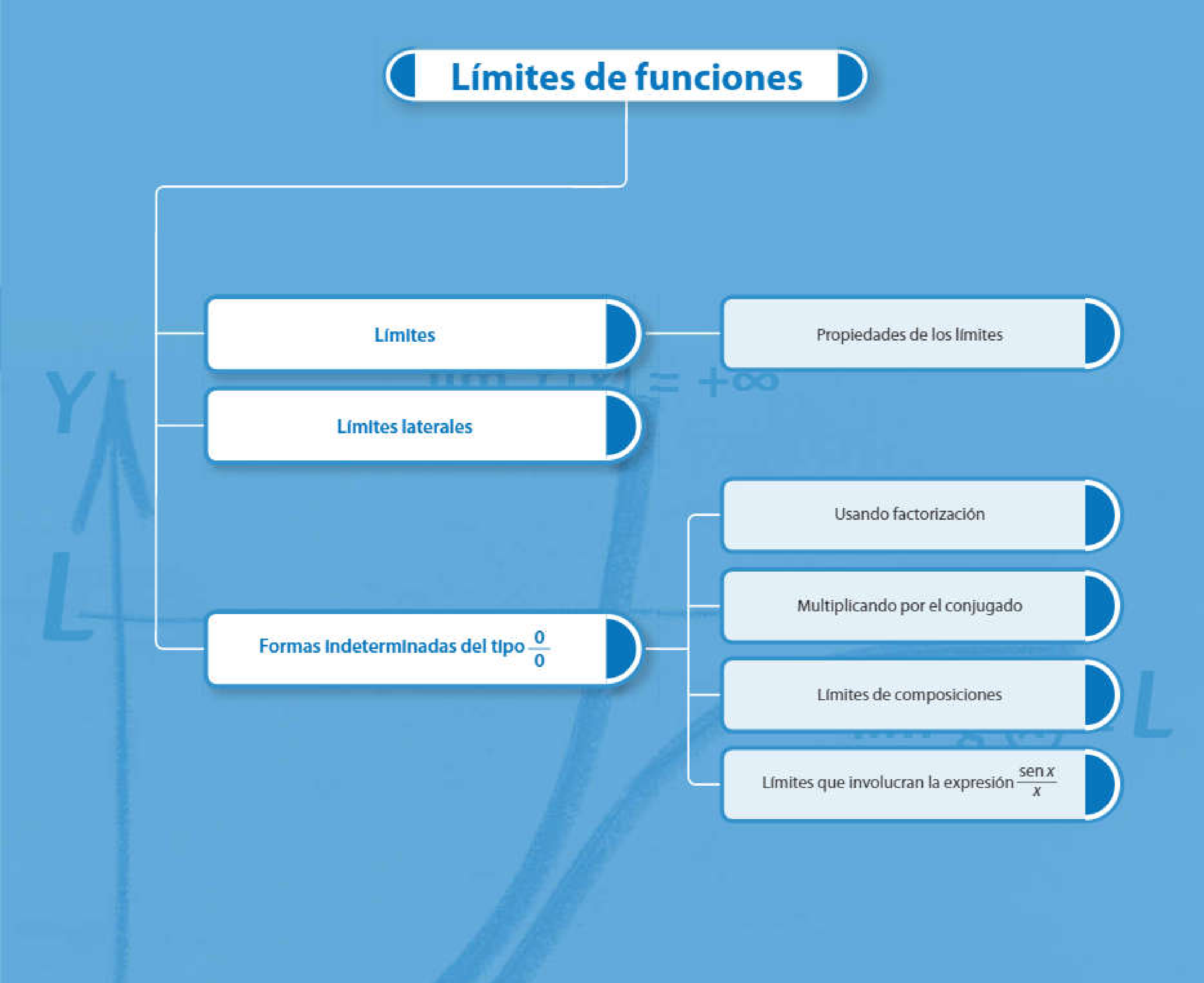
Una de las grandes herramientas del cálculo, la derivada, depende del concepto del límite de una función; por ello es importante entenderlo lo mejor posible.

Es difícil asimilar la definición rigurosa del límite en un primer curso de Cálculo, por lo que hemos optado por manejar la idea intuitiva de "estar cerca de". Como hicimos en el caso de la continuidad; estudiamos el límite con relación a las operaciones algebraicas de funciones: suma, resta, multiplicación, división y composición. Esto nos lleva a lo que se conoce como el álgebra de los límites.

Damos numerosos ejemplos en los que se llega a una de las expresiones llamadas indeterminaciones, $\frac{0}{0}$, que resulta al tratar de evaluar un límite mediante el uso del álgebra de los límites. En tales casos hay que manipular la función considerada para, de ser posible, determinar el valor del límite considerado.

Los límites infinitos y cuando x tiende a ∞ o $-\infty$ se verán en una unidad posterior.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.



Límites

Tabla 4.1

x	f (x)
2	7
1.5	6.5
1.25	6.25
1.12	6.12
1.06	6.06
1.03	6.03
1.01	6.01

Tabla 4.2

x	f (x)
0	5
0.5	5.5
0.75	5.75
0.87	5.87
0.95	5.95
0.98	5.98
0.99	5.99

La función:

$$f(x)=\frac{x^2+4x-5}{x-1}$$

no está definida en $x=1$. ¿Será posible definir una función F que sea igual a f excepto en 1, que sí esté definida en 1 y además sea continua en ese punto?

Solución:

El dominio de la función f es $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Como f no está definida en 1, no hay punto de la gráfica que corresponda a este número. Esto lo señalamos colocando un pequeño círculo en la gráfica. Observemos en las Tablas 4.1 y 4.2 el comportamiento de f alrededor de 1.

Hemos considerado puntos del dominio de la función f cercanos a 1, que conforme nos aproximamos a $x=1$, los valores de la función se acercan a 6 (ver Figura 4.1). Entonces si definimos

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x-5}{x-1} & \text{si } x\neq 1\\ 6 & \text{si } x=1\end{cases}$$

esta función es continua en 1.

En este caso escribimos:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x-1}=6$$

Figura 4.1

en vista de la siguiente definición.

Definición

Consideremos una función $f(x)$ definida en un intervalo (a,b) excepto quizás en un punto $c\in(a,b)$.

Escribimos

$$\lim_{x\to c} f(x)=L$$

y se lee, "límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es igual a L", si $f(x)$ se aproxima a L, conforme x se aproxima a c. Es decir, L es el valor que debe tomar la función $f(x)$ en c para ser continua en c. Así, los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica de f se parecen al punto (c, L) a medida que x se aproxima a c.

Ejemplos

1. Encontrar $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$.

Solución:

El dominio de la función es $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Consideramos algunos valores de la función $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ cerca del punto $x=-2$ (ver Tablas 4.3 y 4.4).

Observamos que la función no está definida en -2; sin embargo, los valores de la función se aproximan a -4 conforme x se acerca a -2. Más aún, el valor que debería tomar la función en $x=-2$ para ser continua en ese punto es -4 (ver Figura 4.2).

Pensamiento crítico

Si $f(x)\neq g(x)$ para cualquier x en un intervalo I y $c\in I$, entonces ¿$\lim_{x\to c} f(x)\neq \lim_{x\to c} g(x)$?

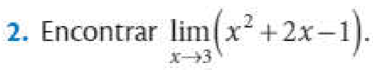
Por lo tanto, $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$.

Observa que los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica están cerca de $(2,-4)$ cuando x se aproxima a -2.

Figura 4.2

Tabla 4.3	
x	$f(x)$
−1	−3
−1.5	−3.5
−1.75	−3.75
−1.85	−3.85
−1.95	−3.95
−1.98	−3.98
−1.99	−3.99

Tabla 4.4	
x	$f(x)$
−3	−5
−2.5	−4.5
−2.25	−4.25
−2.12	−4.12
−2.06	−4.06
−2.03	−4.03
−2.01	−4.01



2. Encontrar $\lim_{x \to 3}\left(x^2+2x-1\right)$.

Solución:

El dominio de la función es $\mathbb{R}$, entonces $f(x)=x^2+2x-1$ sí está definida en 3. Consideramos algunos valores de la función cerca del punto $x=3$ (ver Tablas 4.5 y 4.6).

Observamos que los valores de la función se aproximan a 14 ver Figura 4.3 conforme x se acerca a 3 que es precisamente el valor de $f(3)$. Así, $\lim_{x \to 3} f(x) = 14$ y la función f es continua en $x=3$.

Por lo tanto, $\lim_{x \to 3}\left(x^2+2x-1\right)=14$.

Figura 4.3

Tabla 4.5	
x	$f(x)$
2	7
2.5	10.25
2.75	12.06
2.85	12.82
2.95	13.6
2.98	13.84
2.99	13.92

Tabla 4.6	
x	$f(x)$
4	23
3.5	18.25
3.25	16.06
3.12	14.97
3.06	14.48
3.03	14.24
3.01	14.08



3. Encontrar $\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$.

Solución:

El dominio de la función es $\mathbb{R} \setminus \{-5,5\}$ y su gráfica se representa en la Figura 4.4.

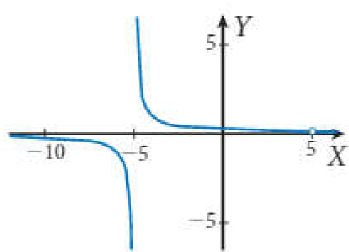


Figura 4.4

Consideremos algunos valores cercanos a $x=5$ (ver Tablas 4.7 y 4.8).

Observamos que los valores de la función se aproximan a $0.1=\frac{1}{10}$ conforme x se acerca a 5, a pesar de que f no está definida en 5. El valor que debería tomar la función en $x=5$ para ser continua ahí es $\frac{1}{10}$ así que

$$\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \frac{1}{10}$$

Veamos un acercamiento de la gráfica de la función que se representa en la Figura 4.5 (las escalas consideradas en los ejes son distintas).

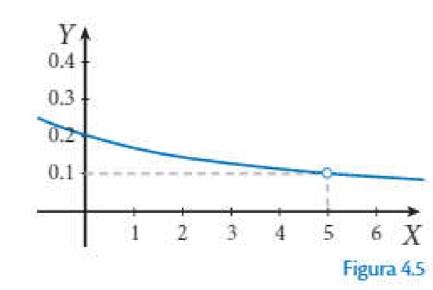


Figura 4.5

Tabla 4.7	
x	$f(x)$
4	0.1111
4.5	0.1052
4.75	0.1026
4.85	0.1015
4.95	0.1005
4.98	0.1002
4.99	0.1001

Tabla 4.8	
x	$f(x)$
6	0.0909
5.5	0.0952
5.25	0.0975
5.12	0.0988
5.06	0.0994
5.03	0.0997
5.01	0.0999



Tabla 4.9

x	$f(x)$
7	0.1715
7.5	0.1690
7.75	0.1678
7.85	0.1674
7.95	0.1669
7.98	0.1668
7.99	0.1667

Tabla 4.10

x	$f(x)$
9	0.1623
8.5	0.1644
8.25	0.1655
8.12	0.1661
8.06	0.1664
8.03	0.1665
8.01	0.1666

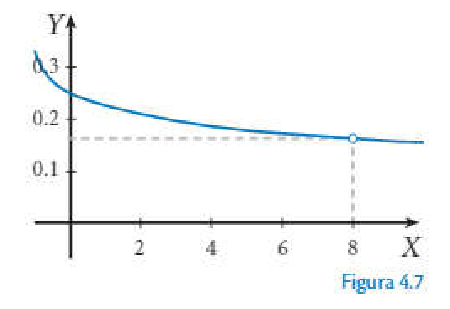


Figura 4.7

4. Encontrar
$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$.

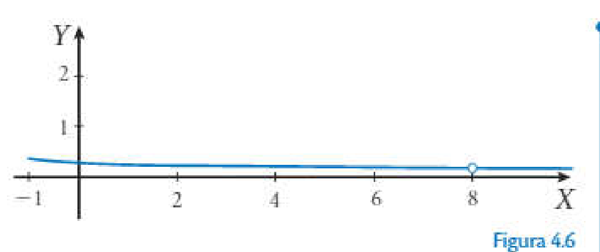


Figura 4.6

Solución:
El dominio de la función es $[-1,8)\cup(8,\infty)$.

Consideremos algunos valores de $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$ para valores cercanos a $x=8$ (ver Tablas 4.9 y 4.10).
Observamos en la Figura 4.6 que los valores de la función se aproximan a $0.16666\cdots=\frac{1}{6}$ conforme x se acerca a 8, a pesar de que f no está definida en 8. El valor que debería tomar la función en $x=8$ para ser continua ahí es $\frac{1}{6}$. Así

$$\lim_{x\to 8}\left(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}\right)=\frac{1}{6}$$

Veamos un acercamiento de su gráfica en la Figura 4.7, se usó una escala diferente en cada eje.

5. Si

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\in[-3,-2)\cup(-2,2]\\ 8 & \text{si } x=-2\end{cases}$$

encontrar el $\lim_{x\to -2} f(x)$.

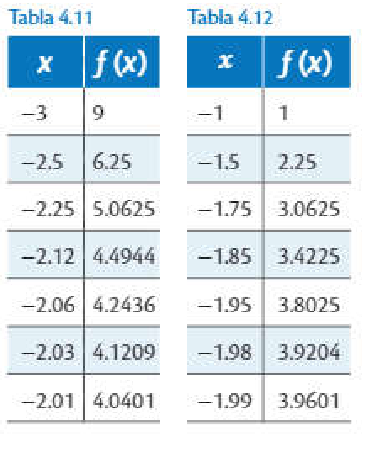


Tabla 4.11

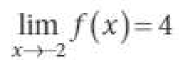
x	$f(x)$
−3	9
−2.5	6.25
−2.25	5.0625
−2.12	4.4944
−2.06	4.2436
−2.03	4.1209
−2.01	4.0401

Tabla 4.12

x	$f(x)$
−1	1
−1.5	2.25
−1.75	3.0625
−1.85	3.4225
−1.95	3.8025
−1.98	3.9204
−1.99	3.9601

Solución:
Consideremos algunos valores cercanos a $x=-2$ (ver Tablas 4.11 y 4.12).

Observamos en la Figura 4.8 que los valores de la función se aproximan a 4 conforme x se acerca a −2, a pesar de que 4 no es el valor que toma f en −2. Por lo tanto,



$$\lim_{x\to -2} f(x)=4$$

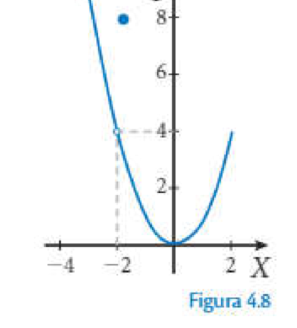


Figura 4.8

y el valor que debería tomar la función en $x=-2$ para ser continua en ese punto es 4.

Ejemplos

Uno de los resultados más importantes de límites es el siguiente:

> Una función f es continua en $c\in(a,b)\subset Dom\ f$ si y solo si
> $$\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$$

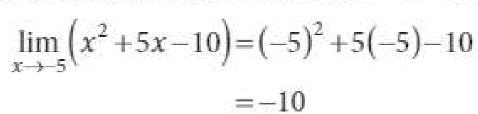
(4.1)

Ejemplos



1. Evaluar $\lim_{x\to -5}\left(x^2+5x-10\right)$.

Solución:
Como el polinomio es una función continua en $x=-5$ ver Figura 4.9, entonces:



$$\lim_{x\to -5}\left(x^2+5x-10\right)=(-5)^2+5(-5)-10$$
$$=-10$$

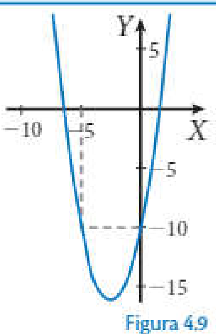


Figura 4.9

2. Evaluar $\lim_{x\to\pi}\cos x$.

Solución:
Como la función coseno es continua en $x=\pi$ ver Figura 4.10, entonces:

$$\lim_{x\to\pi}\cos x=\cos\pi=-1$$

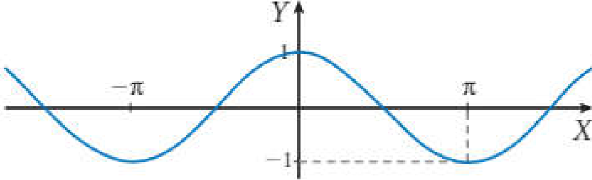


Figura 4.10

3. Evaluar $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x$.

Solución:
Como la función seno es continua en $x=0$ ver Figura 4.11, entonces:

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}0$$
$$=0$$

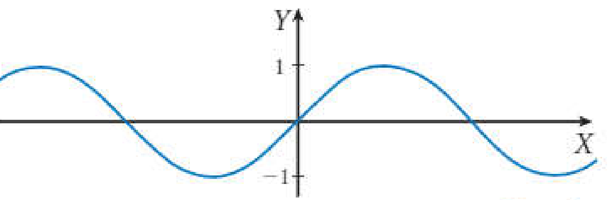


Figura 4.11

4. Evaluar $\lim_{x\to 7}3$.

Solución:
Como la función constante $f(x)=3$ es continua en $x=7$ ver Figura 4.12, entonces:

$$\lim_{x\to 7}3=3$$

Lo anterior sucede para cualquier función constante, es decir:

> Si k es una función constante, $\lim_{x\to c}k=k$ para cualquiera que sea el valor de c.

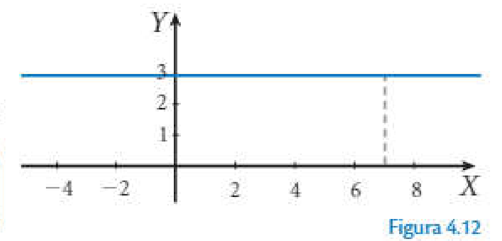


Figura 4.12

Pensamiento crítico

¿Cuánto deben valer a y b para que la función $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+x-2$ cumpla que $\lim_{x\to 1}f(x)=6$ y $\lim_{x\to -1}f(x)=4$?

Ejercicios

En cada caso, determina $\lim_{x\to a}f(x)$. Utiliza una calculadora para hacer una tabla, como la del ejemplo introductorio, de los valores de f para números cercanos a a.

1. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4};\ a=-4$

2. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9};\ a=3$

3. $f(x)=\dfrac{64-x^2}{x+8};\ a=-8$

4. $f(x)=\dfrac{x^2-4x-21}{x-7};\ a=7$

Ejercicios

5. $f(x)=\dfrac{2x^2+11x-6}{x+6}$; $a=-6$

6. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$; $a=1$

7. $f(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}-1}{x-4}$; $a=4$

8. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}-3}{x-11}$; $a=11$

9. $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[1,5)\cup(5,20] \\ -2 & \text{si } x=5 \end{cases}$; $a=5$

10. $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 5 & \text{si } x=0 \end{cases}$; $a=0$

11. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-6 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ -2 & \text{si } x=-1 \end{cases}$; $a=-1$

12. $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{5}-5x+2 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\{-4\} \\ 5 & \text{si } x=-4 \end{cases}$; $a=-4$

Propiedades de los límites

Pensamiento crítico

¿Cuánto debe valer b para que la función

$$g(x)=\begin{cases} x^3+x^2-1 & \text{si } x\neq -1 \\ b & \text{si } x=-1 \end{cases}$$

sea continua en $x=-1$?

Si f y g son dos funciones tales que $\lim_{x\to c} f(x)=L$ y $\lim_{x\to c} g(x)=M$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces:

- $\lim_{x\to c}(f+g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)=L+M.$
- $\lim_{x\to c}(f-g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)=L-M.$
- $\lim_{x\to c}(\alpha f)(x)=\alpha\lim_{x\to c} f(x)=\alpha L.$
- $\lim_{x\to c}(fg)(x)=\lim_{x\to c} f(x)\lim_{x\to c} g(x)=LM.$
- Si además $\lim_{x\to c} g(x)=M\neq 0$, entonces $\lim_{x\to c}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}=\dfrac{L}{M}.$

Ejemplos

1. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$ del ejemplo introductorio de la página 120 y la función $g(x)=\sqrt{x^2+15}$. Calcular $\lim_{x\to 1}(f+g)(x)$; $\lim_{x\to 1}(f-g)(x)$; $\lim_{x\to 1}(fg)(x)$ y $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

Solución:

Recordemos primero que

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x-1}=6$$

Como $g(x)=\sqrt{x^2+15}$ es continua en su dominio, lo es en particular en $x=1$ y por tanto,

$$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=\sqrt{1^2+15}=4$$

Pensamiento crítico

Encuentra los puntos $c\in[0,2\pi]$ que satisfacen $\lim_{x\to c}\operatorname{sen} x=\lim_{x\to c}\cos x$.

Entonces:

- $\lim_{x\to 1}(f+g)(x)=\lim_{x\to 1}f(x)+\lim_{x\to 1}g(x)=6+4=10.$
- $\lim_{x\to 1}(f-g)(x)=\lim_{x\to 1}f(x)-\lim_{x\to 1}g(x)=6-4=2.$
- $\lim_{x\to 1}(fg)(x)=\lim_{x\to 1}f(x)\lim_{x\to 1}g(x)=6\times 4=24.$
- Como $\lim_{x\to 1}g(x)=4\neq 0$, entonces $\lim_{x\to 1}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to 1}f(x)}{\lim_{x\to 1}g(x)}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$

2. Si $f(x)=\operatorname{sen}x$ y $g(x)=2x$. Calcular $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(f+g)(x)$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(f-g)(x)$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(fg)(x)$ y $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Solución:
Como f y g son continuas en $\frac{\pi}{2}$, tenemos que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1 \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x)=2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

Entonces:

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(f+g)(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)+\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}g(x)=1+\pi.$
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(f-g)(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}g(x)=1-\pi.$
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(fg)(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}g(x)=1(\pi)=\pi.$
- Como $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}g(x)=\pi\neq 0$, entonces $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}g(x)}=\frac{1}{\pi}.$

3. Si $f(x)=\tan x$ y $g(x)=\csc x$. Calcular $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(f+g)(x)$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(f-g)(x)$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(fg)(x)$ y $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Solución:
Como f y g son continuas en $\frac{\pi}{4}$, tenemos que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x=\tan\frac{\pi}{4}=1 \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\csc x)=\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

Entonces:

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(f+g)(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)+\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}g(x)=1+\sqrt{2}.$
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(f-g)(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}g(x)=1-\sqrt{2}.$
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(fg)(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}g(x)=1\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}.$
- Como $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}g(x)=\sqrt{2}\neq 0$, entonces $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)}{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}g(x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Ejemplos

Ejercicios

Calcula los límites siguientes.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(x+6)$
2. $\lim\limits_{x\to -1}(2x-5)$
3. $\lim\limits_{x\to -5}(-x+5)$
4. $\lim\limits_{x\to -9}\left(x^2+2x-7\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^3-2x^2+1\right)$
6. $\lim\limits_{x\to -1}\left(5x^4+10x^3+x\right)$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^5+8x^4-12x-11\right)$
8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{-x^7+5x^5-20}{5}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}(\tan x)$
10. $\lim\limits_{x\to -9}\dfrac{8}{x+13}$
11. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{x-3}$
12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+11x-6}{3x-1}$
13. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{5x^2-23x-10}{5x+3}$
14. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-4x-8}{x-\frac{1}{3}}$
15. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{5}}\dfrac{25x^3+20x^2+3x}{5x+2}$
16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x-14}{x+2}$
17. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+4}$
18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+9x-35}{5x^2-2x-3}$
19. $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{3x^2+6}$
20. $\lim\limits_{x\to 7}\sqrt{x^2-25}$
21. $\lim\limits_{x\to -25}\sqrt[3]{3x+12}$
22. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[4]{x^4+65}$
23. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sec x\cot x)$
24. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x+\cos x)$
25. $\lim\limits_{x\to \pi}(\cos x\tan x)$

Límites laterales

Consideremos el siguiente caso:

Encontrar $\lim\limits_{x\to 5}[x]$.

Solución:

La gráfica de la función $[x]$ en el intervalo $[0,6]$ es representada en la Figura 4.13. Consideremos algunos valores cercanos a $x=5$ (ver Tablas 4.13 y 4.14).

Observamos que los valores no se aproximan a un solo número sino a dos, dependiendo de si nos acercamos por la derecha o por la izquierda al punto $x=5$. En este caso el límite no existe. De manera simbólica, escribimos:

Tabla 4.13

x	$f(x)$
4.2	4
4.5	4
4.75	4
4.85	4
4.95	4
4.98	4
4.99	4

Tabla 4.14

x	$f(x)$
5	5
5.5	5
5.25	5
5.12	5
5.06	5
5.03	5
5.01	5

$$\lim_{x\to 5^-}[x]=4 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 5^+}[x]=5$$

El símbolo $x\to 5^-$ indica que nos acercamos a 5 por valores menores que cinco y decimos que nos acercamos a cinco por la izquierda.

El símbolo $x\to 5^+$ indica que nos acercamos a 5 por valores mayores que cinco y decimos que nos acercamos a cinco por la derecha.

Los valores que obtuvimos son llamados límites laterales de $[x]$.

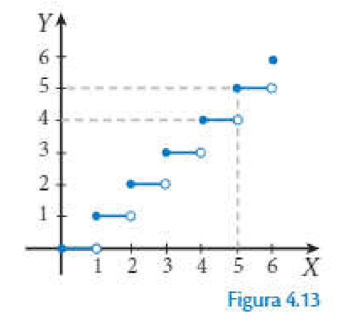


Figura 4.13

Si
$$\lim_{x\to c^+} f(x)=L=\lim_{x\to c^-} f(x),$$
entonces
$$\lim_{x\to c} f(x)=L \qquad (4.2)$$
y viceversa.

Ejemplos

1. Encontrar $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ si

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+5} & \text{si } -5\le x\le 4\\ x-1 & \text{si } 4<x\le 6\end{cases}$$

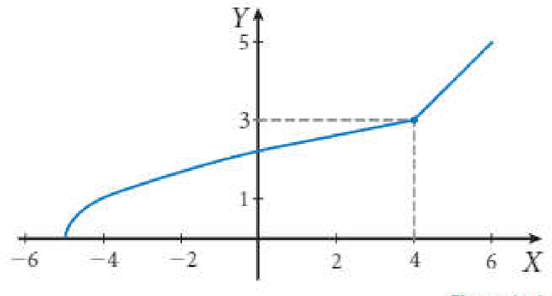


Figura 4.14



Solución:
Calculamos los límites laterales en 4, es decir,

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\sqrt{x+5} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}(x-1)$$
$$=\sqrt{9} \qquad\qquad =4-1$$
$$=3 \qquad\qquad =3$$

Como los límites laterales existen y son iguales (Figura 4.14) entonces;

$$\lim_{x\to 4} f(x)=3$$

2. Encontrar $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ si

$$f(x)=\begin{cases}x^2-15 & \text{si } -4\le x<5\\ x & \text{si } 5\le x<9\end{cases}$$

Solución:
Calculamos los límites laterales en 5, es decir

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}\left(x^2-15\right) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+} x$$
$$=5^2-15 \qquad\qquad =5$$
$$=10$$

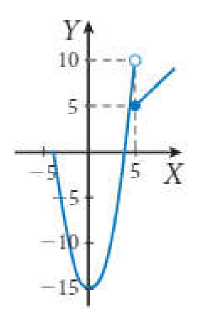


Figura 4.15

Ambos límites laterales existen pero no son iguales (Figura 4.15), entonces $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ no existe.

3. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}|x|$.

Solución:
Como:

$$|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\ge 0\\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$$

Entonces calculamos los límites laterales en 0 (Figura 4.16).

$$\lim_{x\to 0^+}|x|=\lim_{x\to 0^+} x=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+}|x|=\lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0}|x|=0.$$

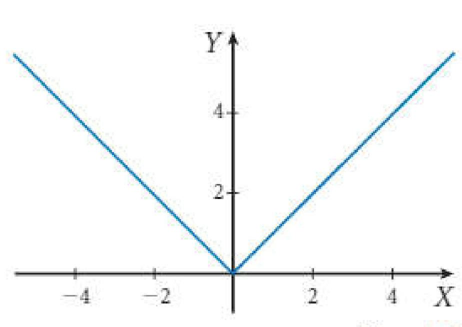


Figura 4.16

4. La gráfica de la función f está representada en la Figura 4.17: Considerar dicha gráfica para contestar las siguientes preguntas.

- ¿Cuánto vale $f(4)$?
- ¿Existe $\lim_{x\to 4^+} f(x)$? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuánto vale?
- ¿Existe $\lim_{x\to 4^-} f(x)$? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuánto vale?
- ¿Existe $\lim_{x\to 4} f(x)$?

Solución:

Trazamos una recta punteada vertical desde el 4 del eje X, una horizontal por el 2 del eje Y y otra horizontal por el 4 del eje Y ver Figura 4.18 y observamos que:

- $f(4)=4$
- $\lim_{x\to 4^+} f(x)=2$
- $\lim_{x\to 4^-} f(x)=2$
- $\lim_{x\to 4} f(x)=2$

La función es discontinua en 4, ya que $\lim_{x\to 4} f(x)$ no es $f(4)=4$.

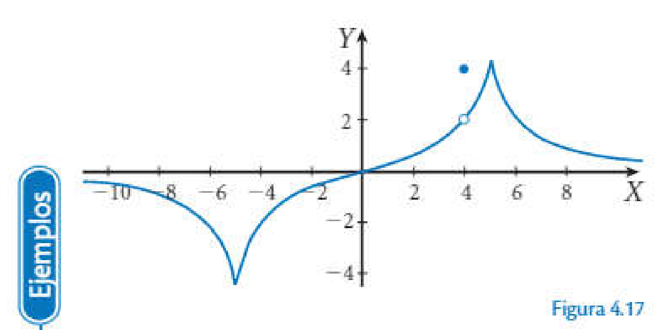


Figura 4.17

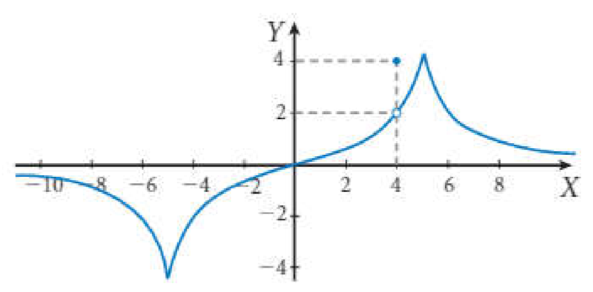
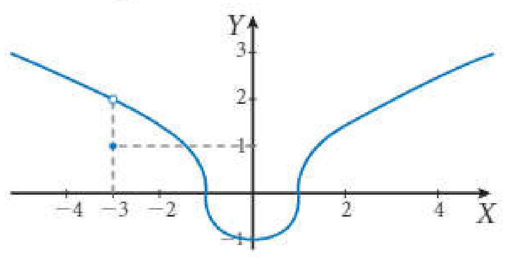


Figura 4.18

Ejemplos

Ejercicios

1. La gráfica de la función f es:

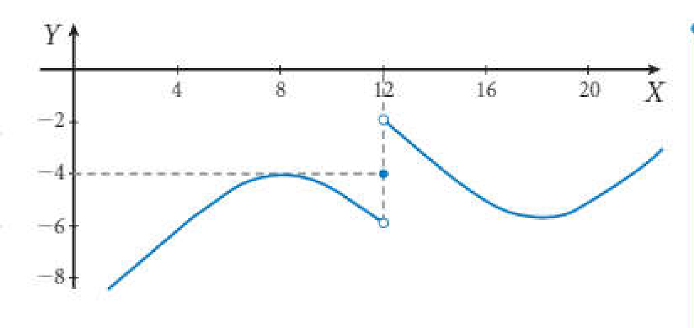


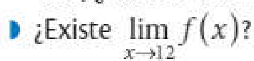
- ¿Cuánto vale $f(-3)$?
- ¿Existe $\lim_{x\to -3^+} f(x)$? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuánto vale?
- ¿Existe $\lim_{x\to -3^-} f(x)$? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuánto vale?
- ¿Existe $\lim_{x\to -3} f(x)$?
- ¿Es f continua en $x=-3$?

Pensamiento crítico

Si $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$, ¿qué podemos decir acerca de $\lim_{x\to a} f(x)$?

2. La gráfica de la función f es:



- ¿Cuánto vale $f(12)$?
- ¿Existe $\lim\limits_{x\to 12^+} f(x)$? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuánto vale?
- ¿Existe $\lim\limits_{x\to 12^-} f(x)$? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuánto vale?
- 
  ¿Existe $\lim\limits_{x\to 12} f(x)$?
- ¿Es f continua en $x=12$?

En cada caso, calcula $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ y determina si $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe para cada valor de c indicado.

3. $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x<0 \\ 6x-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ $c=0, c=-1.$

4. $f(x)=\begin{cases} x-6 & \text{si } x<0 \\ 2x-6 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ $c=0, c=3.$

5. $f(x)=\begin{cases} 4x+2 & \text{si } x\leq -1 \\ x-1 & \text{si } x>-1 \end{cases}$ $c=-1, c=\sqrt{2}.$

6. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}-5 & \text{si } x\leq 2 \\ 3x+4 & \text{si } x>2 \end{cases}$ $c=2, c=\dfrac{5}{3}.$

7. $f(x)=\begin{cases} 5-x & \text{si } x<4 \\ x^2-15 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$ $c=4, c=-4.$

8. $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x\leq -2 \\ -x-1 & \text{si } x>-2 \end{cases}$ $c=-2, c=0.$

9. $f(x)=\begin{cases} 6x+9 & \text{si } x>\dfrac{1}{6} \\ -9x^2+\dfrac{21}{4} & \text{si } x\leq \dfrac{1}{6} \end{cases}$ $c=\dfrac{1}{6},\ c=-\dfrac{1}{4}.$

10. $f(x)=\begin{cases} x^2+7x+5 & \text{si } x<-7 \\ -x-3 & \text{si } x>-7 \end{cases}$ $c=-7, c=-5.$

11. $f(x)=\begin{cases} |x+1| & \text{si } x\geq 2 \\ x+1 & \text{si } x<2 \end{cases}$ $c=2, c=-3.$

12. $f(x)=\begin{cases} 8-\operatorname{sen} x & \text{si } x\geq \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos x+7 & \text{si } x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $c=\dfrac{\pi}{2}, c=-\pi.$

Ejercicios

Formas indeterminadas del tipo 0/0

Veremos distintos modos de calcular un límite cuando se presenta una forma indeterminada del tipo 0/0.

Usando factorización

En el ejemplo 1 de la página 120 encontramos que:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$$

Veamos otra manera de encontrar este límite.

TIP

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones tales que $f(x)=g(x)$ para todo $x\neq g$, con $x, c \in (a,b)$ y $\lim_{x\to c} g(x)=L$, entonces $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=L$.

Como el numerador y el denominador son polinomios, entonces son funciones continuas, por lo que sus límites pueden calcularse evaluando, es decir:

$$\lim_{x\to -2}\left(x^2-4\right)=(-2)^2-4=4-4=0$$
$$\lim_{x\to -2}(x+2)=-2+2=0$$

Puesto que el límite del denominador es cero, no podemos evaluar el límite por medio de la propiedad del límite de un cociente: el límite de un cociente es el cociente de los límites. Sin embargo, puede calcularse observando que

$$\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}$$
$$=x-2 \qquad \text{si } x\neq -2,$$

de donde:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)$$
$$=-2-2$$
$$=-4$$

El resultado anterior es consecuencia de la siguiente propiedad:

Pensamiento crítico

Si $f(x)<g(x)$ para cualquier $x\neq c$, entonces ¿$\lim_{x\to c} f(x)<\lim_{x\to c} g(x)$?

> Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones tales que $f(x)=g(x)$ para todo $x\neq c$ en un intervalo abierto que contiene a c y $\lim_{x\to c} g(x)=L$,
>
> entonces
>
> $$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=L.$$

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x\to -8}\dfrac{x^2+7x-8}{x+8}$.

Solución:

Observamos que:

$$\lim_{x\to -8}\left(x^2+7x-8\right)=(-8)^2+7(-8)-8=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -8}(x+8)=-8+8=0,$$

por lo que el límite no puede calcularse como el cociente de los límites. Entonces factorizamos el numerador y el denominador

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+7x-8}{x+8}=\lim_{x\to -8}\frac{(x+8)(x-1)}{x+8}$$
$$=\lim_{x\to -8}(x-1)$$
$$=-9$$

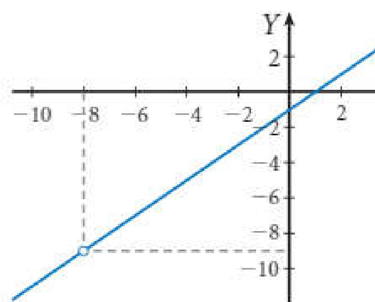


Figura 4.19

Por lo tanto, $\lim_{x\to -8}\dfrac{x^2+7x-8}{x+8}=-9$, que se representa en la Figura 4.19.

2. Calcular $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^3-3x^2-10x}{x-5}$.

Solución:
Observamos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\left(x^3-3x^2-10x\right)&=5^3-3(5)^2-10(5)\\&=5(25-15-10)\\&=0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}(x-5)&=5-5\\&=0,\end{aligned}$$

por lo que no podemos calcular el límite buscado como el cociente de los límites.
Entonces lo hacemos factorizando:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{x^3-3x^2-10x}{x-5}&=\lim_{x\to 5}\frac{x\left(x^2-3x-10\right)}{x-5}\\&=\lim_{x\to 5}\frac{x(x-5)(x+2)}{x-5}\\&=\lim_{x\to 5}x(x+2)\\&=5(5+2)\\&=35\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^3-3x^2-10x}{x-5}=35$, que se representa en la Figura 4.20.

TIP
Teorema del factor. Dados un polinomio $P(x)$ y un número real a, si $x-a$ es un factor de $P(x)$, entonces a es una raíz de $P(x)$ y recíprocamente, si un número a es raíz de un polinomio $P(x)$, entonces $x-a$ es un factor de $P(x)$.

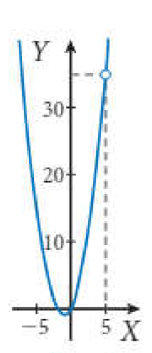


Figura 4.20

3. Calcular $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^3+6x^2-32}{x^3+9x^2+24x+16}$.

Solución:
Observamos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -4}\left(x^3+6x^2-32\right)&=(-4)^3+6(-4)^2-32\\&=(-4)^2(-4+6-2)\\&=0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -4}\left(x^3+9x^2+24x+16\right)&=(-4)^3+9(-4)^2+24(-4)+16\\&=(-4)^2(-4+9-6+1)\\&=0,\end{aligned}$$

de tal forma que el límite no puede calcularse como el cociente de los límites.

Como -4 es raíz del polinomio x^3+6x^2-32, entonces $x-(-4)=x+4$ es un factor de él. Para encontrar el otro factor utilizamos el método de división sintética que a continuación recordamos.
Colocamos los coeficientes del polinomio x^3+6x^2-32 de la siguiente manera

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 0 & -32 \\ -4 & \downarrow & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Observamos que como no hay término en x en el polinomio se pone 0 como coeficiente de x.

- Copiamos el primer coeficiente: 1 debajo de la raya.
- Multiplicamos 1 por (-4) y el resultado (-4) lo ponemos debajo del 6. Y sumamos $6-4=2$.
- Multiplicamos 2 por (-4) y el resultado (-8) lo ponemos debajo del 0. Y sumamos $0-8=-8$.
- Multiplicamos (-8) por (-4) y el resultado 32 lo ponemos debajo del (-32). Y sumamos $-32+32=0$.

En el esquema siguiente, puede observarse la ejecución de los pasos anteriores:

1)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 0 & -32 \\ -4 & \downarrow & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 0 & -32 \\ -4 & \downarrow & -4 & & \\ \hline & 1 & 2 & & \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 0 & -32 \\ -4 & \downarrow & -4 & -8 & \\ \hline & 1 & 2 & -8 & \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 0 & -32 \\ -4 & \downarrow & -4 & -8 & 32 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & 0 \end{array}$$

Los números $1,2,-8$ que aparecen en el último renglón del inciso **4)** antes del 0, son los coeficientes del factor buscado que es un polinomio de un grado menos que el del original, es decir, el factor es:

$$1x^2+2x-8=x^2+2x-8$$

De donde,

$$x^3+6x^2-32=(x+4)\left(x^2+2x-8\right)$$

Análogamente factorizamos el denominador, obteniendo:

$$\lim_{x\to-4}\frac{x^3+6x^2-32}{x^3+9x^2+24x+16}=\lim_{x\to-4}\frac{\left(x^2+2x-\mathbf{8}\right)(x+4)}{\left(x^2+5x+4\right)(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to-4}\frac{x^2+2x-8}{x^2+5x+4}$$

Observamos que:

$$\lim_{x\to-4}\left(x^2+2x-8\right)=(-4)^2+2(-4)-8=0 \quad \text{y}$$
$$\lim_{x\to-4}\left(x^2+5x+4\right)=(-4)^2+5(-4)+4=0$$

Factorizando nuevamente

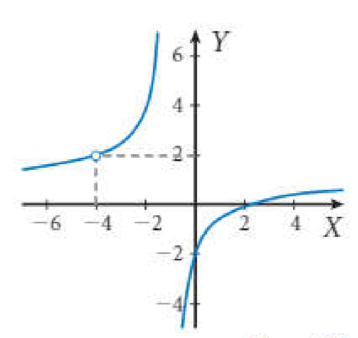


Figura 4.21

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-4}\frac{x^2+2x-8}{x^2+5x+4}&=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x-2)}{(x+4)(x+1)}\\&=\lim_{x\to-4}\frac{x-2}{x+1}\\&=\frac{-4-2}{-4+1}\\&=2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to-4}\dfrac{x^3+6x^2-32}{x^3+9x^2+24x+16}=2$, que se representa en la Figura 4.21.

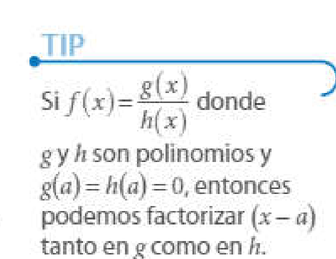
4. Calcular $\lim_{h\to0}\dfrac{(h+1)^4-1}{h}$.

Solución:

Observamos que:

$$\lim_{h\to0}\left((h+1)^4-1\right)=1^4-1=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to0}h=0,$$

de tal forma que el límite no puede calcularse como el cociente de los límites. Entonces desarrollamos el numerador para factorizar y obtenemos:


TIP

Si $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ donde g y h son polinomios y $g(a)=h(a)=0$, entonces podemos factorizar $(x-a)$ tanto en g como en h.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{(h+1)^4-1}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{h^4+4h^3+6h^2+4h+1-1}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^4+4h^3+6h^2+4h}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h\left(h^3+4h^2+6h+4\right)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left(h^3+4h^2+6h+4\right)\\&=4\end{aligned}$$

En resumen, $\lim_{h\to0}\dfrac{(h+1)^4-1}{h}=4$, ver Figura 4.22.

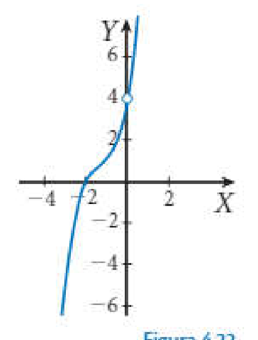


Figura 4.22

5. Calcular $\lim_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$.

Solución:

Como:

$$|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\geq0\\-x & \text{si } x<0\end{cases}$$

Pensamiento crítico

Si f está definida en a y $\lim_{x\to a} f(x)=L$, ¿puede ser $L \neq f(a)$?

Ejemplos

Entonces calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}-1=-1$$

Como los límites laterales son distintos el $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ no existe (ver Figura 4.23).

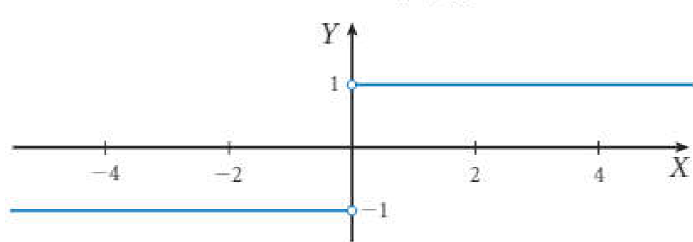


Figura 4.23

Ejercicios

Calcula los límites siguientes.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}$
2. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{x-3}$
3. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$
4. $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$
5. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+9x+14}{x+2}$
6. $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-6x-27}$
7. $\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{x-4}$
8. $\lim_{x\to 4}\frac{4x^2+27x-7}{x+7}$
9. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(x-11)}$
10. $\lim_{x\to -7}\frac{(x+7)(x-3)}{x^2-49}$
11. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+8x+15}$
12. $\lim_{x\to 6}\frac{x^2+3x-54}{x^2-36}$
13. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+4x-32}{x^2-6x+8}$
14. $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-x-30}{x^2+8x+15}$
15. $\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-14x+20}{3x^2-14x-5}$
16. $\lim_{x\to -\frac{5}{4}}\frac{16x^2-25}{4x+5}$
17. $\lim_{x\to \frac{9}{7}}\frac{9-7x}{81-49x^2}$
18. $\lim_{x\to -\frac{3}{2}}\frac{8x+12}{64x^2-144}$
19. $\lim_{x\to 9}\frac{x^3-17x^2+72x}{x-9}$
20. $\lim_{x\to -11}\frac{x^3+19x^2+88x}{x+11}$
21. $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}$
22. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^4+4x^2-5}$
23. $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+x^2-21x-45}{x^3+7x^2+15x+9}$
24. $\lim_{x\to 4}\frac{x^3-15x^2+72x-112}{x^3-x^2-40x+112}$
25. $\lim_{x\to -5}\frac{x^3+5x^2-25x-125}{x^3-75x-250}$
26. $\lim_{x\to 8}\frac{x^3-19x^2+112x-192}{x^3-13x^2+16x+192}$
27. $\lim_{x\to -4}\frac{x^4+3x^3-8x^2-12x+16}{x^4-16}$
28. $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-3x^3-7x^2+15x+18}{4\left(x^4-9x^3+29x^2-39x+18\right)}$
29. $\lim_{x\to -1}\frac{x^4-6x^3-x^2+6x}{x^4-5x^2+4}$
30. $\lim_{x\to 5}\frac{x^4-5x^3-3x^2+17x-10}{x^4-9x^3+21x^2+x-30}$

Multiplicando por el conjugado

En el ejemplo 4 de la página 122 encontramos que:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}=\frac{1}{6}$$

Veamos otra manera de encontrar este límite.

Como el numerador y el denominador son funciones continuas, sus límites pueden calcularse evaluando. Es decir,

$$\lim_{x\to 8}\left(\sqrt{x+1}-3\right)=\sqrt{8+1}-3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 8}(x-8)=8-8=0$$

$$=3-3$$

$$=0$$

Dado que el límite del denominador es cero, no podemos evaluar el límite del cociente como el cociente de los límites. Sin embargo, el límite puede calcularse multiplicando y dividiendo por el conjugado del numerador:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}&=\left(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3}\right)\\&=\frac{x+1-9}{(x-8)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}\\&=\frac{x-8}{(x-8)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}\\&=\frac{1}{\sqrt{x+1}+3}\qquad \text{si } x\neq 8,\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}&=\lim_{x\to 8}\frac{1}{\sqrt{x+1}+3}\\&=\frac{1}{\sqrt{8+1}+3}\\&=\frac{1}{3+3}\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

De tal forma que su gráfica corresponde a la Figura 4.24.

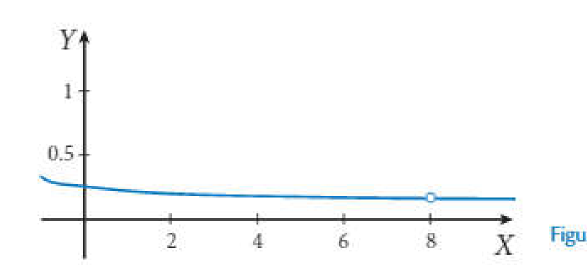


Figura 4.24

TIP

Cuando se cambia el signo entre dos expresiones algebraicas se dice que se obtiene el conjugado. Por ejemplo, cada una de las siguientes parejas está formada por conjugados: $x+a$ y $x-a$; $\sqrt{x+1}-3$ y $\sqrt{x+1}+3$.

TIP

Al multiplicar conjugados obtenemos una diferencia de cuadrados: $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$; $\left(\sqrt{x+1}-3\right)\left(\sqrt{x+1}+3\right)=(x+1)-9$.

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$.

Solución:
Observamos que:

$$\lim_{x\to 4}\left(x^2-16\right)=16-16=0 \qquad \text{y}$$
$$\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}-2\right)=\sqrt{4}-2=2-2=0,$$

por lo tanto, el límite no puede calcularse como el cociente de los límites. Entonces multiplicamos y dividimos la función por el conjugado del denominador observamos que:

$$\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\left(\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right)$$
$$=\frac{\left(x^2-16\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}$$
$$=\frac{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}$$
$$=(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right) \qquad \text{si } x\neq 4$$

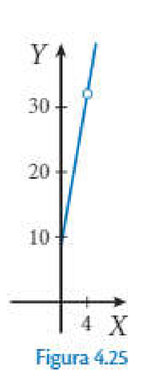


Figura 4.25

Como:

$$\lim_{x\to 4}(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)=(4+4)\left(\sqrt{4}+2\right)$$
$$=8(4)$$
$$=32.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=32$, lo cual se representa en la Figura 4.25.

2. Calcular $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$.

Solución:
Observamos que:

$$\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{3+h}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0 \qquad \text{y}$$
$$\lim_{h\to 0}h=0,$$

por lo tanto, el límite no puede calcularse como el cociente de los límites. Entonces calculamos el límite multiplicando y dividiendo la función por el conjugado del numerador tenemos que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\left(\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3+h-3}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Figura 4.26

Por lo tanto, $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, lo cual se representa en la Figura 4.26.

3. Calcular $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$.

Solución:
Observamos que:

$$\lim_{x\to 5}(x-5)=5-5=0 \qquad \text{y}$$

$$\lim_{x\to 5}\left(\sqrt{x-1}-2\right)=\sqrt{5-1}-2=2-2=0,$$

por lo tanto, el límite no puede calcularse como el cociente de los límites. Entonces calculamos el límite multiplicando y dividiendo la función por el conjugado del denominador de tal forma, que:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}=\lim_{x\to 5}\left(\left(\frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{x-1-4}$$

$$=\lim_{x\to 5}\left(\sqrt{x-1}+2\right)$$

$$=\sqrt{5-1}+2$$

$$=4$$

Figura 4.27

Por lo tanto, $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}=4$, lo cual se representa en la Figura 4.27.

4. Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^4}{\sqrt{x^4+16}-4}$.

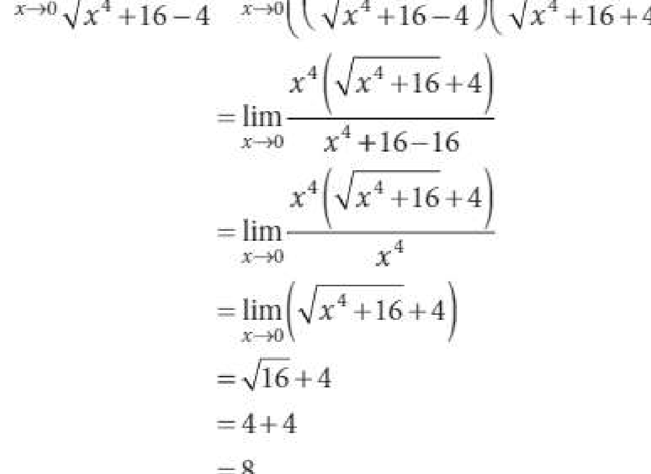
Solución:

Observamos que:

$$\lim_{x\to 0} x^4 = 0 \qquad \text{y}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x^4+16}-4\right) = \sqrt{16}-4 = 4-4 = 0,$$

por lo tanto, el límite no puede calcularse como el cociente de los límites. Entonces calculamos el límite multiplicando y dividiendo la función por el conjugado del denominador, así:



$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sqrt{x^4+16}-4} = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x^4}{\sqrt{x^4+16}-4}\right)\left(\frac{\sqrt{x^4+16}+4}{\sqrt{x^4+16}+4}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(\sqrt{x^4+16}+4\right)}{x^4+16-16}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(\sqrt{x^4+16}+4\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x^4+16}+4\right)$$

$$= \sqrt{16}+4$$

$$= 4+4$$

$$= 8$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^4}{\sqrt{x^4+16}-4} = 8$, lo cual se representa en la Figura 4.28.

Figura 4.28

Ejemplos

Ejercicios

Calcula los límites siguientes.

1. $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

2. $\lim_{x\to 49} \dfrac{x-49}{\sqrt{x}-7}$

3. $\lim_{x\to 81} \dfrac{18\sqrt{x}-162}{x-81}$

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

5. $\lim_{x\to 10} \dfrac{3-\sqrt{x-1}}{10-x}$

6. $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{8-x}-3}{x+1}$

7. $\lim_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x+7}-4}$

8. $\lim_{x\to 12} \dfrac{20\left(5-\sqrt{x+13}\right)}{x-12}$

9. $\lim_{x\to -15} \frac{x+15}{\sqrt{4-4x}-8}$

10. $\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{4-\sqrt{2x+2}}$

11. $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{2x-9}-3}{x^2-9x}$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

13. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^2-2x+6}-x}$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+16}-\sqrt{16-x}}{x}$

15. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{13-x}}{x-4}$

16. $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-8}{\sqrt{3x}-\sqrt{6}}$

17. $\lim_{x\to -6} \frac{x^2-36}{\sqrt{4-2x}-4}$

18. $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x^2-x+5}-\sqrt{x^2+x-5}}{x^2-2x-15}$

19. $\lim_{x\to 25} \frac{x^2-625}{\sqrt{x}-5}$

20. $\lim_{x\to 8} \frac{x^2-64}{\sqrt{x}-\sqrt{8}}$

21. $\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x+2}-3}$

22. $\lim_{x\to 12} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{12}}{x^2-144}$

23. $\lim_{x\to 20} \frac{\sqrt{x+5}-5}{x-20}$

24. $\lim_{x\to 10} \frac{3x^2-12x-180}{\sqrt{x^2+2x-20}-\sqrt{x^2-x+10}}$

25. $\lim_{x\to -8} \frac{\sqrt{x^2-28}-\sqrt{x^2+3x-4}}{(x+8)(x+3)}$

Ejercicios

Límites de composiciones

Calcular $\lim_{x\to 0} \cos\left(x^3-8x^2+\pi\right)$.

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \cos\left(x^3-8x^2+\pi\right) &= \cos\left(\lim_{x\to 0}\left(x^3-8x^2+\pi\right)\right)\\ &= \cos\left(0^3-8(0)^2+\pi\right)\\ &= \cos\pi\\ &= -1\end{aligned}$$

En el ejemplo hemos utilizado el resultado siguiente que nos será de utilidad en el cálculo de límites:

Si f y g son dos funciones de manera que $f(g(x))$ está definida en un intervalo abierto (a,b) que contiene a c, excepto quizás en $c \in (a,b)$, $\lim_{x\to c} g(x) = L$ y f es una función continua en L, entonces

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(L).$$



1. Calcular $\lim_{x\to 0} \tan\left(3x^2 - x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Solución:
Aplicando el resultado anterior. Como:

$$\lim_{x\to 0}\left(3x^2 - x + \frac{\pi}{4}\right) = 3(0)^2 - 0 + \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

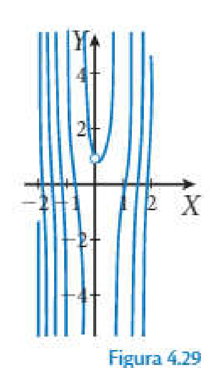


Figura 4.29

La función tan es continua en $\frac{\pi}{4}$, ver Figura 4.29, entonces:

$$\lim_{x\to 0}\tan\left(3x^2 - x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\lim_{x\to 0}\left(3x^2 - x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

O sea,

$$\lim_{x\to 0}\tan\left(3x^2 - x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 1$$

2. Calcular $\lim_{x\to 4} \operatorname{sen}\left(\frac{x^3 - 2x^2 - 8x}{x - 4}\right)$.

Solución:
Calculamos primero;

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3 - 2x^2 - 8x}{x - 4} = \lim_{x\to 4}\frac{x\left(x^2 - 2x - 8\right)}{x - 4}$$
$$= \lim_{x\to 4}\frac{x(x+2)(x-4)}{x - 4}$$
$$= \lim_{x\to 4} x(x+2)$$
$$= 4(4+2)$$
$$= 24$$

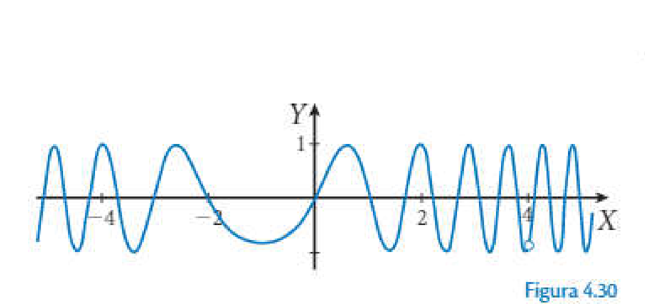


Figura 4.30

Y como la función seno es continua en 24 ver Figura 4.30, entonces

$$\lim_{x\to 4}\operatorname{sen}\left(\frac{x^3 - 2x^2 - 8x}{x - 4}\right) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to 4}\frac{x^3 - 2x^2 - 8x}{x - 4}\right).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 4}\operatorname{sen}\left(\frac{x^3 - 2x^2 - 8x}{x - 4}\right) = \operatorname{sen}(24).$$

Ejemplos

3. Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{\sqrt{x^4+16}-4}\right)^3$.

Solución:

En el ejemplo 4 de la página 138 obtuvimos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sqrt{x^4+16}-4}=8$$

Como la función y^3 es continua en 8, entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{\sqrt{x^4+16}-4}\right)^3 &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sqrt{x^4+16}-4}\right)^3\\ &=8^3\\ &=512.\end{aligned}$$

Ejercicios

Calcula los límites siguientes.

1. $\lim_{x\to 0}\cos\left(5x^3+8x^2-x\right)$

2. $\lim_{x\to -4}\left(5x^2+10x-11\right)^2$

3. $\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}\right|$

4. $\lim_{x\to -3\pi}\cos(\pi+\operatorname{sen}x)$

5. $\lim_{x\to 11}\sqrt{x+5}$

6. $\lim_{x\to -8}\sqrt[3]{x-19}$

7. $\lim_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2+11x+24}{x+3}}$

8. $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{-3x^2+5x+1}$

9. $\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{-x^2-8x-9}$

10. $\lim_{x\to 0}\left(5x^3-11x^2+16\right)^{\frac{3}{2}}$

11. $\lim_{x\to -4}\left|9-x^2\right|$

12. $\lim_{x\to 3}\left(-\left|\frac{x^2}{4}-5\right|\right)$

13. $\lim_{x\to -\pi}(\sec x)^{\frac{1}{3}}$

14. $\lim_{x\to 2\pi}\tan\left(\frac{\pi}{4}+2\operatorname{sen}x\right)$

15. $\lim_{x\to 0}\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cos x\right)$

16. $\lim_{x\to -\pi}\csc\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}(-x)\right)$

17. $\lim_{x\to 2}\cos\left(\frac{x^2-3x+2}{2x^2-8}\right)$

18. $\lim_{x\to 3}\tan\left(\frac{-3x^2+8x+3}{5x+16}\right)$

19. $\lim_{x\to -1}\operatorname{sen}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2-4x-5}\right)$

20. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\left|\tan x\right|$

Límites que involucran la expresión $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Veamos ahora el ejemplo siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Observamos que:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$$

y

$$\lim_{x \to 0} x = 0,$$

por lo tanto, el límite no puede calcularse como el cociente de los límites. Tampoco podemos usar los métodos de factorizar o multiplicar y dividir por el conjugado. Observemos el comportamiento de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ en las Tablas 4.15 y 4.16 cerca de $x = 0$.

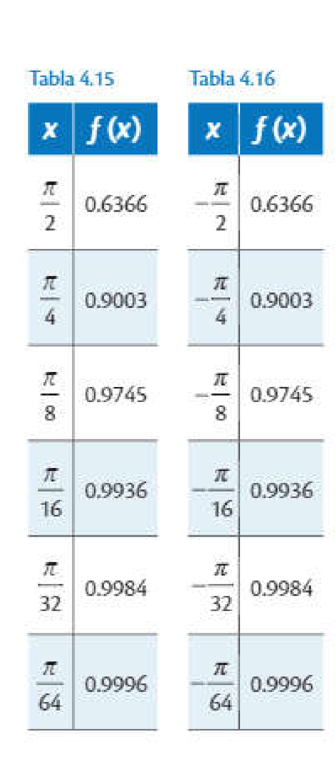


Tabla 4.15

x	$f(x)$
$\frac{\pi}{2}$	0.6366
$\frac{\pi}{4}$	0.9003
$\frac{\pi}{8}$	0.9745
$\frac{\pi}{16}$	0.9936
$\frac{\pi}{32}$	0.9984
$\frac{\pi}{64}$	0.9996

Tabla 4.16

x	$f(x)$
$-\frac{\pi}{2}$	0.6366
$-\frac{\pi}{4}$	0.9003
$-\frac{\pi}{8}$	0.9745
$-\frac{\pi}{16}$	0.9936
$-\frac{\pi}{32}$	0.9984
$-\frac{\pi}{64}$	0.9996

En la Figura 4.31 está la gráfica de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Observamos que conforme nos acercamos a $x = 0$, los valores de la función se acercan a 1.

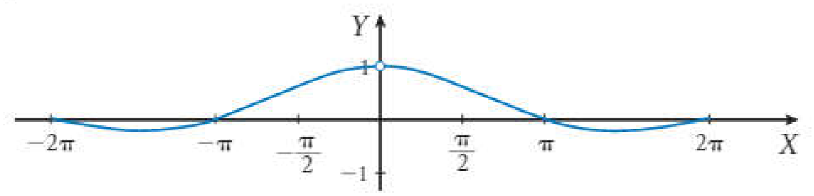


Figura 4.31

Para justificar el hecho anterior, haremos uso de la siguiente propiedad, llamada coloquialmente del *sándwich*:

> Supongamos que tenemos tres funciones f, g y h definidas en un intervalo (a, b) y $c \in (a, b)$. Si
>
> $$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$
>
> para cualquier $x \neq c$ y
>
> $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$
>
> entonces
>
> $$\lim_{x \to c} g(x) = L.$$

En la Figura 4.32 aparece en color gris la gráfica de $f(x) = 1$, en azul $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y en azul claro $h(x) = \cos x$.

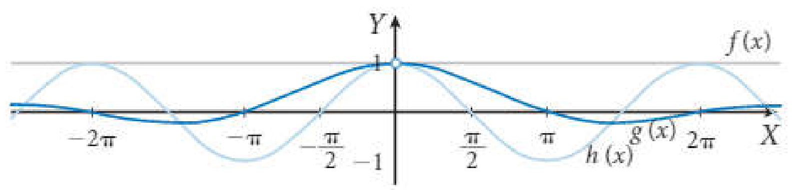


Figura 4.32

Observamos que si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ ver Figura 4.33, entonces:

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$

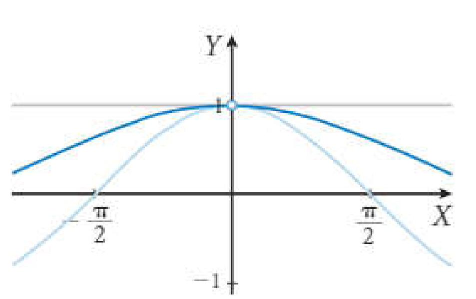


Figura 4.33

Tenemos que

$$\lim_{x \to 0} 1 = \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Aplicando la propiedad del sándwich, obtenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

Solución:
Observamos que:

$$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 1 - 1 = 0$$

y

$$\lim_{x \to 0} x = 0,$$

por lo tanto, el límite no puede calcularse como el cociente de los límites. Entonces, lo calculamos multiplicando y dividiendo por el conjugado del numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \to 0} \left(\left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \\
&= 1 \left(\frac{0}{2} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$. Figura 4.34.

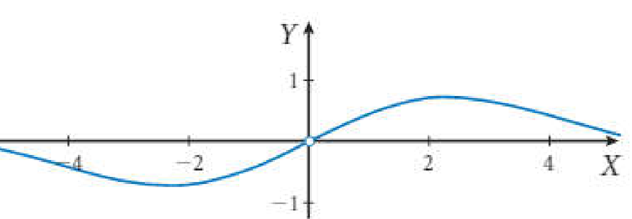


Figura 4.34

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}7x}{x}$.

Solución:

Observamos que:

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}7x=\operatorname{sen}0=0 \qquad \text{y}$$
$$\lim_{x\to 0}x=0,$$

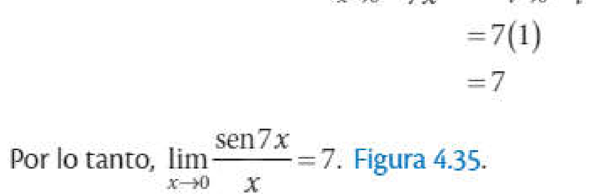
por lo tanto, el límite no puede calcularse como el cociente de los límites. Multiplicamos el numerador y el denominador por 7,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}7x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{7\operatorname{sen}7x}{7x}\\&=7\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}7x}{7x}\end{aligned}$$

Cambiamos la variable x por t haciendo $t=7x$ y observamos que:

$$\lim_{x\to 0}7x=0,$$

es decir, la t tiende a cero cuando la x tiende a cero. De donde:



$$\begin{aligned}7\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}7x}{7x}&=7\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}t}{t}\\&=7(1)\\&=7\end{aligned}$$

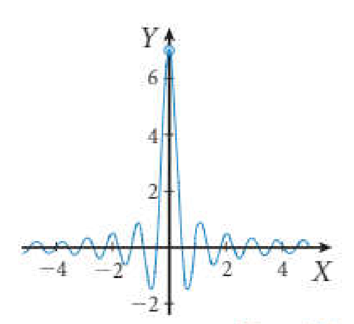


Figura 4.35

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}7x}{x}=7$. Figura 4.35.

3. Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}$, donde x es un número cualquiera.

Solución:

Observamos que:

$$\lim_{h\to 0}\left(\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x\right)=\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x=0 \qquad \text{y}$$
$$\lim_{h\to 0}h=0,$$

por lo tanto, el límite no puede calcularse como el cociente de los límites. Recordando la identidad trigonométrica tenemos, que:

$$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

de donde,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x&=2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\\&=2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\end{aligned}$$

Entonces, sustituimos en el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

$$=\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)(\cos x)$$

Ahora, para calcular el límite que falta hacemos el cambio de variable $t=\frac{h}{2}$ y como t tiende a cero cuando h tiende a cero ver Figura 4.36. Entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}t}{t}$$

$$=1$$

De donde;

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)(\cos x)$$

$$=1(\cos x)$$

$$=\cos x,$$

para cualquier x.



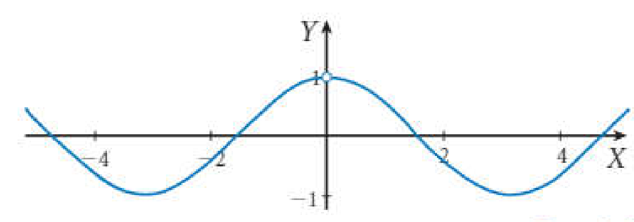


Figura 4.36

Ejercicios

Calcula los límites siguientes.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}6x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(-2x)}{x}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{5x}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{3}}{x}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{15\operatorname{sen}x}{4x}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{12}}{x}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cos x}{x}$
8. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$
9. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{2\operatorname{sen}x}$
10. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$
11. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}$
12. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x}$
13. $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{1-\cos x}$
14. $\lim_{x\to 0}x\csc 2x$
15. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^4 x}{x^2}$
16. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x(1-\cos x)}{x^3}$
17. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$
18. $\lim_{x\to \pi}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}\pi}{x-\pi}$
19. $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$
20. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+\operatorname{sen}x}-\sqrt{4-\operatorname{sen}x}}{3x}$

Mundo virtual

En esta sección te invitamos a visitar varios sitios que contienen material relacionado con el concepto de límite. Algo de ese material está desarrollado por los autores de este libro, pero mucho más ha sido desarrollado por personas de todo el mundo que tienen interés en las matemáticas.

- http://atenea.matem.unam.mx Éste es un sitio del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en desarrollo en el cual los investigadores del Instituto están creando material para cursos en línea. Puedes entrar como invitado sin necesidad de registrarte. Una vez dentro del sitio, elige la categoría "Cálculo diferencial e integral", dentro de ella, el curso "Cálculo I" y entra a las lecciones de la sección "Límites".
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web Sitio del Ministerio de Educación, Salud y Deporte del Gobierno español que contiene unidades didácticas y recursos interactivos desarrollados con la herramienta Descartes. Estos materiales fueron elaborados por profesores de enseñanza media. Selecciona "Aplicaciones", y luego "Análisis" encontrarás varias lecciones relativas al tema de límites que estudiaste en esta unidad. Ten presente que en general, las lecciones de límites no presuponen continuidad, así que pueden ser más difíciles que las que aparecen en este libro.
- http://es.wikipedia.org La enciclopedia en línea Wikipedia es uno de los sitios de referencia para encontrar información relacionada con la

ciencia y la cultura. En el buscador escribe: Límite de una función. Hojea las primeras secciones de este documento para ampliar los temas vistos en este capítulo.

- http://newton.matem.unam.mx/geolab En este sitio puedes descargar el programa Geolab; y el curso para aprender a utilizarlo. En las secciones de Mundo virtual te guiaremos para realizar algunas construcciones relacionadas con los temas de este libro.

Construcciones con Geolab

En las unidades anteriores aprendiste a introducir fórmulas en Geolab para dibujar gráficas de funciones, y también a introducir dos funciones; una de ellas con dominio (a,c) y la otra con dominio (c,b). Si las gráficas de las dos funciones se pegan bien, significa que la función combinada tiene límite en c.

Construye ahora funciones que no estén definidas en un punto pero que sí tengan límite ahí, por ejemplo:

1. $f(t)=\dfrac{t^2-8t+15}{t^2-25}$ no está definida en $t=5$, pero sí tiene límite. Recuerda introducir la fórmula usando $t_$ en lugar de t

$$(t_\wedge 2-8*t_+15)/(t_\wedge 2-25)$$

2. $f(t)=\dfrac{t^2-10t+21}{t-7}$ no está definida en $t=7$ pero sí tiene límite ahí.

3. $f(t)=\dfrac{\sqrt{t+1}-3}{t-8}$ no está definida en $t=8$ pero sí tiene límite ahí. Recuerda que necesitas que el radicando, $t+1$, sea mayor o igual a 0, es decir, necesitas $t\geq -1$, así en la casilla de $a=$ escribe -1. La raíz cuadrada se escribe $sqrt$ así que toda la función se escribe;

$$(sqrt(t_+1)-3)/(t_-8)$$

4. $f(t)=\dfrac{\text{sen}(5t)}{t}$ no está definida en $t=0$ pero sí tiene límite ahí. La función seno la puedes escribir como sin o como sen. Como esta función tiene muchas ondas, te conviene aumentar el número de pasos, por ejemplo a 1 000 para que calcule más puntos y salga más suave la función.

Resumen de la unidad

1. Si f es una función continua en c, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
2. Si k es una constante, entonces $\lim_{x\to c} k = k$.
3. Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$, $\lim_{x\to c} g(x) = M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:
   - $\lim_{x\to c} (f+g)(x) = L + M$.
   - $\lim_{x\to c} (f-g)(x) = L - M$.
   - $\lim_{x\to c} (\alpha f)(x) = \alpha M$.
   - $\lim_{x\to c} (fg)(x) = LM$.
   - Si además $M \neq 0$, entonces $\lim_{x\to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$.
4. Si $f(g(x))$ está definida en un intervalo que contenga a c, $\lim_{x\to c} g(x) = L$ y f es continua en L, entonces $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(L)$.
5. Si $\lim_{x\to c^{\prime}} f(x) = L = \lim_{x\to c} f(x)$ entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y recíprocamente:
   - Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces $\lim_{x\to c^{\prime}} f(x) = L = \lim_{x\to c} f(x)$.
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
7. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$.

Ejercicios de repaso

Calcula los límites siguientes.

1. $\lim_{x\to 5} \tan\left(\frac{x^3 - 5x^2 + x - 5}{x^4 + 5x^2 + 4}\right)$
2. $\lim_{x\to 3} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 - 10x + 21}\right)$
3. $\lim_{x\to -4} \cos\left(\frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 + 7x + 12}\right)$
4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \cot x}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2-\tan x}}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{x+10}+\sqrt{7-x}}$

12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{6+x}-\sqrt{4-x}}$

13. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^2+13x+40}{x^2+3x-40}$

14. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-12x+12}{4x^2+11x-3}$

15. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-3x-18}{x^2-16x+60}$

16. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-15x+7}{2x^2+5x-3}$

17. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-5x-50}{x^2+5x-50}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8(1-\cos x)}{x^2}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\pi x}$

20. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3+8x^2+12x}{x^3-6x^2+5x}$

21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3+6x^2-16x}$

22. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x+8}{\sqrt{16-x^2}-\sqrt{x+4}}$

23. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x^2+8x-3}-9}$

24. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{\sqrt{2x}}{2}+14\right)^{\frac{3}{2}}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4(\tan x-\operatorname{sen} x)}{x^3}$

Autoevaluación

1. Si $f(x)=\frac{x^2-11x+30}{x^2+5}$, entonces $\lim_{x\to-5} f(x)$ es:

a. $\frac{11}{10}$

b. No existe

c. $\frac{11}{3}$

d. 0

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 122.

2. Si $f(x)=\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ entonces $\lim_{x\to9} f(x)$ es:

a. 6

b. 0

c. –6

d. No existe

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 136.

3. Si $f(x)=\begin{cases} x-6 & \text{si } -12\le x<-1 \\ x^2+5x-3 & \text{si } -1\le x<4. \end{cases}$, entonces $\lim_{x\to-1} f(x)$ es:

a. No existe

b. –5

c. 3

d. –7

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 127.

4. Si $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$, entonces $\lim_{x\to2} f(x)$ es:

a. No existe

b. 0

c. 1

d. –1

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 127.

5. Si $f(x)=\frac{6\cos x \operatorname{sen} x}{5x}$, entonces $\lim_{x\to0} f(x)$ es:

a. $\frac{5}{6}$

b. $\frac{6}{5}$

c. 0

d. No existe

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 142.

6. Si $f(x)=\frac{x^3+5x^2-24x}{x^2+6x-16}$, entonces $\lim_{x\to-8} f(x)$ es:

a. No existe

b. $\frac{11}{10}$

c. –8

d. $-\frac{44}{5}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 130.

7. Si $f(x)=\left(\frac{\operatorname{sen}10x}{x}\right)^2$, entonces $\lim_{x\to0} f(x)$ es:

a. $\frac{1}{10}$

b. 100

c. $\frac{1}{100}$

d. 10

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 142.

8. Si $f(x)=\frac{x^3+14x^2+49x}{x+7}$, entonces $\lim_{x\to-7} f(x)$ es:

a. –7

b. 0

c. 98

d. –98

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta página 130.

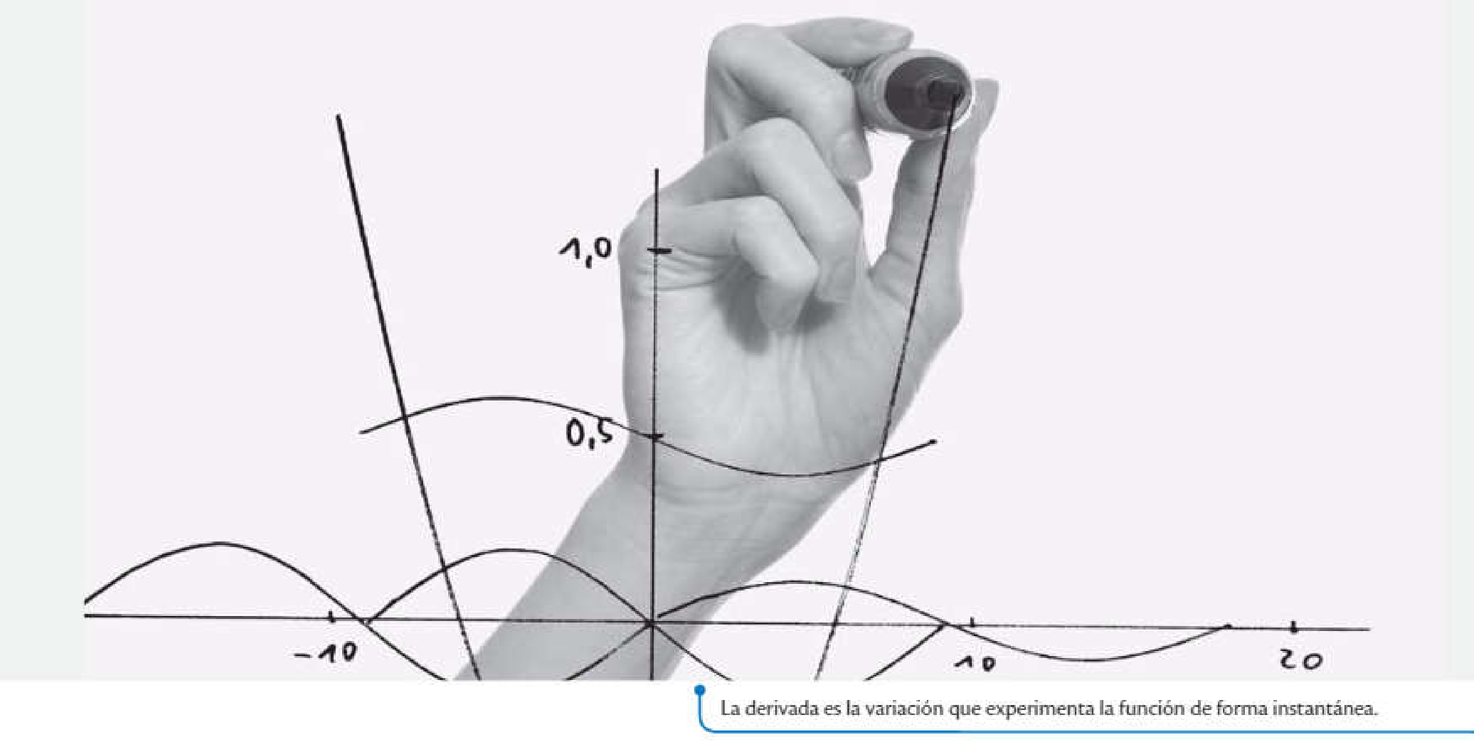
Heteroevaluación

1. Encuentra el $\lim_{x \to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ 2x-2 & \text{si } 3 \le x < 50 \end{cases}$.

2. Calcula $\lim_{x \to -2} \frac{6\tan(x+2)}{x+2}$.

3. Calcula $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$.

4. Calcula $\lim_{x \to 8} \left| \frac{x^2-64}{x-8} \right|$.



La derivada es la variación que experimenta la función de forma instantánea.

Unidad 5 Derivadas de funciones

En el siglo XVII, Isaac Newton y Gottfried Leibniz desarrollaron de manera independiente el concepto de *derivada*. El primero motivado por el movimiento de los planetas y las leyes de gravedad y el segundo, por el problema de encontrar la recta tangente a una curva dada. Leibniz inventó el símbolo $\frac{dy}{dx}$ con el que se representa la derivada de y respecto a x.

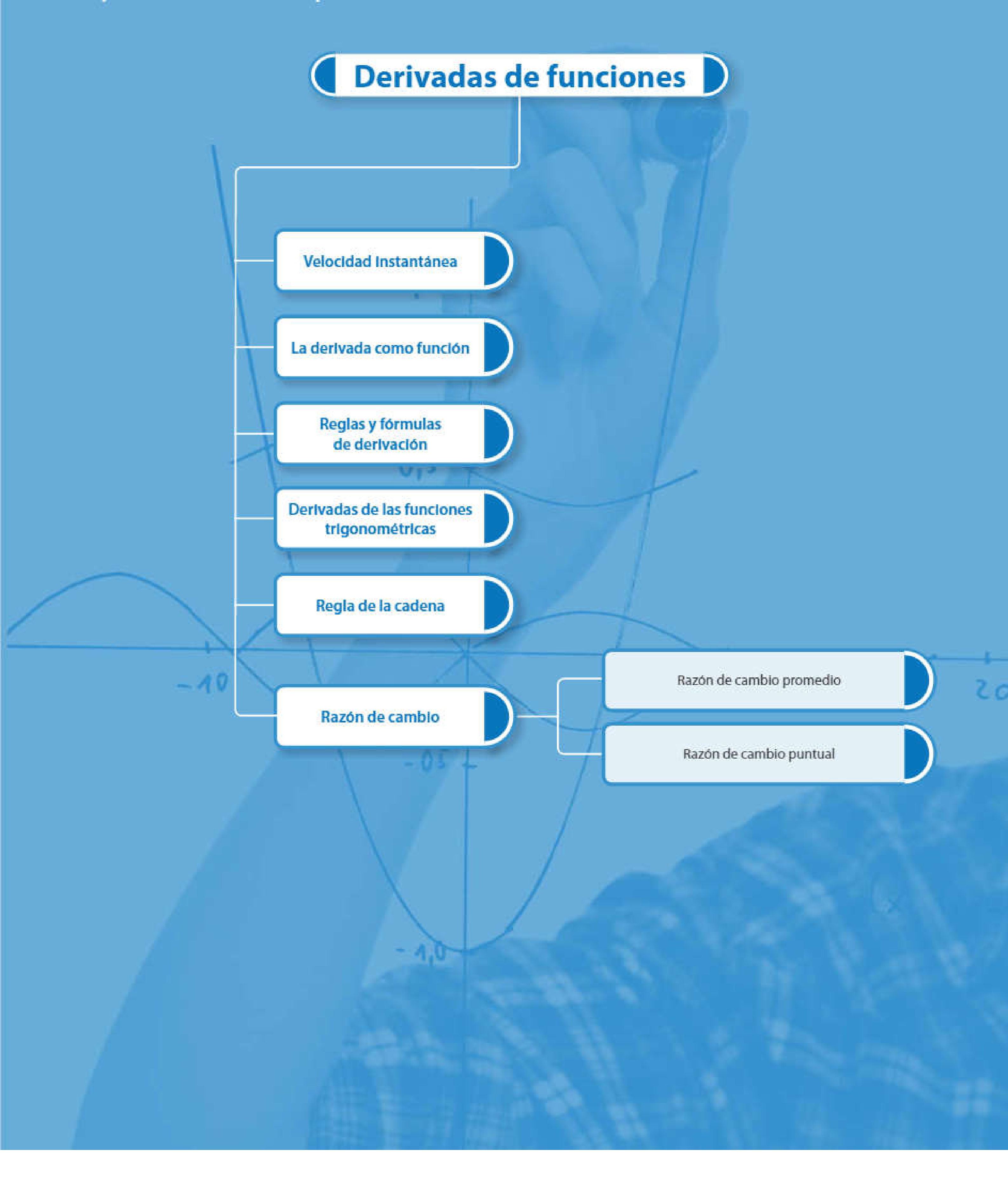
Sin embargo, el modelo del concepto de derivada más común y fácil de entender es el de la velocidad (o rapidez) instantánea de un objeto en movimiento.

Si vamos en un coche en una carretera podemos calcular la velocidad promedio en una hora si dividimos la distancia recorrida en ese intervalo de tiempo entre 1 hora. Si repetimos este experimento considerando un intervalo de tiempo más pequeño, por ejemplo; 1 minuto $= \frac{1}{60}$ de hora, habremos calculado la velocidad promedio durante el minuto transcurrido. Si tuviéramos en el coche un odómetro muy preciso podríamos medir la distancia recorrida en 1 segundo $= \frac{1}{3\,600}$ de hora y obtendríamos la velocidad promedio durante ese segundo.

En este experimento, la derivada de la función distancia representa la velocidad instantánea del automóvil en un momento determinado.

En general, si tenemos una variable que depende de otra y dicha dependencia está dada mediante una función, la derivada de esa función representa la razón de cambio instantáneo (ya no decimos rapidez, pues no está involucrado el tiempo) de la primera variable con respecto a la segunda.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.



Velocidad instantánea

Un clavadista se lanza desde una plataforma de 10 m y queremos saber la velocidad que lleva al llegar al agua. Para ello, contamos con una cámara de video de alta velocidad y alta definición con la cual tomamos una película del clavado.

En el cronómetro de la cámara vemos que tardó 1.4286 segundos en tocar el agua. Hagamos $t_0 = 1.4286$ s.

Solución:
La velocidad promedio $\overline{v}$ es la distancia recorrida d entre el tiempo t empleado en recorrerla, expresada como:

$$\overline{v} = \frac{d}{t}$$

Llamemos $d(t)$ a la distancia recorrida por el clavadista al haber transcurrido t segundos desde que se lanzó. Por ejemplo, $d(0)=0$ y $d(t_0)=d(1.4286)=10$.

Para obtener su velocidad promedio en un intervalo de tiempo $[t_1,t_2]$ de su caída, observamos que la distancia recorrida en ese lapso se encuentra restando la distancia $d(t_1)$ recorrida hasta el momento t_1 de la distancia $d(t_2)$ recorrida hasta el momento t_2 y que el tamaño del lapso es t_2-t_1; por lo que, su velocidad promedio $\overline{v}$ en el intervalo $[t_1,t_2]$ es el cociente:

$$\overline{v} = \frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} \tag{5.1}$$

Como el clavadista tardó 1.4286 segundos en tocar el agua, su velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[0,t_0]$ fue:

$$\overline{v} = \frac{d(t_0)-d(0)}{t_0-0} = \frac{10}{t_0} = \frac{10}{1.4286} \approx 7 \text{ m/s}, \tag{5.2}$$

pero ésta no es la velocidad con la que llegó al agua, pues a medida que cae la velocidad aumenta debido a la fuerza de gravedad.

Para obtener mejores aproximaciones de su velocidad cuando toca el agua, calculamos velocidades promedio en intervalos $[t,t_0]$, donde t es un instante anterior y próximo a t_0, o sea $t=t_0-k$ con $k>0$. Entonces, la fórmula (5.1) toma la forma:

$$\overline{v} = \frac{d(t_0)-d(t)}{t_0-t} = \frac{d(t_0)-d(t_0-k)}{k} \tag{5.3}$$

Por ejemplo, podemos regresar un poco la película para ver cuánto recorrió en el último décimo de segundo, es decir en el lapso $[1.4286-0.1, 1.4286]$. Si con la ayuda de la cámara sabemos que 0.1 segundos antes de que el clavadista tocara el agua él había recorrido 8.649 metros, entonces podemos escribir:

$$t_0 - k = 1.4286 - 0.1 \text{ s}$$

y

$$d(t_0-k) = d(1.4286-0.1) = 8.649 \text{ m},$$

y su velocidad promedio en el último décimo de segundo, es decir, en el intervalo $[t_0 - k, t_0]$ es, según (5.3),

$$\frac{d(1.4286) - d(1.4286 - 0.1)}{k} = \frac{10 - 8.649}{0.1}$$
$$= 13.51 \text{ m/s},$$

que es mucho mayor que la velocidad promedio en todo el trayecto, la cual calculamos en (5.2).

Si nuestra cámara de alta velocidad es capaz de tomar fotos 0.001 y 0.0001 segundos antes de tocar el agua y hacemos el cálculo de velocidades usando la fórmula (5.3) para los valores de tiempo y distancia que aparecen en las primeras dos columnas de la tabla siguiente, entonces obtenemos las velocidades promedio $\overline{v}$ que ahí se indican:

k	**d(1.4286 – k)**	**$\overline{v}$ promedio en el lapso [1.4286 – k, 1.4286]**
0.1	8.6494	13.51
0.01	9.8609	13.951
0.001	9.9864	13.995
0.0001	9.999	13.999

Todos estos valores de $\overline{v}$ son velocidades promedio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños.

Si continuamos midiendo distancias, ahora correspondientes a instantes posteriores a t_0; es decir, para valores $t > t_0$. Por ejemplo, para $t = 1.4286 + 0.1$, $t = 1.4286 + 0.01$ etcétera, la fórmula (5.1) para obtener las velocidades promedio en los intervalos $[t_0, t]$ se convierte en:

$$\overline{v} = \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} = \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h} \tag{5.4}$$

donde ahora $t = t_0 + h$ con $h > 0$.

Con relación a (5.3), observamos que:

$$\frac{d(t_0) - d(t_0 - k)}{k} = \frac{d(t_0 - k) - d(t_0)}{-k}$$

Por lo tanto, otra manera de escribir (5.3) es:

$$\overline{v} = \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} = \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$$

con $h = -k = -(t_0 - t) = t - t_0 < 0$.

Por consiguiente, podemos resumir las fórmulas (5.3) y (5.4) en una sola:

$$\overline{v} = \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} = \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h} \tag{5.5}$$

donde h puede tomar valores positivos o negativos.

Ninguna de las velocidades $\overline{v}$ que se obtiene para valores de t menores o mayores que t_0 es exactamente la velocidad al llegar al agua. Sin embargo, resulta sensato decir que dicha velocidad, llamada la velocidad instantánea al instante t_0, es el valor al que se aproximan las velocidades promedio obtenidas al tomar instantes t distintos de 10 s, ya sean anteriores o posteriores, pero cada vez más parecidos a $t_0 = 10$ s, o lo que es lo mismo, cuando en (5.5) h es más parecido a 0. Entonces la velocidad instantánea al instante 1.4286 es el límite cuando h tiende a cero de los cocientes:

$$\frac{d(1.4286+h)-d(1.4286)}{h},$$

el cual vale 14 m/s.

Más adelante comprobaremos que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{d(1.4286+h)-d(1.4286)}{h}=14 \text{ m/s}$$

y por nuestra discusión previa es de aceptarse que el correspondiente límite por la derecha también tiene ese valor.

Recordemos que la pendiente de una recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es el cociente

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

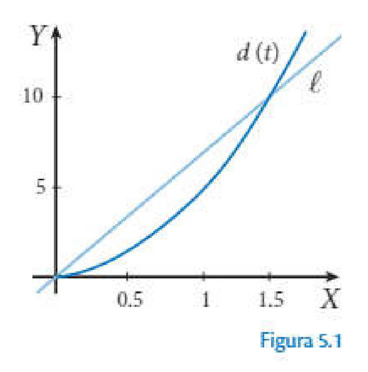


Figura 5.1

así que podemos interpretar geométricamente la velocidad promedio entre dos tiempos t y t_0, y la fórmula (5.5) como la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(t, d(t))$ y $(t_0, d(t_0))$, por ejemplo, en la Figura 5.1, la curva es la gráfica de la función distancia $d(t)$ y la recta ℓ es la recta que une los puntos $(0,0)$ y $(1.4286,10)$; ésta tiene pendiente 7.

Al tomar velocidades promedio en intervalos de tiempo cada vez más cortos, todos con algún extremo igual al momento de entrar al agua, $t_0 = 1.4286$, las rectas correspondientes, es decir, aquellas que pasan por $(1.4286,10)$ y con pendiente $\dfrac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$, tienden a parecerse a la recta tangente a la curva en el punto $(1.4286,10)$. (Figura 5.2).

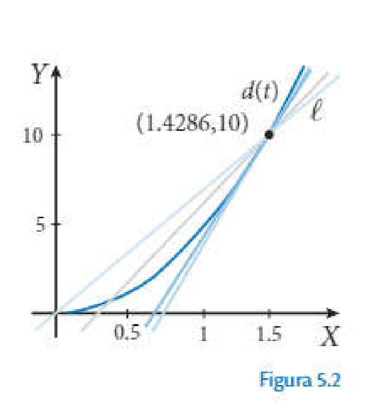


Figura 5.2

O sea, las pendientes de las rectas, $\dfrac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$, que son velocidades promedio se parecen a la pendiente de la recta tangente. Por lo tanto, tenemos una identificación entre la velocidad instantánea $\overline{v}$ en el momento de entrar al agua, $t_0 = 1.4286$, y la pendiente m de la recta tangente a la gráfica de la función distancia, $d(t)$ en el punto $(1.4286,10)$. Este número m se llama la derivada de la función d en el punto $t_0 = 1.4286$.

Lo anterior nos lleva a definir de manera general la derivada de una función en un punto.

Sea f una función real definida en un intervalo abierto que contiene al número a, si el límite;

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe, decimos que f es *derivable* en a y escribimos:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \qquad (5.6)$$

El número $f'(a)$ se llama la *derivada* de f en el número (punto) a y representa la *pendiente de la recta tangente a la gráfica* de la función $f(x)$ en el punto $(a,f(a))$.

TIP

Si en (5.6) hacemos $a+h=b$, entonces $h\to 0$ equivale a $b\to a$ y la fórmula se transforma en:

$$f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

El cociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es llamado *cociente de Fermat*, en tanto que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se dice que es el *cociente de Newton*, ambos correspondientes a la función f y al punto a.

Ejemplos

1. Encontrar la derivada de la función $f(x)=x^3$ en $x=5$.

Solución:
Como:

$$f'(5)=\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$

Calculamos;

$$\lim_{h\to 0}\frac{(5+h)^3-5^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5^3+3(5^2)h+3(5)h^2+h^3-5^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(5^2)h+3(5)h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(3(5^2)+3(5)h+h^2\right)h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(3(5^2)+3(5)h+h^2\right)=3(5^2)=75$$

Así, $f'(5)=75$.

2. Encontrar la derivada de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ en $x=2$.

Solución:
Como:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

Calculamos;

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-2-h}{2(2+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{2(2+h)h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=-\frac{1}{4}$$

Así, $f'(2)=-\frac{1}{4}$.

3. Un objeto en caída libre sin fricción recorre una distancia de $4.9t^2$ metros en t segundos a partir del momento en que se dejó caer. ¿Qué distancia ha recorrido después de 3 segundos? ¿Cuál es la velocidad instantánea del objeto en ese momento?

TIP

Pierre de Fermat, (1601-1665) jurista y matemático francés. En 1630, cuando leyó una traducción de la *Aritmética de Diofanto*, escribió en el margen, justo al lado del problema 8 del libro II que dice: "Dado un número que sea un cuadrado, descomponerlo como suma de otros dos números cuadrados", su famosa conjetura: la ecuación $x^n+y^n=z^n$ no tiene soluciones enteras positivas para $n>2$. Trescientos cincuenta años después, en 1994, Andrew Wiles demostró esta conjetura.

Los números de la forma $2^{2^n}+1$ llevan su nombre.

TIP

Isaac Newton, (1642-1727) matemático y físico británico.

En 1687 publicó el libro *Philosophiae naturalis principia mathematica*, donde describió la ley de gravitación universal: la fuerza ejercida entre dos cuerpos es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa, y estableció las bases de la mecánica clásica.

Newton comparte con Leibniz el crédito por la invención del cálculo diferencial e integral.

Solución:

Llamemos $d(t)$ a la distancia recorrida por el objeto en t segundos después de que se le dejó caer, o sea:

$$d(t) = 4.9t^2 \tag{5.7}$$

La distancia recorrida después de 3 segundos es:

$$d(3) = 4.9\left(3^2\right) = 44.1 \text{ metros}$$

Para encontrar la velocidad instantánea a los 3 s, calculamos

$$\lim_{h\to 0}\frac{d(3+h)-d(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4.9(3+h)^2-4.9\left(3^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4.9\left(3^2+6h+h^2-3^2\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4.9\left(6h+h^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0}4.9(6+h) = 29.4$$

Entonces, a los 3 segundos el objeto viaja a una velocidad de 29.4 m/s.

4. ¿Cuál es la velocidad instantánea del clavadista del problema introductorio al momento de tocar el agua?

Solución:

La distancia $d(t)$ recorrida por el clavadista en intervalos $[0,t]$ para instantes $t \le 1.4286$, es prácticamente la que está dada por la fórmula de caída libre (5.7) del ejemplo anterior. Para saber cuánto tarda en tocar el agua resolvemos:

$$d(t) = 10$$

$$4.9t^2 = 10$$

$$t^2 = \frac{10}{4.9} = \frac{100}{49}$$

Entonces:

$$t = \sqrt{\frac{100}{49}} = \frac{10}{7},$$

así, el clavadista tarda $\frac{10}{7}$ segundos en llegar al agua.

Ahora debemos calcular la velocidad instantánea para $t = \frac{10}{7}$, es decir,

$$\lim_{h\to 0}\frac{d\left(\frac{10}{7}+h\right)-d\left(\frac{10}{7}\right)}{h}$$

Por nuestra discusión en el ejemplo introductorio es suficiente calcular el valor de

$$\lim_{h\to 0}\frac{d\left(\frac{10}{7}+h\right)-d\left(\frac{10}{7}\right)}{h},$$

TIP

f es derivable en a si el límite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe.

Ejemplos

lo que hacemos ahora:

$$\lim_{h\to 0}\frac{d\left(\frac{10}{7}+h\right)-d\left(\frac{10}{7}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4.9\left(\frac{10}{7}+h\right)^2-4.9\left(\frac{10}{7}\right)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4.9\left(\left(\frac{10}{7}\right)^2+2\left(\frac{10}{7}\right)h+h^2-\left(\frac{10}{7}\right)^2\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4.9\left(2\left(\frac{10}{7}\right)h+h^2\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}4.9\left(\frac{20}{7}+h\right)=14.$$

Así, el clavadista entra al agua a una velocidad de 14 m/s, es decir, 50.4 km/h.

Ejercicios

En cada caso, calcula la derivada de la función en el punto dado.

1. $f(x)=x$ en $a=-1$
2. $f(x)=3x$ en $a=2$
3. $f(x)=6$ en $a=-3$
4. $f(x)=-x$ en $a=0$
5. $f(x)=x+8$ en $a=-5$
6. $f(x)=-2x+5$ en $a=4$
7. $f(x)=x^2$ en $a=3$
8. $f(x)=x^2$ en $a=-4$
9. $f(x)=-x^2$ en $a=-7$
10. $f(x)=3x^2-7$ en $a=5$
11. $f(x)=5x^2$ en $a=\frac{1}{2}$
12. $f(x)=\frac{1}{x+5}$ en $a=-2$
13. $f(x)=\frac{x}{x-4}$ en $a=8$
14. $f(x)=x^2-4x+5$ en $a=1$
15. $f(x)=x^3-2$ en $a=3$
16. $f(x)=x^3+x^2$ en $a=2$
17. $f(x)=\sqrt{x}$ en $a=2$
18. $f(x)=\sqrt{x+7}$ en $a=9$
19. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ en $a=7$
20. Calcula $f'(1)$ y $f'(2)$ para la función $f(x)=(x-1)(x-2)$ y comprueba que $f'(1)\cdot f'(2)<0$

La derivada como función

Usamos nuevamente el caso del clavadista y suponemos, como en el ejemplo 4 de la sección anterior que la distancia que recorre está dada prácticamente por la fórmula de la caída libre, es decir

$$d(t)=4.9t^2$$

Si necesitáramos saber la velocidad instantánea en muchos momentos: t_1, t_2, $t_3, \ldots,$ posteriores al inicio de su caída y anteriores al instante $t_0 = \frac{10}{7}$ s en que toca el agua, tendríamos que calcular los límites

$$d'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h}$$

Para todos estos valores $t_1, t_2, t_3, \ldots,$ lo cual resulta sumamente laborioso. Por ello, trataremos de calcular el límite anterior de manera general para cualquier $t \in (0, t_0)$.

Como la distancia recorrida por el clavadista en t segundos, con $t \in (0, t_0)$, es $d(t) = 4.9t^2$, calculamos el límite

$$\begin{aligned} d'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4.9\left(t^2 + 2th + h^2 - t^2\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4.9\left(2th + h^2\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 4.9(2t + h) \\ &= 9.8t, \end{aligned}$$

de esta manera, si queremos encontrar la velocidad instantánea en algún momento, por ejemplo $t = 0.5$ segundos, simplemente evaluamos:

$$d'(t) = 9.8t \ \text{ en } t = 0.5$$

De donde:

$$d'(0.5) = 9.8(0.5) = 4.9 \text{ m/s}$$

En general, si f es una función real, entonces la función f' está definida por la fórmula:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{5.8}$$

la cual se conoce como la *función derivada* de f. El dominio de f' es el conjunto de puntos x para los cuales este límite existe y siempre será un subconjunto del dominio de f.

Trabajaremos con funciones f cuyos dominios son uniones de intervalos que no se intersecan entre sí.

Observa que la regla de correspondencia de f' es más complicada que las que habíamos trabajado antes, en las que básicamente intervenían solo operaciones aritméticas o geométricas; ahora debemos obtener límites para conocer sus valores.

Encontrar la derivada de la función consiste en obtener una fórmula que dé la regla de correspondencia de f'.

Notación

Para $y=f(x)$, denotamos a la derivada de f respecto a x como $f'(x), \frac{df}{dx}$ o simplemente como $f', \frac{dy}{dx}$ o y'.

TIP

Fue Gottfried Leibniz (Leipzig, 1646 -1716) quien introdujo el símbolo $\frac{dy}{dx}$.

En este contexto tanto a d como al símbolo $'$ se les llama *símbolos de diferenciación.*

Cuando queramos señalar el valor de la derivada de f en un punto particular x escribiremos $\frac{df}{dx}(x)$, aunque normalmente usaremos en tal caso la notación $f'(x)$, por ser más clara.

Hay funciones que son derivables en cada punto de su dominio, pero no todas tienen esta propiedad, como lo muestra el ejemplo 3 de la siguiente lista.

Ejemplos

1. Encontrar la derivada de la función $f(x)=3x-4$ (Figura 5.3) y dar los valores de $f'(-2)$ y $f'(1)$.

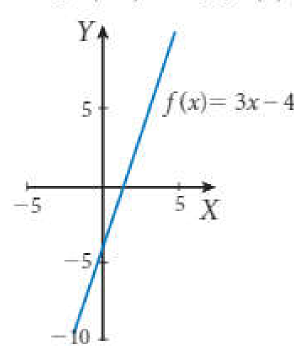
Solución:
Calculamos

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3(x+h)-4)-(3x-4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=3,$$

Así, que:

$$f'(x)=3$$

para todo x.
Por lo tanto, $f'(-2)=3$ y $f'(1)=3$.



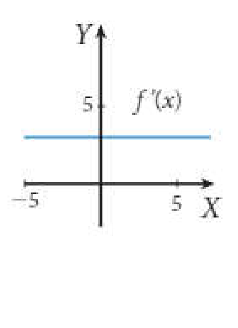


Figura 5.3

2. Encontrar la derivada de la función $\frac{1}{x}$ (Figura 5.4 de la página 162) y dar los valores de $f'(-1)$ y $f'(4)$.

Solución:
Calculamos:

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{h(x+h)x}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x+h)x}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}=-\frac{1}{x^2}$$

De tal forma que, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ para todo $x \neq 0$.

Por lo tanto,

$$f'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} = -1 \quad \text{y} \quad f'(4) = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$$

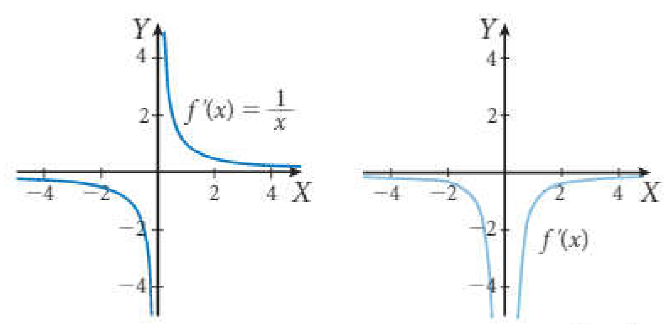


Figura 5.4

3. Encontrar los puntos donde la función $f(x) = |x|$ es derivable. (ver Figura 5.5 de la página 163).

Solución:
Calculamos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

Como los valores de $|x|$ dependen de como esté colocado x respecto de 0, haremos los cálculos por separado cuando $x > 0$, $x = 0$ y $x < 0$.

Supongamos que $x > 0$. Como h tiende a cero, entonces $x+h$ se parece a $x > 0$ y así $x+h > 0$, para h parecido a cero, así

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1$$

Por tanto $f(x) = |x|$ es derivable si $x > 0$ y entonces $f'(x) = 1$.
Supongamos que $x < 0$. Como h tiende a cero, entonces $x+h < 0$, para h pequeña:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Por tanto $f(x) = |x|$ es derivable si $x < 0$ y entonces $f'(x) = -1$.
Finalmente, si $x = 0$, el signo de $0+h$ dependerá de qué lado del cero esté h. Si $h < 0$ entonces;

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1,$$

en cambio, si $h>0$,

$$\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{h}{h}=1$$

Así, los cocientes

$$\frac{|0+h|-|0|}{h},$$

no tienen el mismo límite por la derecha (1) que por la izquierda (-1) en 0, entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h},$$

no existe, (ver la página 126), por lo que $|x|$ no es derivable en 0.

Recapitulando

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$$

y la derivada no está definida para $x=0$.

En la gráfica de $|x|$ (Figura 5.5) observamos que la recta tangente a $|x|$ en un punto $(x,|x|)$, con $x\neq 0$ es una de las 2 rectas que componen su gráfica y tiene pendiente -1 para $x<0$ y 1 para $x>0$, pero la gráfica de $|x|$ no tiene tangente en $(0,0)$.

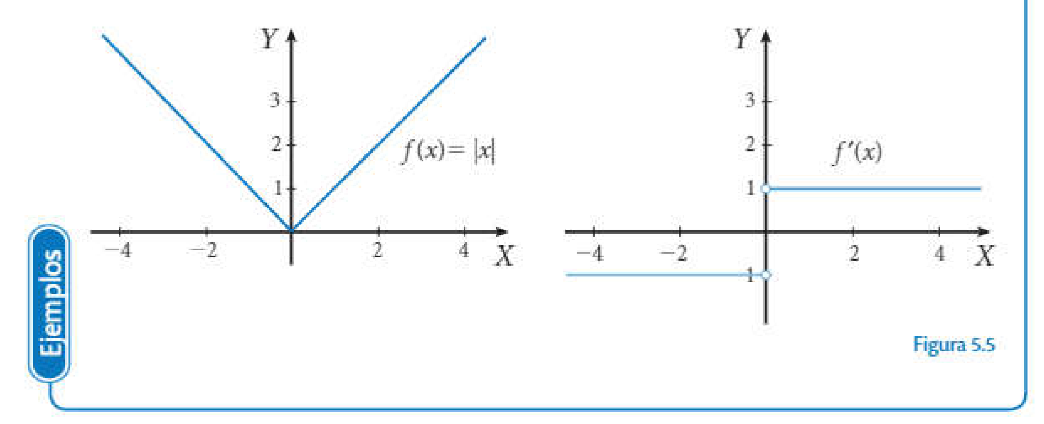


Figura 5.5

Ejemplos

Continuidad de las funciones derivables. Si una función es derivable en un punto a, entonces su gráfica tiene una recta tangente en el punto $(a,f(a))$, así que es claro que la gráfica de f no puede estar rota en a. Esta propiedad se enuncia de la siguiente manera:

Si f es derivable en un punto a, entonces f es continua en a.

La demostración de este resultado aparece en el apéndice del capítulo.

El ejemplo anterior, $f(x)=|x|$ muestra que el recíproco de esta propiedad no es cierto, ya que $|x|$ es continua en 0 y sin embargo no es derivable en ese punto.

TIP

Consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & \text{si } x\in(a,c]\\ h(x) & \text{si } x\in(c,b)\end{cases}.$$

Para analizar si f es derivable en c, hay que calcular

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^-}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}$$

y

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^+}\frac{h(x)-g(c)}{x-c}.$$

Si estos dos límites existen y son iguales, el valor común es $f'(c)$.

Reglas y fórmulas de derivación

Pensamiento crítico

Si $f(x)$ es continua en un punto a, ¿es f derivable en a?

Para encontrar la derivada de una función, por ejemplo $f(x)=3x^2+\frac{1}{x}$, podríamos calcular directamente el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

para cada x, pero las expresiones resultantes pueden ser algo complicadas.

En lugar de ello, podemos utilizar las fórmulas y reglas de la derivación para funciones que se obtienen a partir de otras mediante operaciones. Es decir, podemos escribir la función dada en términos de funciones más sencillas y aplicar las fórmulas y reglas que aparecen un poco más adelante.

Para la interpretación geométrica de algunas de ellas debe recordarse que la recta tangente ℓ a la gráfica de una función en un punto P es la recta a la que se aproximan las secantes PQ, es decir, las rectas que pasan por P y otro punto Q de la gráfica, cuando Q se toma cada vez más próximo a P (Figura 5.6).

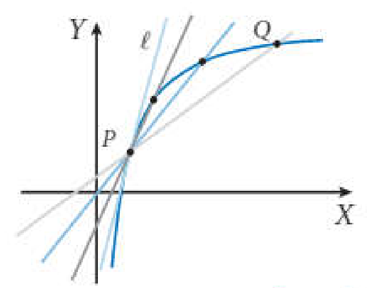


Figura 5.6

- **Derivada de una constante.** Si $f(x)=c$, donde c es una constante, entonces $f'(x)=0$ para todo número real x. O sea,

$$(c)'=0$$

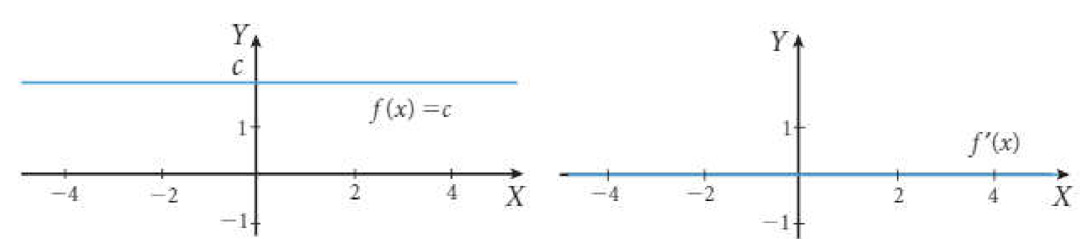


Figura 5.7

Pensamiento crítico

¿Es cierta la siguiente afirmación? Como al evaluar la función f en un número a obtenemos la constante $f(a)$ es una constante, entonces $f'(a)=0$.

En la Figura 5.7 se ve que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=c$ en cualquiera de sus puntos es ella misma, y tiene pendiente igual a 0 por ser horizontal, así $f'(x)=0$, lo cual comprobamos analíticamente.

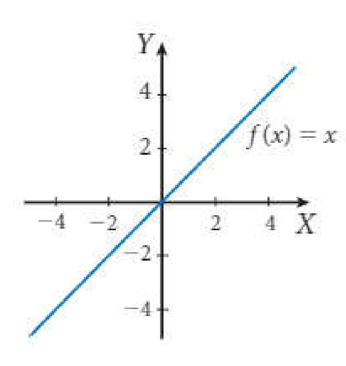
Consideremos cualquier x real, debemos calcular:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

así que $f'(x)=0$ para todo número real x.

- **Derivada de la función identidad.** Si $f(x)=x$ para todo x, entonces $f'(x)=1$ para todo número real x. O sea

$$(x)'=1$$



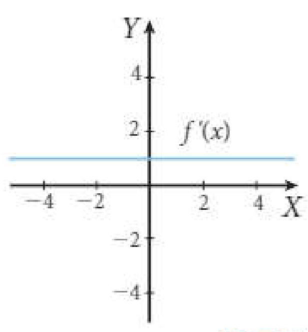


Figura 5.8

En la Figura 5.8 se ve que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x$, en cualquiera de sus puntos, es ella misma, y tiene pendiente igual a 1, así $f'(x)=1$, lo cual comprobamos analíticamente.

Consideremos cualquier x real, debemos calcular;

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} \\ &= 1. \end{aligned}$$

así que $f'(x)=1$ para todo número real x.

- **Derivada del producto de una función por una constante.** Si $f(x)$ es derivable y c es una constante, entonces $cf(x)$ es derivable y

$$(cf)' = cf'$$

Esta regla dice: "*La derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función*". También se puede enunciar diciendo que la constante c puede *salir* del signo de diferenciación.

En la Figura 5.9 se muestran dos funciones: f y $2f$ y sus tangentes en los puntos $(1, f(1))$ y $(1, 2f(1))$. La pendiente de la tangente a $2f$ es el doble de la pendiente de la tangente a f. Esto nos sugiere que $(2f)'=2f'$. Ahora lo comprobamos de manera general.

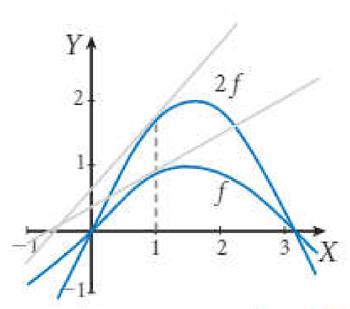
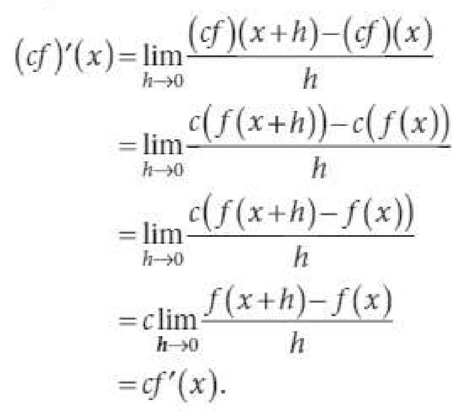


Figura 5.9


Consideremos cualquier x real, debemos calcular



$$\begin{aligned} (cf)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(cf)(x+h)-(cf)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c(f(x+h))-c(f(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c(f(x+h)-f(x))}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x). \end{aligned}$$

Así que $(cf)'(x)=cf'(x)$ para todo número real x.

Para pasar del tercer al cuarto renglón se utilizó el hecho de que el límite del producto de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función, ver la página 124.

Las demostraciones de las siguientes cuatro reglas están en el apéndice B de esta unidad. El estudio de dichas demostraciones es opcional.

- **Derivada de la suma y resta de dos funciones.** Si f y g son funciones derivables, entonces $f+g$ y $f-g$ son derivables y

$$(f+g)' = f'+g'$$
$$(f-g)' = f'-g'$$

Estas reglas dicen: "*La derivada de una suma es la suma de las derivadas*" y "*La derivada de una diferencia es la diferencia de las derivadas*".

TIP

La fórmula para derivar el producto de dos funciones se llama la regla Leibniz. Hay una generalización de esta regla que da una fórmula para calcular la derivada de la derivada de un producto de dos funciones; la derivada de la derivada de la derivada de un producto de dos funciones, etcétera.

- **Derivada de un producto de funciones.** Si f y g son funciones derivables entonces fg es derivable y

$$(fg)' = f'g + g'f$$

Esta regla dice: "*La derivada del producto de dos funciones es: la derivada de la primera por la segunda más la derivada de la segunda por la primera*".

- **Derivada de un cociente de funciones.** Si f y g son funciones derivables entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en los puntos x en que $g(x) \neq 0$ y

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \quad (5.9)$$

Esta regla dice: "*La derivada del cociente de dos funciones es: la derivada del numerador multiplicada por el denominador menos la derivada del denominador por el numerador, todo dividido entre el denominador al cuadrado*".

Un caso particular de esta regla es la que sirve para derivar el recíproco de una función g. Basta tomar en (5.9) f igual a la función constante 1. En este caso, $f' = 0$ y obtenemos:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Esta regla dice: "*La derivada del recíproco de una función es: menos el cociente de la derivada de la función entre el cuadrado de la propia función*".

- **Derivada de x^n.** Si n es cualquier número real, entonces:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (5.10)$$

Esta regla dice: "*La derivada de x^n se obtiene poniendo el exponente como coeficiente y restando uno al exponente*".

Observación: Al inicio del apéndice B está la demostración de esta regla para cuando n es un número natural; usando la fórmula de la derivada del recíproco, puede verse que es cierta cuando n es cualquier número entero. Para probarla cuando n es un número racional usaremos propiedades de la función inversa, (la demostración está en la página 511). Por último, para ver que es cierta para cualquier número real se necesita utilizar la función exponencial, e^x, que veremos en la unidad 10.

TIP

Reglas de derivación:
Si f y g son derivables, entonces
$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Como consecuencia de las reglas anteriores obtenemos la siguiente:

- **Derivada de un polinomio.** Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ son reales y n es un entero no negativo, entonces p es derivable y

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$$

Esta regla dice: "*La derivada de un polinomio se obtiene sumando las derivadas de cada uno de los monomios que lo componen*".

Observa que la derivada del término independiente a_0 es 0, por tratarse de una constante.



Si f es derivable en a, entonces ¿f' es derivable en a?

Derivada de $f^n(x)$. Si f es derivable y n es un número real, entonces

$$\left(f^n\right)'(x)=n\left(f^{n-1}(x)\right)f'(x).$$

Esta regla dice: "*La derivada de la potencia de una función derivable se obtiene poniendo el exponente como coeficiente, restando uno al exponente y multiplicando por la derivada de* f".

La prueba aparece en el ejemplo 4 de la página (174)

Pensamiento crítico

Si f es un polinomio, entonces ¿f' es un polinomio?

Ejemplos

1. Calcular la derivada de $f(x)=3x^2+\frac{1}{x}$.

Solución:

Usamos varias de las reglas recién vistas:

$$\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)'=\left(3x^2\right)'+\left(\frac{1}{x}\right)'$$ Derivada de una suma.

$$=3\left(x^2\right)'+\left(\frac{1}{x}\right)'$$ Derivada de una constante por una función.

$$=3(2x)+\left(-\frac{(x)'}{x^2}\right)$$ Derivada de una potencia y del recíproco.

$$=6x-\frac{1}{x^2}.$$

2. Calcular la derivada de $f(x)=\frac{5x^2-7}{x^3+5x}$.

Solución:

$$\left(\frac{5x^2-7}{x^3+5x}\right)'=\frac{\left(5x^2-7\right)'\left(x^3+5x\right)-\left(5x^2-7\right)\left(x^3+5x\right)'}{\left(x^3+5x\right)^2}$$ Derivada de un cociente.

$$=\frac{(10x)\left(x^3+5x\right)-\left(5x^2-7\right)\left(3x^2+5\right)}{\left(x^3+5x\right)^2}$$ Derivada de cada polinomio.

$$=\frac{-5x^4+46x^2+35}{\left(x^3+5x\right)^2}.$$ Simplificación.

3. Calcular la derivada de $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Solución:

Escribimos la raíz como exponente:

$$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$$



Si $f'(a)=0$, ¿cómo es la recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$?

Usamos la derivada de x^n. Recuerda que la fórmula (5.10) vale para cualquier exponente real n.

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$
$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},$$

que también puede escribirse como;

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$
$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Observa que está fórmula no tiene sentido para $x=0$. De hecho, la función $\sqrt[3]{x}$ está definida en 0, pero no es derivable en ese punto.

4. Calcula la derivada de $f(x)=2\sqrt{x+3}$.

Solución:
Escribimos la raíz como exponente:

$$f(x)=2\sqrt{x+3}=2(x+3)^{\frac{1}{2}}$$

Aplicamos las reglas de derivación para una constante por una función y la de una potencia de una función:

$$f'(x)=2\left(\frac{1}{2}\right)(x+3)^{\frac{1}{2}-1}(1)$$
$$=(x+3)^{-\frac{1}{2}}$$

O sea,

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}}.$$

Observa que esta fórmula no tiene sentido para $x \leq 3$. De hecho, la función $2\sqrt{x+3}$ está definida en $[-3,\infty)$, pero no es derivable en -3.

5. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=2\sqrt{x+3}$ (Figura 5.10) en el punto $(-1, f(-1))=(-1, 2\sqrt{2})$.



¿Qué relación existe entre el dominio de f' y el dominio de f?

Solución:
Como la ecuación de la recta que pasa por un punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

y $f'(-1)$ es la pendiente de la recta tangente en $(-1, f(-1))$, entonces tenemos que $x_1 = -1$, $y_1 = f(-1)$ y $m = f'(-1)$.
Tenemos que:

$$f(-1) = 2\sqrt{-1+3}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

y por el ejercicio anterior sabemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}},$$

de donde:

$$f'(-1) = \frac{1}{\sqrt{-1+3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Así, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$$
$$y - 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)$$
$$y = 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x+1),$$

es decir,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+5).$$

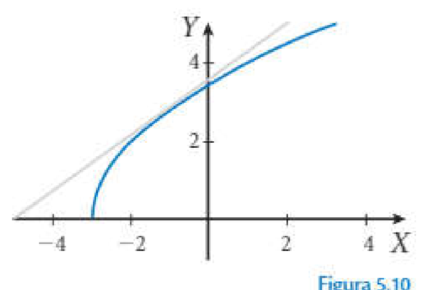


Figura 5.10

Ejemplos

En el ejemplo anterior encontramos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2\sqrt{x+3}$ en el punto $(-1,1)$.

En general, si f es una función derivable en un punto a, la pendiente a la *recta tangente a la gráfica* de f en el punto $(a, f(a))$ es $f'(a)$, así que la *ecuación de la recta tangente a la gráfica* es

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

Para abreviar se dice que ésta es la recta tangente a la gráfica de f en el punto correspondiente a a.

Ejercicios

En cada caso, calcula la derivada de la función.

1. $f(x) = x^2 + 5x - 6$
2. $f(x) = x^3 + 10x^2 - 7x$
3. $f(x) = -2x^8 + 3x^4 - 8x + 1$
4. $f(x) = 10x^{-1} + 5x$
5. $f(x) = 3x^{-3} + 2x^{-2} + 12$
6. $f(x) = 6x^8 - 4x^{-5} - 9x^{-3}$
7. $f(x) = x\sqrt{x}$
8. $f(x) = (x^2 - 5x)(2x^4 + 6x^3 - 9)$
9. $f(x) = (6x^3 - 7)(4x^{-5} - 8x^{-3} + 10)$

10. $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}+8\right)\left(7x^{-1}-8\right)$

11. $f(x)=\left(\sqrt{2}x^2+6x-3\right)\left(2\sqrt{x}-6x\right)$

12. $f(x)=\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{5}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}+x^5\right).$

13. $f(x)=\dfrac{4x}{x-3}$

14. $f(x)=\dfrac{x+9}{x-4}$

15. $f(x)=\dfrac{-2x-11}{5x+1}$

16. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}$

17. $f(x)=\dfrac{8x^3-6x^2}{x^2+3x-2}$

18. $f(x)=\dfrac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$

En cada caso, encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $P\left(a,f(a)\right)$.

19. $f(x)=\dfrac{1}{20}x^3+\dfrac{1}{10}x^2-\dfrac{12}{5}x;\ P\left(-6,f(-6)\right)$

20. $f(x)=\dfrac{1}{22}x^4-\dfrac{1}{2}x^3+x^2+6;\ P\left(2,f(2)\right)$

21. $f(x)=\sqrt{-4x+24};\ P\left(4,f(4)\right)$

22. $f(x)=\sqrt{3x^2-16x+24};\ P\left(3,f(3)\right)$

23. $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2+3};\ P\left(-1,f(-1)\right)$

24. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-9};\ P\left(-4,f(-4)\right)$

Encuentra los puntos de la gráfica de la función f en los que la recta tangente es horizontal:

25. $f(x)=x^2+5x-1$

26. $f(x)=-3x^2+6x+4$

27. $f(x)=x^3+x^2-5x+1$

28. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{9}{4}x^2-\dfrac{5}{2}x+6$

29. $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$

30. $f(x)=\dfrac{1}{20}x^5-\dfrac{9}{20}x^3-1$

Ejercicios

Derivadas de las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante son derivables en todo su dominio y:

$$(\operatorname{sen} x)'=\cos x$$
$$(\cos x)'=-\operatorname{sen} x$$
$$(\tan x)'=\sec^2 x$$
$$(\cot x)'=-\csc^2 x$$
$$(\sec x)'=\sec x\tan x$$
$$(\csc x)'=-\csc x\cot x$$

Observa que las fórmulas que comienzan con "c" llevan un signo "$-$".

La demostración de estas fórmulas se darán en el apéndice B.

Ejemplos

1. Calcular la derivada de $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Solución:
Usamos la regla para la derivada de un cociente.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\operatorname{sen} x)' x - (x)' \operatorname{sen} x}{x^2} \\ &= \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}. \end{aligned}$$

2. Calcular la derivada de $f(x)=2\cos x \operatorname{sen} x$.

Solución:
Usamos la regla para la derivada de un producto.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\cos x)' \operatorname{sen} x + 2\cos x(\operatorname{sen} x)' \\ &= 2(-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} \boldsymbol{x} + 2\cos x \cos x \\ &= 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x \\ &= 2\cos(2x). \end{aligned}$$

Ejercicios

Calcula en cada caso, la derivada de la función.

1. $f(x)=\tan x+\cos x$
2. $f(x)=-5\sec x+8\csc x$
3. $f(x)=6\cos x-9\operatorname{sen} x$
4. $f(x)=\operatorname{sen} x \csc x$
5. $f(x)=\tan x \sec x$
6. $f(x)=x^2 \csc x \cot x$
7. $f(x)=\sqrt{\cos x}$
8. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$
9. $f(x)=\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$
10. $f(x)=\dfrac{3\tan x}{(\operatorname{sen} x)(\cot x)}$
11. $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$
12. $f(x)=\dfrac{5x}{\operatorname{sen} x}+\dfrac{7}{\cot x}$
13. $f(x)=\dfrac{\left(x^2-2\right)\tan x}{\sec x}$
14. $f(x)=x^3\csc x-3x^4\sec x$
15. $f(x)=\sqrt{x}\cos x+x^{-1}\operatorname{sen} x$
16. $f(x)=8x^{-2}\tan x-4x^{-3}\cot x+7$
17. $f(x)=\dfrac{\cot x-\csc x}{\cot x+\csc x}$
18. $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sec x}\right)\left(\dfrac{\csc x}{\cos x}\right)$
19. $f(x)=\left(\dfrac{x^5}{\csc x}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^5-1}\right)$
20. Supongamos que $r\neq s$. Comprueba que si $f(x)=(x-r)(x-s)$ entonces $f'(r)f'(s)<0$ ¿Qué sucede si $r=s$?

Regla de la cadena

Encontrar la derivada de la función:

$$h(x)=\left(5x^2+3x\right)^2$$

Vamos a ver dos maneras distintas de resolver este ejercicio.

Primera solución: Desarrollamos el cuadrado

$$h(x)=25x^4+30x^3+9x^2,$$

y luego derivamos el resultado

$$h'(x)=100x^3+90x^2+18x$$

Segunda solución: Aplicamos la regla para la derivada de una potencia entera de una función (página 167):

$$h'(x)=2\left(5x^2+3x\right)^{2-1}\left(5x^2+3x\right)'$$

O sea,

$$h'(x)=2\left(5x^2+3x\right)(10x+3) \tag{5.11}$$

Al efectuar el producto obtenemos:

$$h'(x)=100x^3+90x^2+18x$$

que por supuesto coincide con lo obtenido en la primera solución.

Entremos en más detalle en la segunda solución. La función $h(x)=\left(5x^2+3x\right)^2$ es la composición de las siguientes dos funciones.

$$y=f(x)=5x^2+3x \qquad \text{y} \qquad g(y)=y^2$$

En efecto:

$$h=g(y)=y^2=\left(5x^2+3x\right)^2$$

Si calculamos por separado las derivadas de g y y, tenemos que:

$$y'=\left(5x^2+3x\right)'=10x+3$$

$$g'(y)=\left(y^2\right)'=2y,$$

al multiplicar, obtenemos:

$$g'(y)y'=2y(10x+3)$$

Recordamos que $y=5x^2+3x$, entonces:

$$g'(y)y'=2\left(5x^2+3x\right)(10x+3),$$

lo cual coincide con la expresión (5.11) obtenida en la segunda solución.

Es decir,

$$\begin{aligned} h'(x)&=g'(y)y'(x)\\ &=g'(f(x))f'(x) \end{aligned}$$

Este procedimiento se conoce como la *Regla de la cadena* y se enuncia de la siguiente manera:

Regla de la cadena: Si f es derivable en x y g es derivable en $y=f(x)$ entonces la composición $h(x)=g(f(x))$ es derivable en xy:

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x),$$

o más brevemente, si $h=g(y)$, y y es función de x entonces;

$$h'=g'(y)y'. \qquad (5.12)$$

Está fórmula queda escrita de manera más sugerente usando la notación $\frac{d}{dx}$:

$$\frac{dh}{dx}=\frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Hay funciones, como la del ejemplo inicial de esta sección, que son una composición de funciones y que antes de derivarse pueden reescribirse efectuando las operaciones indicadas (en el ejemplo, elevamos al cuadrado antes de derivar), pero no siempre las funciones consideradas se prestan para ello.

TIP

El establecimiento y formulación actual de la Regla de la cadena se debe a Lagrange (Giuseppe Luigi Lagrange; (Turín, 1736-1813), quien la introdujo en 1797 en su trabajo *Teoría de las funciones analíticas.*

TIP

Si f es derivable en x y g es derivable en $y=f(x)$ entonces:

$$\left(g(f(x))\right)'=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Ejemplos

1. Derivar $h(x)=\left(8x^2-4x+1\right)^4$.

Solución:
Hacemos $y=8x^2-4x+1$ y $g(y)=y^4$, entonces $h=g(y)$ de donde:

$$\begin{aligned} h'&=g'(y)y' \\ &=4y^3(16x-4) \\ &=4\left(8x^2-4x+1\right)^3(16x-4). \end{aligned}$$

2. Derivar $h(x)=\sqrt{5x^3-2x}$.

Solución:
Hacemos $y=5x^3-2x$ y $g(y)=\sqrt{y}=y^{1/2}$, entonces $h=g(y)$ de donde:

$$\begin{aligned} h'&=g'(y)y' \\ &=\frac{1}{2}y^{-1/2}\left(15x^2-2\right) \\ &=\frac{1}{2}\left(5x^3-2x\right)^{-1/2}\left(15\mathbf{x}^2-2\right) \\ &=\frac{15x^2-2}{2\sqrt{5x^3-2x}}. \end{aligned}$$

TIP

Si f es derivable, entonces:

$\left(\operatorname{sen}(f(x))\right)' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$

y

$\left(\cos(f(x))\right)' = -\operatorname{sen}(f(x)) \cdot f'(x)$

Ejemplos

3. Derivar $h(x) = \cos(6x^2)$.

Solución:

Hacemos $y = 6x^2$ y $g(y) = \cos y$, entonces $h = g(y)$ de donde

$$\begin{aligned} h' &= g'(y)y' \\ &= -\operatorname{sen}(y)(12x) \\ &= -12x \operatorname{sen}(6x^2). \end{aligned}$$

4. Justificar la regla de derivación de una potencia de una función derivable:

$$(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

Solución:

Hacemos $h(x) = f^n(x)$, entonces $h = g(y)$ donde $g(y) = y^n$ y $y = f(x)$.

Por la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned} h' &= g'(y)y' \\ &= ny^{n-1}f'(x). \end{aligned} \qquad \text{o sea,} \qquad h'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

Ejercicios

En cada caso, calcula la derivada de la función.

1. $f(x) = (5x+7)^4$

2. $f(x) = (8-3x)^{-9}$

3. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

4. $f(x) = \left(x^4 + 5x^3 + 1\right)^{12}$

5. $f(x) = \cos^2 x$

6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x}$

7. $f(x) = \tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

8. $f(x) = \left(x^3 + \dfrac{9}{x}\right)^2$

9. $f(x) = \dfrac{6x+2}{\left(-5x^5 + 12x^3 - 4\right)^5}$

10. $f(x) = \tan\left(3x^3 - 7x^2\right)$

11. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$

12. $f(x) = \dfrac{\cos 5x}{\cos 9x}$

13. $f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$

14. $f(x) = \dfrac{\cos(x+1)}{x \cos x}$

15. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

16. $f(x) = \sqrt[3]{\sec^2 x}$

17. $f(x) = \cot \sqrt[3]{x^2}$

18. $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$

19. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 9}{x - 6}}$

20. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\tan x}}{-2x^2 + 8x}$

21. $f(x) = \dfrac{x^3 + 7x - 1}{\sqrt{x - 3}}$

22. $f(x) = \left(\dfrac{\cot 2x}{x^2 - 2x}\right)^{-2}$

23. $f(x) = \csc^3\left(x^4 + 5x^2\right)$

24. $f(x) = \cot^2\left(\dfrac{3x^2}{(x+2)^3}\right)$

25. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\tan^2\left(\sqrt{x}\right)\right)$

Razón de cambio

Razón de cambio promedio

Si la arista de un cubo, que mide 1 m, se incrementa 50 cm, entonces el volumen del cubo variará (Figura 5.11), en este caso aumentará. ¿Cómo se compara el incremento en el volumen debido al incremento en la longitud de la arista?; es decir ¿Por qué factor *k* hay que multiplicar el incremento de la arista para obtener el incremento del volumen?

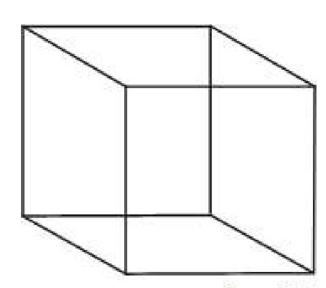


Figura 5.11

Solución:
Llamemos y al volumen del cubo y x a la longitud de su arista, y es función de x y está dada por la fórmula:

$$y = x^3.$$

El volumen original se obtiene evaluando en $x_1 = 1$:

$$y_1 = 1^3 = 1 \text{ m}^3$$

y el volumen y_2 cuando la arista aumentó 50 cm = 0.5 m se obtiene evaluando $y = x^3$ en

$$x_2 = x_1 + 0.5 = 1.5, \qquad \text{es decir} \qquad y_2 = (1.5)^3 = 3.375 \text{ m}^3$$

El incremento del volumen es:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= 3.375 - 1 \\ &= 2.375. \end{aligned}$$

Y el de la arista es

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 1.5 - 1 \\ &= 0.5. \end{aligned}$$

Debemos encontrar el factor k que hace cierta la igualdad:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

es el cociente de esas dos cantidades, es decir,

$$k = \frac{\text{cambio en el volumen}}{\text{cambio en la longitud de la arista}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Dicho cociente es llamado razón de cambio promedio de y respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$.

En este caso:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{2.375}{0.5} \\ &= 4.75 \end{aligned}$$

es la razón de cambio promedio del volumen respecto a la longitud de la arista en el intervalo $[1, 1.5]$. Y nos dice que el volumen aumentó 4.75 veces lo que se incrementó la arista:

$$y_2 - y_1 = 4.75(x_2 - x_1).$$

O sea, el valor del cociente nos permite saber qué tanto cambió la variable dependiente (y) respecto al cambio de la variable independiente (x).

En general, si $y=f(x)$ y $[a,b]$ es un intervalo contendido en el dominio de la función f, entonces definimos la *razón de cambio promedio* de y respecto de x en $[a,b]$ como:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Este cociente también es llamado la razón de cambio de f en $[a,b]$. Si es positivo hubo un incremento, si es negativo, entonces f tuvo un decremento; en ambos casos el valor absoluto de esa razón nos dice qué tan grande fue el cambio.

Razón de cambio puntual

Con relación al ejemplo introductorio de la sección anterior, supongamos que solo incrementamos 0.25 m la arista del cubo de lado 1 m. ¿Será cierto que también en este caso el incremento del volumen es 4.75 veces el incremento de la longitud de la arista?; es decir, ¿es cierto que $(1.25)^3-1^3=4.75(1.25-1)$?

Solución:
Al realizar las operaciones, tenemos que

$$(1.25)^3-1^3=0.953125$$

y

$$4.75(1.25-1)=1.1875$$

Por lo que la respuesta a nuestra pregunta es *negativa.*

De hecho la razón de cambio en el intervalo $[1,1.25]$ es;

$$\frac{(1.25)^3-1^3}{1.25-1}=3.8125$$

En general, la razón de cambio promedio en el intervalo $[x_1,x_1+h]$ del volumen del cubo respecto a la longitud de la arista es:

$$\begin{aligned}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}&=\frac{(x_1+h)^3-x_1^3}{h}\\&=\frac{x_1^3+3x_1^2h+3x_1h^2+h^3-\mathbf{x}_1^3}{h}\\&=\frac{3x_1^2h+3x_1h^2+h^3}{h}\\&=3x_1^2+3x_1h+h^2.\end{aligned}$$

Observamos que a medida que h es cada vez más parecido a 0, la razón de cambio promedio se parece más a $3x_1^2$, pues $3x_1h$ y h^2 son casi 0.

Veremos que lo mismo sucede si analizamos la razón de cambio promedio cuando disminuimos la longitud de la arista; o sea, cuando consideramos intervalos del

tipo $[x_1 - h, x_1]$. En esta situación, y_2 es valor correspondiente a $x_2 = x_1 - h$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{(x_1 - h)^3 - x_1^3}{-h} \\ &= \frac{x_1^3 - 3x_1^2 h + 3x_1 h^2 - h^3 - x_1^3}{-h} \\ &= \frac{3x_1^2 h - 3x_1 h^2 + h^3}{h} \\ &= 3x_1^2 - 3x_1 h + h^2.\end{aligned}$$

Así que cuando h es cada vez más parecido a 0, la razón de cambio promedio se parece más a $3x_1^2$, pues $-3x_1 h$ y h^2 son casi 0 y de hecho,

$$\lim_{h \to 0} 3x_1^2 - 3x_1 h + h^2 = 3x_1^2$$

Podemos decir entonces, con cierto margen de error, que si tenemos un cubo de arista 1, el cambio del volumen al cambiar ligeramente la longitud de la arista es tres veces el cambio de la longitud de la arista ya que $3(1^2) = 3$. El error será cada vez menor a medida que consideremos valores de h más próximos a 0.

Esto nos lleva a la definición siguiente:

La *razón de cambio puntual* de una variable y que es función de una variable x, para el valor x_0, se define como la derivada de y respecto a x en x_0.

Ejemplo

1. Si en un cubo se va cambiando el tamaño de la arista, ¿cuál es la razón de cambio del volumen respecto a la longitud de la arista cuando la longitud de la arista es 2?

Solución:

Como antes, llamemos y al volumen del cubo; y es función de x y está dada por la fórmula:

$$y = x^3$$

Así que se nos pide calcular la derivada de y en el punto $x_0 = 2$.

La derivada de y es

$$y' = 3x^2$$

Cuando $x = 2$ tenemos:

$$y'(2) = 3(2^2) = 12$$

Lo que esto significa es que si un cubo tiene aristas de longitud 2 y éstas crecen o decrecen una cantidad pequeña, entonces el volumen crecerá o decrecerá aproximadamente 12 veces esa cantidad.

Ejemplo

Por ejemplo, si un cubo de 2 cm por lado se calienta y crece 0.1 cm por lado, entonces su volumen crecerá aproximadamente $12 \times 0.1 = 1.2$ cm^3. En efecto, el volumen de un cubo de 2 cm es $2^3 = 8$ cm^3 y un cubo de 2.1 cm tiene un volumen de $2.1^3 = 9.261$ cm^3 por lo que el incremento en el volumen es

$$9.261 - 8 = 1.261.$$

que es parecido al valor 1.2 que obtuvimos con el uso de la derivada.

Velocidad instantánea

Si $s = f(t)$ representa la posición al tiempo t de un vehículo que se mueve en línea recta y t_0 es un momento determinado, entonces el cociente:

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}.$$

es la *velocidad promedio* del vehículo en el intervalo de tiempo entre t y t_0, y la derivada de f:

$$s' = f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

es la *velocidad instantánea* del vehículo en el tiempo t_0.

La velocidad dice qué tan rápido cambia la posición del vehículo.

La velocidad promedio es un caso particular de la razón de cambio promedio, y la velocidad instantánea es un caso particular de la razón de cambio puntual.

La idea de medir cuánto cambia una variable respecto a otra de la manera vista anteriormente se puede aplicar en muchas otras situaciones, por ejemplo:

- Cuánto cambia la temperatura de una sartén respecto al tiempo, cuando se calienta en la estufa,
- cuánto cambia el radio de un globo respecto al volumen, cuando se infla,
- cuánto cambia el volumen de un poliedro regular respecto a la longitud de las aristas,
- cuánto cambia la altura del agua en un tinaco respecto al tiempo conforme se va vaciando,
- cuánto cambia el costo unitario de un producto con respecto a la cantidad de productos producidos,
- cuánto cambia el rendimiento de combustible de un automóvil respecto a la velocidad,
- cuánto cambia la población de una especie respecto al tiempo, cuando se enferma o es atacada por depredadores.

Normalmente reservamos la palabra velocidad para indicar cuánto cambia una variable respecto al tiempo. Cuando la variable de referencia no es el tiempo, se suele decir razón de cambio en lugar de velocidad, así:

En resumen:

Si $y = f(x)$ es una función derivable, x_0 es un número fijo y $y_0 = f(x_0)$, entonces el cociente:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\text{cambio en la variable } y}{\text{cambio en la variable } x}$$

es la razón de cambio promedio de la variable y respecto a la variable x, cerca de x_0, y la derivada de f:

$$y' = f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

es la razón de cambio puntual, o simplemente razón de cambio, en x_0 de la variable y respecto a la variable x.

TIP

Si la razón de cambio puntual de y respecto a x en a es $y'(a)$, entonces $y \approx y'(a) \cdot x$ para valores de x cercanos a a.

Ejemplo

1. Una llave de agua está llenando un tinaco cilíndrico que tiene 0.5 metros de radio (Figura 5.12). Si la llave vierte 20 litros por minuto y no está saliendo agua del tinaco, el nivel del agua sube conforme pasa el tiempo. ¿A qué velocidad sube el nivel, h?

Solución:

Conforme el agua entra al tinaco, se forma un cilindro de agua, con el mismo radio del tinaco, es decir, 0.5 m. El volumen de este cilindro aumenta 20 litros por minuto. Si V es el volumen de agua, la velocidad con la que cambia el volumen respecto al tiempo es la derivada de V respecto a t.

Así que,

$$V = 20t \text{ litros} \qquad \text{y} \qquad V'(t) = 20 \text{ litros/min}$$

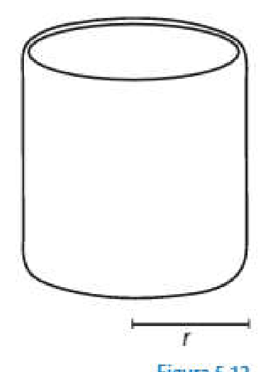


Figura 5.12

Necesitamos ahora alguna fórmula que relacione el volumen y la altura de un cilindro. Recordamos la fórmula del volumen de un cilindro:

$$V = \pi r^2 h$$

Si r y h están en metros, entonces V está dado en m^3, así que convertimos los litros en m^3 ($1 \text{ m}^3 = 1\,000$ litros)

$$20 \text{ litros} = 0.02 \text{ m}^3 \qquad \text{y entonces} \qquad V'(t) = 0.02 \text{ m}^3/\text{min}$$

Nuestro cilindro tiene un radio conocido, 0.5 m, así que:

$$\begin{aligned} V &= \pi(0.5)^2 h \\ &= 0.25\pi h \end{aligned}$$

De la fórmula anterior podemos despejar h:

$$h = \frac{V}{0.25\pi},$$

es decir, la altura h del nivel depende del volumen del cilindro de agua y dicho volumen V depende a su vez del tiempo, t, por lo que podemos determinar cuánto cambia la altura respecto al tiempo, es decir la velocidad con que sube, mediante la regla de la cadena.

La razón de cambio de la altura respecto al volumen será la derivada de h respecto a V, es decir

$$h'(V) = \frac{1}{0.25\pi}$$

Sabemos que la velocidad con que se incrementa el volumen es:

$$V'(t)=0.02\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$$

Entonces, por la regla de la cadena concluimos que:

$$\begin{aligned} h'(t)&=h'(V)V'(t)\\ &=\frac{1}{0.25\pi}(0.02)\\ &=\frac{0.08}{\pi}\\ &\approx 0.0255. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la velocidad con la que sube el nivel es 0.0255 m/min.

Ejemplo

TIP

Si las derivadas $g'(x)$ y $f'(y)$ son funciones constantes con valores a y b respectivamente, entonces $\frac{d}{dx}(g\circ f)=ab$.



1. Un globo esférico se está llenando a razón de 1 litro de aire por minuto. ¿Cuánto está creciendo el radio del globo cuando $t=5$ minutos?

Solución:

Como el globo se está llenando a razón de 1 litro de aire por minuto, su volumen aumenta $0.001\ \mathrm{m}^3$/min, entonces:

$$V(t)=(0.001)t \qquad \text{y} \qquad V'(t)=0.001,$$

donde t está medido en minutos y V en m^3.

Buscamos ahora una fórmula que relacione el radio del globo con su volumen. La fórmula del volumen de la esfera es

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

De aquí podemos despejar el radio

$$r=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$$

El radio depende del volumen, y éste del tiempo, para encontrar cuánto cambia el radio respecto al tiempo, aplicamos la regla de la cadena: Calculamos $r'(V)$, $V'(t)$ y multiplicamos

$$\begin{aligned} r'(V)&=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4\pi}\right)\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{-2/3} \qquad \text{y} \qquad V'(t)=0.001\\ &=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{-2/3} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} r'(t)&=r'(V)V'(t)\\ &=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{-2/3}(0.001) \end{aligned}$$

Sustituyendo V por su valor en términos del tiempo, tenemos que:

$$r'(t)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{3(0.001)t}{4\pi}\right)^{-2/3}(0.001)$$

Por último, para ver cuánto crece el radio cuando $t=5$ minutos, sustituimos $t=5$ en la ecuación anterior

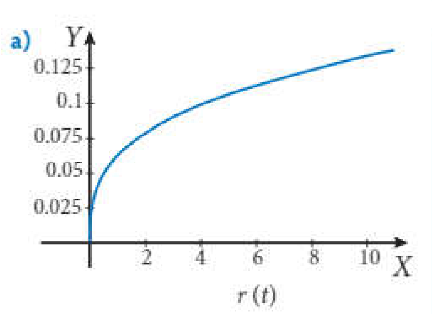
$$r'(5)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{3(0.005)}{4\pi}\right)^{-2/3}(0.001)\approx 0.007.$$

Observa que, aunque el volumen del globo crece a una razón constante respecto al tiempo, su radio crece cada vez más lento, por ejemplo, para 10 minutos, tenemos que:

$$r'(10)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{3(0.01)}{4\pi}\right)^{-2/3}0.001\approx 0.004.$$

De donde $r'(10)<r'(5)$.

A continuación se muestran las gráficas (ver Figura 5.13, inciso a) e inciso b)), de $r(t)$ y $r'(t)$ en las que se observa que r es creciente, pero crece cada vez más despacio y que $r'(t)$ es decreciente.



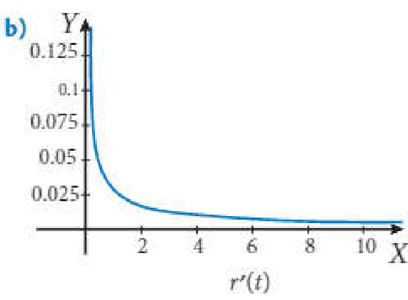


Figura 5.13



2. (Costo marginal) El costo de producción para producir x unidades de cierto producto está dado por

$$C(x)=10+5x+\frac{100}{x}$$

¿Cuál es la razón de cambio del costo de producción respecto al número de unidades producidas cuando $x=50$?

Solución:

Se debe calcular $C'(x)$ y evaluar esta derivada en $x=50$

$$C'(x)=5-\frac{100}{x^2}$$

$$C'(50)=5-\frac{100}{50^2}=4.96$$

La razón de cambio del costo de producción de un producto respecto a la cantidad de unidades producidas se llama *costo marginal*. En economía esto es importante, pues si el número de unidades producidas es grande, un incremento de una unidad es muy pequeño, el costo marginal será aproximadamente igual al costo de producir una unidad más del producto. El costo de producir la unidad número 51 es de \$4.96.

En el ejercicio, el costo de producir 50 unidades es:

$$C(50)=10+5(50)+\frac{100}{50}=262$$

y el costo de producir 51 unidades es:

$$C(51)=10+5(51)+\frac{100}{51}=266.96.$$

Así, el incremento del costo por producir una unidad más es:

$$C(51)-C(50)=266.96-262=4.96$$

que es el costo marginal que obtuvimos antes.

De manera similar, se definen la utilidad marginal e ingreso marginal como la razón de cambio de la función utilidad y la función ingreso, respecto al número de unidades producidas.

3. (Utilidad marginal) Un fabricante de lápices al vender x lápices obtiene el ingreso

$$I(x)=x(4-0.001x).$$

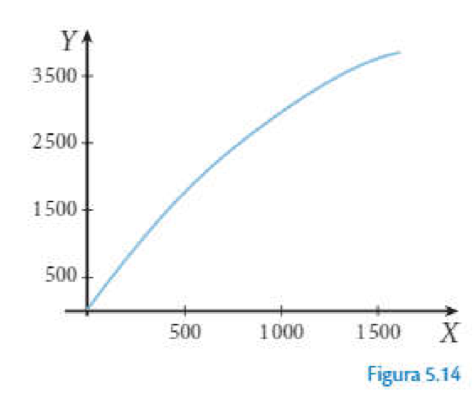


Figura 5.14

Por ejemplo, si vende 100 lápices, el ingreso es de (ver Figura 5.14):

$$I(100)=\$390,$$

esto quiere decir que el precio promedio de un lápiz es

$$\frac{I(100)}{100}=\frac{390}{100}=\$3.90,$$

mientras que si vende 1 500 lápices, el ingreso es de:

$$I(1\,500)=\$3\,750,$$

y el precio promedio de un lápiz es

$$\frac{I(1\,500)}{1\,500}=\$2.50.$$

Observa que cuando x crece, el precio unitario promedio baja, ya que se satura el mercado por exceso de oferta (ver Figura 5.15).

El costo por producir x lápices al día es:

$$C(x)=500+1.2x+10\sqrt{x}$$

La función costo de producción incluye: un costo fijo $(\$500)$, un término que es proporcional al número de lápices producidos $(1.2x)$ y un término $(10\sqrt{x})$ que a partir de 1 crece más despacio que x.

Así, el costo de producir 100 lápices es:

$$C(100)=\$720$$

y el costo promedio de producir uno de esos lápices es:

$$\frac{C(100)}{100}=\$7.20,$$

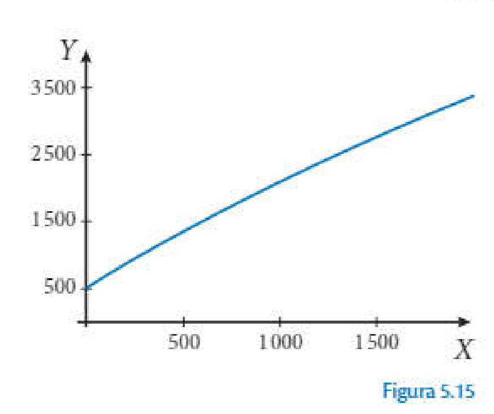


Figura 5.15

que es muy alto, ya que hay que repartir el costo fijo de \$500 entre únicamente 100 lápices.

En cambio, el costo de producir 1 000 lápices es:

$$C(1\,000)\approx\$2\,016.20$$

y el costo promedio de producir uno de esos lápices es:

$$\frac{C(1\,000)}{1\,000}\approx\$2.0162.$$

El costo promedio de producir un lápiz va disminuyendo conforme se producen más, pues el costo fijo de $\$500$ se reparte entre más lápices.

La utilidad obtenida por la producción y venta de x lápices estará dada por la diferencia entre el ingreso y el costo (Figura 5.16).

$$
\begin{aligned}
U(x) &= I(x) - C(x) \\
&= x(4 - 0.001x) - \left(500 + 1.2x + 10\sqrt{x}\right) \\
&= -0.001x^2 + 2.8x - 10\sqrt{x} - 500
\end{aligned}
$$

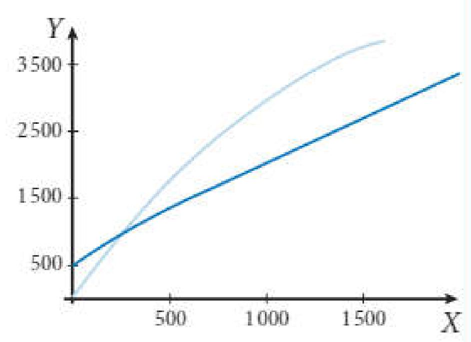


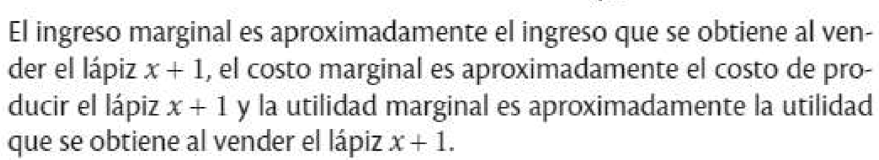
Figura 5.16

Así, por ejemplo:

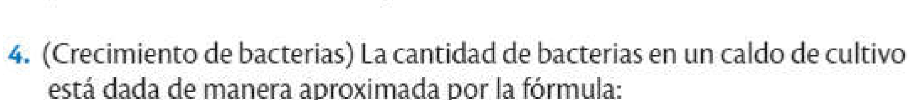
$$U(1000) \approx 983.77.$$

Las funciones ingreso marginal, costo marginal y utilidad marginal son las derivadas de las funciones correspondientes:

Ingreso marginal	$I'(x) = 4 - 0.002x$
Costo marginal	$C'(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}} + 1.2$
Utilidad marginal	$U'(x) = 2.8 - \dfrac{5}{\sqrt{x}} - 0.002x$



El ingreso marginal es aproximadamente el ingreso que se obtiene al vender el lápiz $x + 1$, el costo marginal es aproximadamente el costo de producir el lápiz $x + 1$ y la utilidad marginal es aproximadamente la utilidad que se obtiene al vender el lápiz $x + 1$.



4. (Crecimiento de bacterias) La cantidad de bacterias en un caldo de cultivo está dada de manera aproximada por la fórmula:

$$f(x) = x^5 + 10x^4 + 56x^3 + 240x^2 + 693x + 1\,000$$

en la que x representa el número de días que lleva el cultivo. ¿Cuál es la razón de cambio de la cantidad de bacterias respecto al tiempo cuando $x = 1$? ¿Cuándo $x = 2$?

Solución:

Debemos calcular la derivada de la función que representa el número de bacterias.

$$f'(x) = 5x^4 + 40x^3 + 168x^2 + 480x + 693$$

y evaluarla cuando $x = 1$:

$$f'(1) = 5 + 40 + 168 + 480 + 693 = 1\,386,$$

esto significa que la población de bacterias está creciendo a razón de 1 386 bacterias al día al final del primer día.

Cuando $x = 2$:

$$f'(2) = 5(2)^4 + 40(2)^3 + 168(2)^2 + 480(2) + 693 = 2\,725,$$

es decir, al final del segundo día, las bacterias están creciendo a razón de 2 725 bacterias por día.

Ejemplos

Ejercicios

1. Encuentra la razón de cambio del perímetro de un círculo con respecto a su radio cuando éste mide 8 cm.
2. Encuentra la razón de cambio del área de un cuadrado con respecto a su lado cuando éste mide 10 cm.
3. Encuentra la razón de cambio del volumen de un cono con respecto al radio cuando su altura es de 10 centímetros. La fórmula para el volumen de un cono de radio r y altura h es $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
4. Encuentra la razón de cambio del área de un círculo con respecto a su radio cuando el radio mide 3 cm.
5. Dos lados de un triángulo miden 8 y 15 centímetros respectivamente. ¿A qué razón crece el tercer lado si el ángulo entre los lados conocidos es $\frac{\pi}{4}$ radianes (45°) y crece a razón de $\frac{\pi}{180}$ radianes $(=1^\circ)$ por segundo? **Sugerencia:** Para escribir la longitud del lado desconocido, en términos de los lados que se conocen, usa la ley de los cosenos: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
6. El área de la superficie de una esfera cambia a medida que cambia el radio. Encuentra la razón de cambio del área de la superficie con respecto al radio cuando el radio mide 4 cm. La fórmula del área de la superficie de la esfera de radio r es $A(r)=4\pi r^2$.
7. La ley de los gases establece que a temperatura constante, el volumen V de un gas es inversamente proporcional a la presión P a la que está sometido, lo cual se escribe como $V=\frac{k}{p}$ donde k es una constante. En un recipiente en el que la temperatura permanece constante, en cierto instante t_0 la presión es de 120 kg/cm^2 y el volumen es igual a 300 cm^3. Si el volumen aumenta a razón de 1 cm^2/min, ¿cuál es la razón de cambio de la presión con respecto al tiempo en el instante t_0?
8. Una cubeta se encuentra en uno de los peldaños de una escalera de 6 metros de largo, a $\frac{1}{3}$ del extremo superior. La escalera está apoyada sobre una barda y resbala hasta caer, pero la cubeta permanece sobre la escalera hasta que ésta llega al suelo. Si el extremo inferior de la escalera se desplaza horizontalmente a 50 centímetros por segundo, ¿a qué velocidad vertical está cayendo la cubeta cuando está a 2 metros de altura?

Mundo virtual

En esta sección te invitamos a visitar varios sitios que contienen material relacionado con el concepto de derivada. Algo de ese material está desarrollado por los autores de este libro, pero mucho más ha sido desarrollado por personas de todo el mundo que tienen interés en las matemáticas.

- http://atenea.matem.unam.mx Éste es un sitio del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en el cual los investigadores del Instituto están

creando material para cursos en línea. Puedes entrar como invitado sin necesidad de registrarte. Una vez dentro del sitio, elige la categoría "Cálculo diferencial e integral", dentro de ella, el curso "Cálculo I" y entra a las lecciones de la sección "Derivadas de funciones reales."

- http://newton.matem.unam.mx/arquimedes En este sitio hay muchos interactivos de matemáticas para bachillerato, que explican cómo resolver problemas muy puntuales. Revisa los que corresponden a cálculo diferencial e Integral, en particular, los que corresponden a derivadas.
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web Sitio del Ministerio de Educación, Salud y Deporte del Gobierno español que contiene unidades didácticas y recursos interactivos desarrollados con la herramienta Descartes. Estos materiales fueron elaborados por profesores de enseñanza media. Selecciona "Aplicaciones", y luego "Análisis" encontrarás varias lecciones relativas al tema de derivación que estudiaste en esta unidad.
- http://es.wikipedia.org La enciclopedia en línea Wikipedia es uno de los sitios de referencia para encontrar información relacionada con la ciencia y la cultura. En el buscador escribe: Derivada. Hojea el documento para ampliar los temas vistos en esta unidad, en particular, la historia de la derivada.
- http://newton.matem.unam.mx/geolab En este sitio puedes descargar el programa Geolab y el curso para aprender a utilizarlo. En las secciones de Mundo virtual te guiaremos para realizar algunas construcciones relacionadas con los temas de este libro.

Construcciones con Geolab

Geolab no es un programa de cálculo simbólico, por lo que no sabe calcular la derivada de una función, pero sí te puede ayudar a comprender lo que significa la derivada y la recta tangente como puede verse en el siguiente ejemplo.

Considera una función derivable, por ejemplo

$$f(x)=x-\operatorname{sen}(x)$$

queremos dibujar la recta tangente a la gráfica de f en el punto:

$$\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

1. Construye la función como se mostró en las unidades anteriores, solo recuerda que la variable independiente en Geolab se llama $t_$ por lo que debes introducir la fórmula

   $$t_+\operatorname{sen}(t_)$$

   en el campo de "y=" de la ventana de construcción.
2. La derivada de f es

   $$f'(x)=1-\cos(x)$$

   Recuerda que la derivada de una función evaluada en un punto x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$.
3. Construye un "escalar calculado" a que valga $\frac{\pi}{4}$. En Geolab, π se escribe $pi_$ así que tienes que introducir $pi_/4$ en la fórmula.

4. Construye el "punto calculado" P cuyas coordenadas sean $x = a$, $y = a - \text{sen}(a)$. Si no te has equivocado, el punto P debe estar sobre la gráfica de f.
5. Construye el "número calculado" m cuyo valor sea la derivada de f en $\frac{\pi}{4}$, es decir, $m = 1 - \cos(a)$.
6. Finalmente, utiliza el constructor de rectas "punto pendiente" para construir la recta que pasa por P y tiene pendiente m. Esta recta debe ser tangente a la curva en el punto P.
Utiliza esta construcción para dibujar la recta tangente en un punto usando otras funciones.

Resumen de la unidad

- Si una función f es derivable en un punto a, entonces es continua en a.
- La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función derivable $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.
- $(x^n)' = nx^{n-1}$.
- $(x^{1/n})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.
- $(\text{sen}\, x)' = \cos x$.
- $(\cos x)' = -\text{sen}\, x$.
- $(\tan x)' = \sec^2 x$.
- $(\cot x)' = -\csc^2 x$.
- $(\sec x)' = \sec x \tan x$.
- $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

Si f y g son funciones derivables y c es una constante, entonces

- $(cf)'(x) = cf'(x)$.
- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ si $g(x) \neq 0$.
- Si $h(x) = g(f(x))$ entonces $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Ejercicios de repaso

Calcula en cada caso la derivada de la función.

1. $f(x)=\frac{6}{5}x^{-\frac{1}{9}}$
2. $f(x)=\frac{1}{x^2}+x^{-6}+\frac{x+1}{x^3}$
3. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2-8}-\frac{\operatorname{sen}x}{x+2}$
4. $f(x)=\frac{x^4-3x}{2x^3-6}\csc x$
5. $f(x)=\sqrt{x}\sec x-\left(1-\sqrt{x}\right)x^5$
6. $f(x)=x^{\frac{1}{5}}\cot x-x\cos x$
7. $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x\operatorname{sen}x}$
8. $f(x)=\frac{x\tan x}{8x^7+34}$
9. $f(x)=\left(3x^3-12\right)\tan x$
10. $f(x)=\cos\left(x^2+\sqrt{2x-3}\right)$
11. $f(x)=\sqrt{x^3+\sqrt{8x-5}}$
12. $f(x)=\left(-9x^3+6\right)\sqrt{\csc(x+1)}$
13. $f(x)=\frac{-3}{(7x-4)^4}$
14. $f(x)=\frac{x^2-9}{x^3-2x^2+3}$
15. $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-5x}{x^2}}$
16. $f(x)=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}2x}{x^4}}$

En cada caso, encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $P(a,f(a))$.

17. $f(x)=\frac{1}{3}x^2+x+1$; $P(-4,f(-4))$.
18. $f(x)=\operatorname{sen}2x$; $P\left(\frac{3\pi}{4},f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.
19. $f(x)=\sqrt{x^2+8}$; $P(1,f(1))$.
20. $f(x)=\sqrt{x^3-2x^2+6}$; $P(-1,f(-1))$.
21. $f(x)=3x^3-32x^2+112x-127$; $P(3,f(3))$.
22. $f(x)=x\cos x$; $P(2\pi,f(2\pi))$.

23. Muestra que la gráfica de la función $f(x)=5x^5+2x-5$ no tiene rectas tangentes que sean horizontales.
24. Prueba que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2$ en el punto $(3,9)$ es perpendicular a la recta $x+6y-30=0$.
25. Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ en el punto $(5,2)$ y que pasa por este punto.
26. Encuentra la razón de cambio del volumen de un cono de radio 8 centímetros.
27. La ley de Ohm, que relaciona la intensidad de la corriente con el voltaje en un circuito eléctrico, se escribe como $I=\frac{V}{R}$ donde R es la resistencia eléctrica. Si en un circuito eléctrico el voltaje es de 175 volts, ¿cuál es la razón de cambio de la intensidad de la corriente con respecto a la resistencia eléctrica?

Autoevaluación

1. Si $f(x)=\sqrt{5x+6}$, entonces $f'(2)$ es:
   a. $\frac{5}{4}$
   b. $\frac{5}{8}$
   c. 4
   d. $\frac{1}{8}$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 166 y 173.

2. La derivada de $f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$ es:
   a. $\frac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2}$
   b. $\frac{x^2+2x-1}{x+1}$
   c. $\frac{-x^2+3x-1}{(x+1)^2}$
   d. $\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 166.

3. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^3-4x^2$ en el punto $(3,f(3))$ está dada por:
   a. No existe
   b. $y=3x-18$
   c. $y=36-9x$
   d. $y=3x$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 169.

4. La derivada de $g(x)=\tan(\cos x)$ es:
   a. $g'(x)=-\sec^2(\cos x)\operatorname{sen}x$
   b. $g'(x)=-\csc^2(\cos x)\operatorname{sen}x$
   c. $g'(x)=\sec^2(\cos x)\operatorname{sen}x$
   d. $g'(x)=\sec^2(\cos x)$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 170 y 173.

5. La recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x$ es horizontal en:
   a. $(0,0)$
   b. $\left(-4,\frac{56}{3}\right)$ y $\left(1,-\frac{13}{6}\right)$
   c. No existe ningún punto donde la tangente sea horizontal
   d. $\left(-1,\frac{31}{6}\right)$ y $\left(4,\frac{88}{3}\right)$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 169.

6. La derivada de $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2+4}{x^2-4}}$ es:
   a. $f'(x)=0$
   b. $f'(x)=\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{16x}{3(x^2-4)^2}\right)$
   c. $f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{-\frac{2}{3}}$
   d. $f'(x)=\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{-16x}{3(x^2-4)^2}\right)$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 166 y 173.

7. La razón de cambio del volumen de una esfera con respecto a su radio, cuando el radio mide 4 cm es:
   a. $\frac{4}{3}\pi(4^3)$
   b. 64π
   c. 64
   d. $\frac{4}{3}(4^3)$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 177.

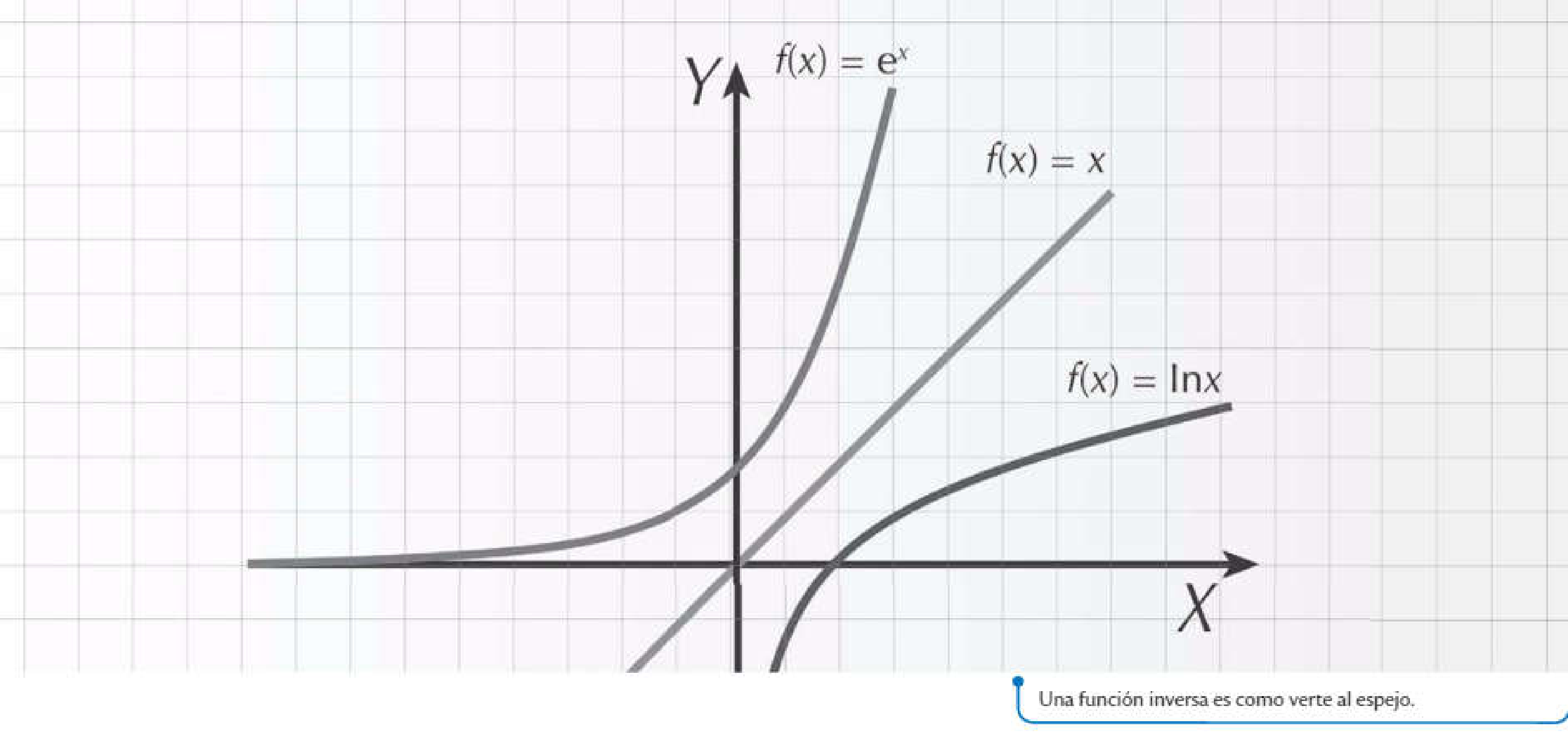
Heteroevaluación

1. Calcula la derivada de la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+3}}$.

2. ¿Es la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-4x & \text{si } -10<x\leq 20 \\ -x+40 & \text{si } 20<x<50 \end{cases}$ derivable en $x=20$?

3. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\sqrt[3]{5x-x^2}$ en el punto $(4,f(4))$.

4. Calcula la derivada de la función $f(x)=\sec^3\left(\cos x^4\right)$.



Una función inversa es como verte al espejo.



Unidad 6 Funciones inversas y sus derivadas

Cuando trabajamos con funciones, usualmente se presentan dos tipos de problemas.

Problemas directos. ¿Cuál es el valor de la función en determinado punto? Para resolver este problema simplemente evaluamos la función en el punto dado y nos fijamos en el resultado.

Problemas inversos. Dado un valor, encontrar los puntos para los cuales la función evaluada en esos puntos es igual al valor dado.

Este tipo de problemas son más difíciles. Desde la secundaria hemos estado aprendiendo a resolver algunos problemas de este estilo. Por ejemplo, dado un polinomio de segundo grado, encontrar sus raíces, es decir, las x para las cuales el polinomio vale cero.

Algunas funciones f, tienen inversa g, en cuyo caso, el problema de encontrar los puntos para los cuales f toma cierto valor se resuelve evaluando g en dicho valor.

Como es de esperarse, muchas propiedades de la función inversa están relacionadas con las propiedades de la función original. En esta unidad estudiaremos algunas de estas propiedades, en particular las que tienen que ver con la derivada.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.

Funciones inversas y sus derivadas

- **Funciones inversas**
  - Gráficas de f y f^{-1}
  - Funciones trigonométricas inversas
  - Derivada de las funciones inversas trigonométricas

$f(x) = x$

X

Funciones inversas

TIP
Anders Celsius definió su escala para medir la temperatura considerando las temperaturas de congelación $(0\,^{\circ}\mathrm{C})$ y de ebullición $(100\,^{\circ}\mathrm{C})$ del agua.

La temperatura se mide usualmente en grados Celsius, también llamados centígrados $(^{\circ}\mathrm{C})$, o en grados Fahrenheit $(^{\circ}\mathrm{F})$. La relación entre estas dos escalas está dada por la fórmula

$$y=f(x)=\frac{9}{5}x+32 \tag{6.1}$$

donde x es la temperatura en grados centígrados y y, en grados Fahrenheit. Por ejemplo, la temperatura normal del cuerpo humano es de $36.5\,^{\circ}\mathrm{C}$, para convertir esta temperatura a grados Fahrenheit, evaluamos

$$y=f(36.5)=\frac{9}{5}(36.5)+32=97.7$$

así que $36.5\,^{\circ}\mathrm{C}$ corresponden a $97.7\,^{\circ}\mathrm{F}$.

Si queremos convertir grados Fahrenheit a grados centígrados, debemos "despejar" x en la ecuación (6.1):

$$x=\frac{5}{9}(y-32)$$

Llamemos g a la función que determina esta fórmula

$$g(y)=\frac{5}{9}(y-32)$$

la cual permite conocer la temperatura en grados centígrados $g(y)$ a partir de la medida y en grados Fahrenheit.

En un día soleado, de clima agradable, el termómetro señala $71\,^{\circ}\mathrm{F}$, ¿a cuántos grados centígrados corresponde esta temperatura?

Evaluamos;

$$g(71)=\frac{5}{9}(71-32)=21.67$$

Por lo tanto, $71\,^{\circ}\mathrm{F}$ corresponden a $21.67\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Las funciones f y g son *inversas* una de la otra, pues si convertimos una temperatura dada en grados centígrados a grados Fahrenheit, y luego convertimos el resultado a grados centígrados llegamos al valor inicial. Por ejemplo, acabamos de ver que si la temperatura normal del cuerpo humano en grados centígrados es $36.5^{\circ}\,\mathrm{C}$, al convertirla a grados Fahrenheit obtenemos $97.7\,^{\circ}\mathrm{F}$. Si evaluamos g en 97.7 obtenemos

$$g(97.7)=\frac{5}{9}(97.7-32)=36.5$$

que es el número del cual partimos.

Para cualesquiera x y y se tiene que

$$f(g(y))=y \quad \text{y} \quad g(f(x))=x$$

Como podemos comprobar directamente:

TIP
Daniel Gabriel Farenheith definió su escala para medir la temperatura determinando tres puntos. El punto cero se determina al poner el termómetro en una mezcla de hielo, agua y cloruro de amonio. El segundo punto $(32\,^{\circ}\mathrm{F})$ se alcanza considerando una mezcla de agua y hielo. El tercer punto $(96\,^{\circ}\mathrm{F})$ se obtiene al colocar el termómetro en la boca o bajo el brazo.

$$f(g(y)) = f\left(\frac{5}{9}(y-32)\right) \qquad\qquad g(f(x)) = g\left(\frac{9}{5}x+32\right)$$
$$= \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(y-32)\right)+32 \qquad \text{y} \qquad = \frac{5}{9}\left(\left(\frac{9}{5}x+32\right)-32\right)$$
$$= y \qquad\qquad = x$$

Supongamos que f es una función definida en D que es *inyectiva* o *uno a uno*; es decir, cualquier par de puntos de D, distintos entre sí, tienen imágenes distintas (ver Figura 6.1), es decir:

$$x_1 \neq x_2, \text{ con } x_1, x_2 \in D \text{ implica } f(x_1) \neq f(x_2) \tag{6.2}$$

Entonces podemos definir una función $g: f(D) \to D$ mediante la regla:

$$g(y) = x \quad \text{si} \quad f(x) = y$$

es decir, $g(y)$ es el único número x en D tal que $f(x) = y$; o dicho en otras palabras, y "provino de x" al aplicar la función f.

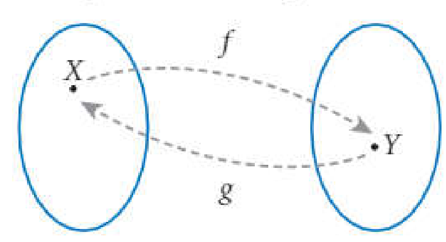


Figura 6.1

La función g es la *función inversa* de f. El dominio de g es el rango $f(D)$ de f. A la función inversa de f a veces se le denota mediante f^{-1}, pero hay que tener cuidado en no pensar que f^{-1} es $\frac{1}{f}$, el inverso multiplicativo de f, sino que es el inverso bajo la composición:

Para todo x en el dominio de f se cumple que

$$g(f(x)) = x$$

y para todo y en el dominio de g (el rango de f) se satisface que

$$f(g(y)) = y$$

Observaciones:

Si una función $f(x)$ es uno a uno, entonces cualquier recta horizontal corta a la gráfica de f en, a lo más, un punto. (Figura 6.2).

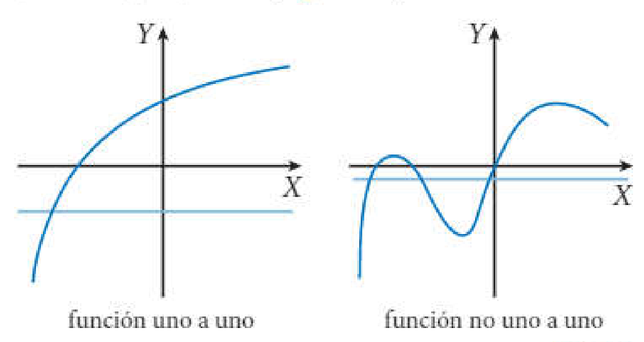


Figura 6.2

TIP

El dominio de f^{-1} es el rango de f. El rango de f^{-1} es el dominio de f.
Si f y f^{-1} son funciones inversas, entonces
$f^{-1}(f(x)) = x$ para $x \in Dom\, f$
$f(f^{-1}(x)) = x$ para $x \in Dom\, f^{-1}$



Si f es una función uno a uno cuyo dominio es el intervalo $[0,1]$ y f^{-1} es su inversa, entonces ¿la función $f^{-1} \circ f$ es igual a la función identidad definida en $\mathbb{R}$?



¿Puede tener inversa una función que no sea uno a uno?

Observación. Cuando no tenemos la gráfica sino la regla de correspondencia de una función, entonces conviene recordar la siguiente reformulación de (6.2):

Una función es uno a uno si cada vez que $f(x_1)=f(x_2)$ se tiene que $x_1=x_2$ o lo que es lo mismo, si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Ejemplos

Encontrar en cada caso la inversa de la función y verificar que $f^{-1}(f(x))=x$ para $x \in Dom\, f$ y $f(f^{-1}(x))=x$ para $x \in Dom\, f^{-1}$.

1. $f(x)=5x-8$.

Solución:

Escribimos $y=5x-8$ y despejamos x:

$$5x=y+8$$

$$x=\frac{1}{5}(y+8)$$

Así,

$$f^{-1}(y)=\frac{1}{5}(y+8)$$

Si queremos seguir llamando x a la variable que usamos para evaluar a una función, entonces cambiamos y por x en la fórmula anterior y obtenemos la expresión

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{5}(x+8)$$

Comprobamos

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(5x-8) \\ &= \frac{1}{5}((5x-8)+8) \\ &= x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{1}{5}(x+8)\right) \\ &= 5\left(\frac{1}{5}(x+8)\right)-8 \\ &= x \end{aligned}$$

Si seguimos en orden lo que le hace f a la variable x, vemos que primero la multiplica por 5 y luego le resta 8 a ese producto, y en cambio, la función f^{-1} primero le suma 8 a la variable x y luego divide el resultado entre 5. Es decir, f^{-1} hace las *operaciones inversas* de f pero en el *orden inverso*.

2. $f(x)=\dfrac{2x-1}{3x+7}$.

Solución:

Observamos primero que f no está definida para $x=-\frac{7}{3}$, ya que en ese punto el denominador se anula. Escribimos

$$y=\frac{2x-1}{3x+7}$$

y despejamos x

$$y(3x+7)=2x-1$$
$$3xy+7y-2x+1=0$$
$$x(3y-2)=-7y-1$$
$$x=\frac{-7y-1}{3y-2}$$

Podemos renombrar la variable si queremos seguir llamando x a las variables que están en el dominio de las funciones. Así que, la inversa de f es

$$f^{-1}(x)=\frac{-7x-1}{3x-2}$$

Esta función no está definida en $x=\frac{2}{3}$. El número $\frac{2}{3}$ no está en el rango de la función f ya que la ecuación

$$\frac{2x-1}{3x+7}=\frac{2}{3}$$

no tiene solución, pues al intentar resolverla, obtenemos;

$$3(2x-1)=2(3x+7)$$
$$6x-3=6x+14$$
$$-3=14$$

lo cual es un absurdo.

De la misma manera, se puede ver que $x=-\frac{7}{3}$ (el punto que no está en el dominio de f) no está en el rango de f^{-1}.

Así $Dom\ f^{-1}\circ f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{7}{3}\right\}$ y $Dom\ f\circ f^{-1}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

3. La función $f(x)=x^2$ no tiene inversa.

Solución:

$f(x)=x^2$ no es uno a uno ya que, por ejemplo,

$$f(2)=f(-2)=4$$

y $-2\neq 2$.

Esto se traduce en términos geométricos en que hay una recta horizontal $(y=4)$ que corta a la gráfica de x^2 en más de un punto $((-2,4)$ y $(2,4))$.

En otras palabras, cualquier número no negativo tiene dos raíces posibles. Sin embargo, con frecuencia se elige la no negativa.

Así, restringimos el dominio de x^2 al conjunto formado por los números $x\geq 0$. (Ver Figura 6.3).

En este dominio, $f(x)=x^2$ es uno a uno y podemos definir su inversa:

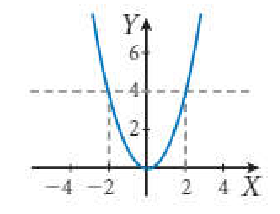
$$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

donde $\sqrt{x}$ es la raíz cuadrada no negativa de x, es decir, el número no negativo cuyo cuadrado es x.

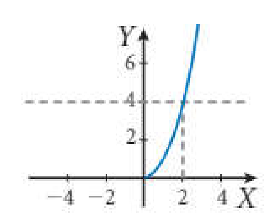
Ejemplos

Pensamiento crítico

¿Cuánto debe valer b para que la inversa de la función $f(x)=\frac{1}{x+b}$ evaluada en 1 valga -2?



x^2 definida en todo $\mathbb{R}$



x^2 definida para $x\geq 0$

Figura 6.3

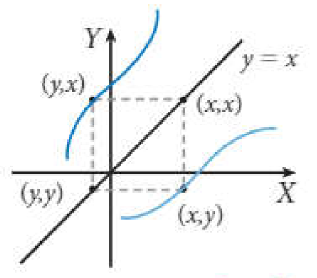


Figura 6.4

Gráficas de f y f^{-1}

En la Figura 6.4 observamos que los puntos (x, y) y (y, x) son vértices opuestos en un cuadrado. Como las diagonales de un cuadrado se cortan perpendicularmente en su punto medio, entonces (x, y) y (y, x) son simétricos respecto a la recta $y = x$.

Supongamos que f es una función uno a uno. Entonces la gráfica de f^{-1} puede obtenerse reflejando la de f con respecto a la recta $y = x$, ya que si un punto (x, y) está en la gráfica de f, entonces $(x, y) = (x, f(x))$ y por lo tanto su simétrico, respecto a la recta $y = x$ es el punto $(f(x), x) = (y, f^{-1}(y))$ que está en la gráfica de f^{-1}.

Ejemplos

Dibujar las gráficas de f y f^{-1} para las funciones de los ejemplos anteriores

1. $f(x) = 5x - 8$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x + 8)$. Ver Figura 6.5.

Solución:

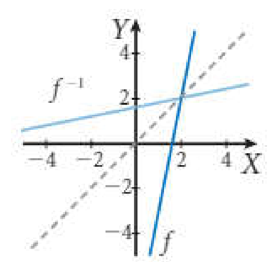


Figura 6.5

2. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 7}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{-7x - 1}{3x - 2}$.

Solución:

La gráfica de f se muestra en la Figura 6.6.

Obtenemos la de su inversa reflejando la anterior respecto a la recta $y = x$, ver Figura 6.7.



¿Cuál es la inversa de la función $f(x) = |x|$?

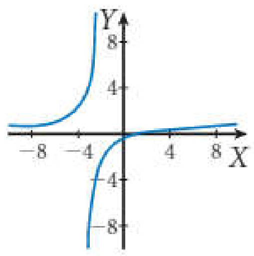


Figura 6.6

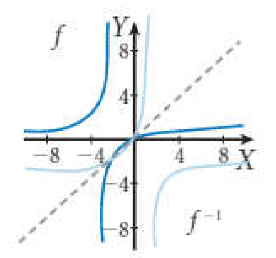
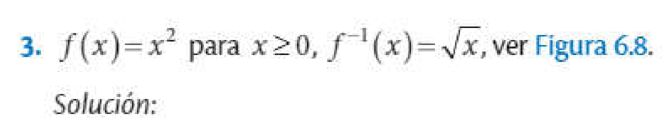


Figura 6.7



3. $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, ver Figura 6.8.

Solución:

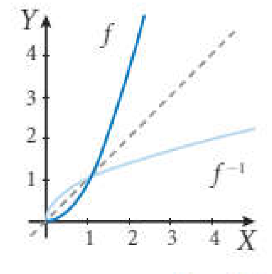


Figura 6.8

TIP

Al restringir el dominio de una función puede suceder que se obtenga una función uno a uno.

Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas no son uno a uno, por lo que no tienen inversa, sin embargo, se puede hacer algo similar a lo que se hizo en el ejemplo 3 de la sección anterior con la función x^2, es decir, restringir su dominio de manera que en ese nuevo dominio sí sean uno a uno. Además, se hará de manera que el rango de la nueva función coincida con el rango de la original.

Función arco seno:

Se restringe el dominio de la función seno considerando únicamente los números en $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ para obtener una función uno a uno, (Figura 6.9):

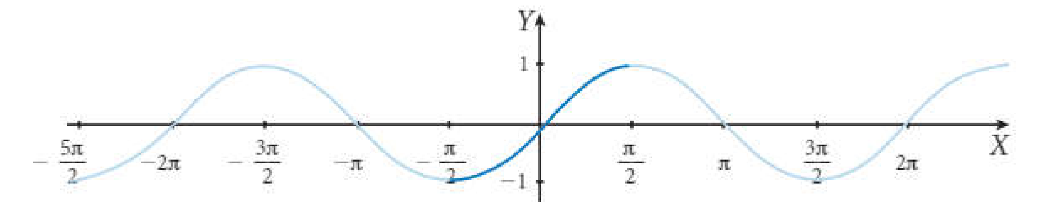


Figura 6.9

La inversa de la función seno, llamada *arco seno*, se denota como arcsen y se define como (Figura 6.10):

$$\text{arcsen}: \; [-1,1] \;\to\; \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \;\to\; y$$

Donde

$$y = \text{arcsen}\, x \quad \text{si} \quad x = \text{sen}\, y$$

Por ejemplo,

$$\text{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ya que} \quad \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$
$$\text{arcsen}(0) = 0 \quad \text{ya que} \quad \text{sen}(0) = 0$$

Figura 6.10

Al reflejar la gráfica de seno respecto a la recta $y = x$ obtenemos la gráfica de arco seno:

Así, en la Figura 6.11 se muestra la gráfica de arcsen.

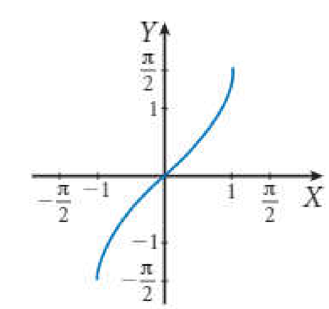


Figura 6.11

Función arco coseno:

Se restringe el dominio de la función coseno considerando únicamente los números en $[0,\pi]$ para obtener una función uno a uno, (Figura 6.12):

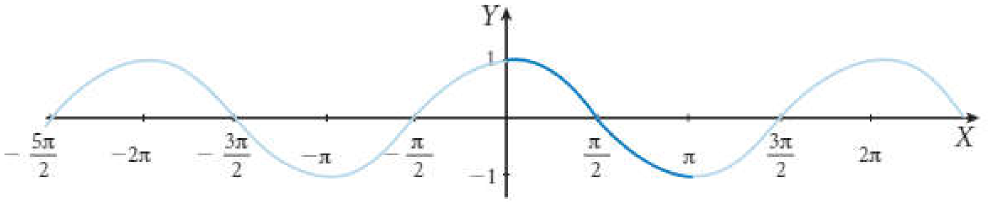


Figura 6.12

TIP

El número $y = \text{arcsen}\, x$ es aquel que está en $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ y cuyo seno vale x; o sea: $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ y $\text{sen}\, y = x$.

La inversa de la función coseno, llamada *arco coseno*, se denota como arccos y se define como:

$$\begin{aligned} \arccos: \ [-1,1] &\rightarrow [0,\pi] \\ x &\rightarrow y \end{aligned}$$

donde

$$y = \arccos x \quad \text{si} \quad x = \cos y$$

Por ejemplo,

$$\arccos 1 = 0 \quad \text{ya que} \quad \cos 0 = 1$$
$$\arccos(-1) = \pi \quad \text{ya que} \quad \cos \pi = -1$$

Las gráficas de las funciones coseno y arco coseno se muestran en la Figura 6.13. Así, en la Figura 6.14 podemos observar la gráfica de arccos.

TIP

El número $y = \arccos x$ es aquel que está en $[0,\pi]$ y cuyo coseno vale x; o sea: $x \in [0,\pi]$ y $\cos y = x$.

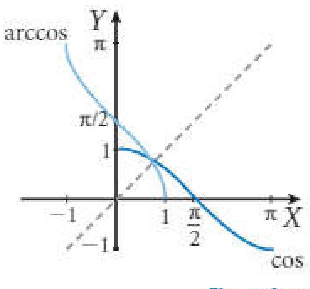


Figura 6.13

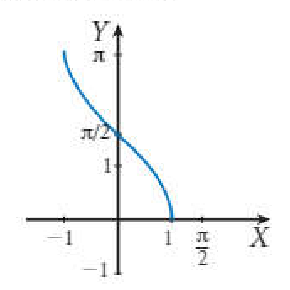


Figura 6.14

Función arco tangente:

Se restringe el dominio de la función tangente (Figura 6.15) considerando únicamente los números en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ para que sea uno a uno.

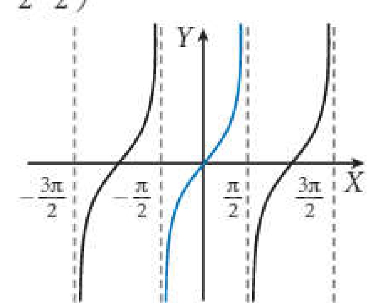


Figura 6.15

La inversa de la función tangente, llamada *arco tangente*, se denota como arctan y se define como:

$$\begin{aligned} \arctan: \ (-\infty,\infty) &\rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ x &\rightarrow y \end{aligned}$$

donde

$$y = \arctan x \quad \text{si} \quad x = \tan y$$

Por ejemplo,

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{ya que} \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1$$
$$\arctan 0 = 0 \quad \text{ya que} \quad \tan 0 = 0$$

Las gráficas de las funciones tangente y arco tangente se muestran en la Figura 6.16. Así, en la Figura 6.17 podemos observar la gráfica de arctan.

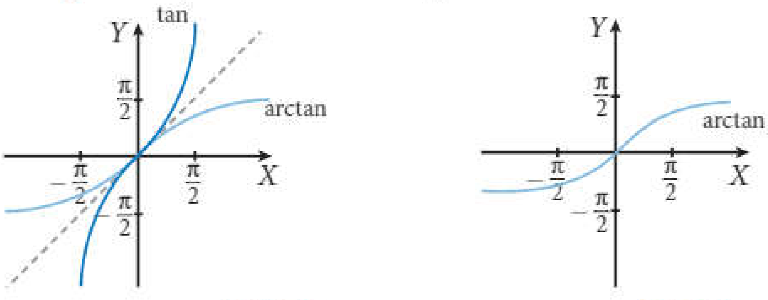


Figura 6.16

Figura 6.17

Función arco cotangente:

Se restringe el dominio de la función cotangente considerando únicamente los números en $(0,\pi)$. (Figura 6.18).

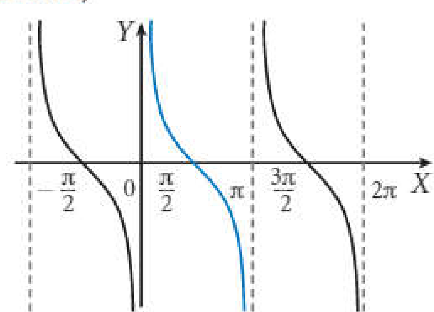


Figura 6.18

La inversa de la función cotangente, llamada *arco cotangente*, se denota como arccot y se define como:

$$\begin{aligned} \text{arccot:}\ (-\infty,\infty) &\rightarrow (0,\pi) \\ x &\rightarrow y \end{aligned}$$

donde

$$y = \operatorname{arccot} x \quad \text{si} \quad x = \cot y$$

Por ejemplo,

$$\operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{ya que} \quad \cot\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{ya que} \quad \cot\frac{\pi}{2} = 0$$

Las gráficas de las funciones cotangente y arco cotangente se muestran en la Figura 6.19.

Así, en la Figura 6.20 podemos observar la gráfica de arccot.

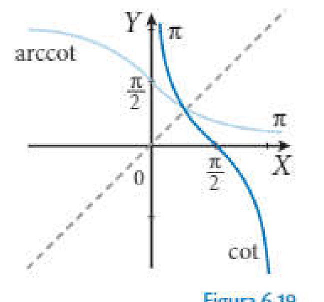


Figura 6.19

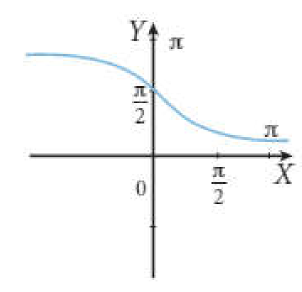


Figura 6.20

TIP

$\arctan: (-\infty,\infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\text{arccot:}\ (-\infty,\infty) \rightarrow (0,\pi)$

TIP

Para definir las funciones inversas trigonométricas, primero debemos restringir el dominio de las funciones trigonométricas para obtener funciones uno a uno.

Función arco secante:

Se restringe el dominio de la función secante considerando únicamente los números en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ para que sea uno a uno. (Figura 6.21).

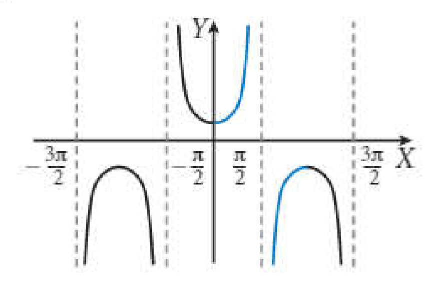


Figura 6.21

La inversa de la función secante, llamada *arco secante*, se denota como arcsec y se define como:

$$\text{arcsec}:\ (-\infty,-1]\cup[1,\infty)\ \rightarrow\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$$
$$x\ \rightarrow\ y$$

donde

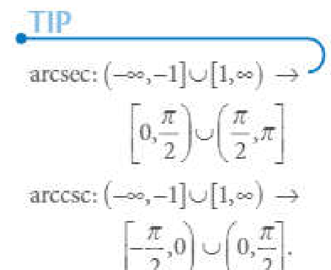
$$y=\text{arcsec}\,x \quad \text{si} \quad x=\sec y$$

Por ejemplo,

$$\text{arcsec}(-1)=\pi \quad \text{ya que} \quad \sec\pi=-1$$
$$\text{arcsec}\,1=0 \quad \text{ya que} \quad \sec 0=1$$

Las gráficas de las funciones secante y arco secante se muestran en la Figura 6.22. Así, en la Figura 6.23 podemos observar la gráfica de arcsec.

TIP



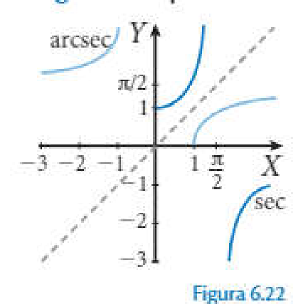


Figura 6.22

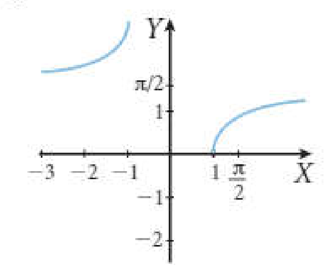


Figura 6.23

Función arco cosecante:

Se restringe el dominio de la función cosecante considerando únicamente los números en $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ para que sea uno a uno (Figura 6.24).

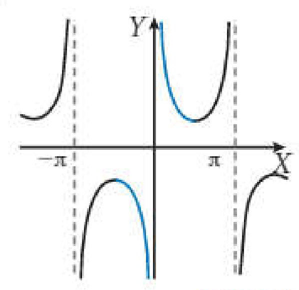


Figura 6.24

La inversa de la función cosecante, llamada *arco cosecante*, se denota como arccsc y se define como:

$$\text{arccsc}: \quad (-\infty,-1]\cup[1,\infty) \;\to\; \left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \;\to\; y$$

donde

$$y=\text{arccsc}\,x \quad \text{si} \quad x=\csc y$$

Por ejemplo,

$$\text{arccsc}(-1)=-\frac{\pi}{2} \quad \text{ya que} \quad \csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$
$$\text{arccsc}\,1=\frac{\pi}{2} \quad \text{ya que} \quad \csc\frac{\pi}{2}=1$$

Las gráficas de las funciones cosecante y arco cosecante se muestran en la Figura 6.25.

Así, en la Figura 6.26 podemos observar la gráfica de arccsc.

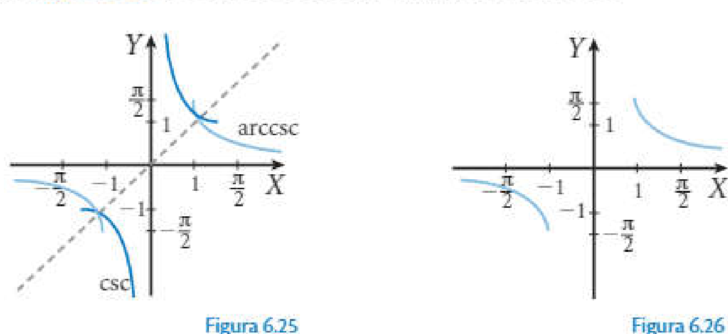


Figura 6.25

Figura 6.26

TIP

Si el nombre de la función trigonométrica inversa comienza con *arcc*, entonces en la fórmula de su derivada aparece el signo –.

Pensamiento crítico

Si $f(x)=\frac{x}{x+1}$ y se sabe que $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)=4$.

¿Se puede decir, sin calcular la derivada de f, cuánto vale $f'(1)$?

Derivada de las funciones inversas trigonométricas

En el Apéndice D se prueba que si f y g son inversas una de la otra y ambas son derivables, entonces

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$$

para todo x en el dominio de f para la cual $g'(f(x))\neq 0$.

Usando este resultado, pueden calcularse las derivadas de las funciones trigonométricas inversas. La demostración se da en el Apéndice D.

$$(\text{arcsen}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para } |x|<1$$

$$(\text{arccos}\,x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para } |x|<1$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{para todo } x$$

$$(\text{arccot}\,x)'=\frac{-1}{1+x^2} \quad \text{para todo } x$$

$$(\text{arcsec}\,x)'=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad \text{para } |x|>1$$

$$(\text{arccsc}\,x)'=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad \text{para } |x|>1$$

TIP

Si f y g son inversas una de la otra y ambas son derivables, entonces

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$$

para todo punto x en el dominio de f para el cual $g'(f(x))\neq 0$.

Ejercicios

Calcula en cada caso la derivada de la función dada.

1. $f(x)=\arctan\left(x^2-1\right)$
2. $f(x)=\arccos\sqrt{x}$
3. $f(x)=\text{arcsen}\left(x^{-3}\right)$
4. $f(x)=\text{arc}\sec x^2$
5. $f(x)=\arctan 8x^3$
6. $f(x)=\text{arccot}(\text{sen}\, 2x)$
7. $f(x)=\text{arcsen}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$
8. $f(x)=\text{arccsc}\left(\frac{3x+1}{x^2}\right)$
9. $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{4x^2+2x}}\right)$
10. $f(x)=\text{arccot}\sqrt{x^2-2}$
11. $f(x)=x\,\text{arcsen}(x+1)$
12. $f(x)=x^2\arccos x^3$
13. $f(x)=\frac{\arctan x}{x+3}$
14. $f(x)=\frac{\text{arc}\sec x^2}{4x+5}$
15. $f(x)=\frac{\text{arcsen}\, 4x}{6x-2}$
16. $f(x)=\frac{\arccos x}{\arctan(3x+1)}$
17. $f(x)=\frac{\text{arcsec}\left(x-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x^2-2}}$
18. $f(x)=\frac{\sqrt{2x^3+5}}{\text{arccsc}(\tan x)}$

Mundo virtual

En esta sección te invitamos a visitar varios sitios que contienen material relacionado con el concepto de continuidad. Algo de ese material está desarrollado por los autores de este libro, pero mucho más ha sido desarrollado por personas de todo el mundo que tienen interés en las matemáticas.

- http://atenea.matem.unam.mx Éste es un sitio del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en el cual los investigadores del Instituto están creando material para cursos en línea. Puedes entrar como invitado sin necesidad de registrarte. Una vez dentro del sitio, elige la categoría "Cálculo diferencial e integral", dentro de ella, el curso "Cálculo I" y entra a las lecciones de la sección "Función inversa".
- http://es.wikipedia.org La enciclopedia en línea Wikipedia es uno de los sitios de referencia para encontrar información relacionada con la ciencia y la cultura. En el buscador escribe: Función inversa o Función recíproca. Hojea el documento para ampliar los temas vistos en esta unidad, en particular, la historia de la derivada.
- http://newton.matem.unam.mx/geolab En este sitio puedes descargar el programa Geolab y el curso para aprender a utilizarlo. En las secciones de Mundo virtual te guiaremos para realizar algunas construcciones relacionadas con los temas de este libro.

Construcciones con Geolab

Construcción de gráficas de funciones inversas.

Recuerda que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función inyectiva, entonces tiene una inversa g definida en la imagen de $[a,b]$, y la gráfica de g es el reflejo de la gráfica de f respecto a la recta $y=x$.

Vamos a construir ambas gráficas utilizando el constructor de curva paramétrica. Una curva paramétrica es la imagen en el plano de una función $F:[a,b]\to\mathbb{R}^2$.

Empezamos con la función $f(x)=x^2$ para $x\in[0,5]$. Observa que en este intervalo sí es inyectiva.

1. Elige Curva Paramétrica en el menú Define funciones.
2. Escribe los valores que se muestran en la Tabla 6.1 y acepta la construcción. Observa que dibuja la gráfica de la función $f(x)=x^2$, porque está dibujando los puntos del plano de la forma (t,t^2).
3. Construye otra curva paramétrica invirtiendo los valores que pusiste en x y y (ver Tabla 6.2).

   Observa dos cosas: definiste el dominio como $[0,25]$ porque esa es la imagen del intervalo $[0,5]$ bajo la función $f(x)=x^2$, y se están dibujando los puntos de la forma (t^2,t). Es decir, esta gráfica es la reflexión de la gráfica de f en la recta $y=x$.
4. Si quieres, dibuja la recta $y=x$ para ver que efectivamente es el eje de simetría. Haz otras parejas de gráficas, teniendo cuidado de que en el dominio que elijas la función sea inyectiva, por ejemplo:

- $f(x)=\text{sen}(x)$ para $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
- $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$ para $x\in[0,4]$.
- $f(x)=4x-3$ para $x\in[-1,1]$.

Tabla 6.1

a=	0
b=	5
x=	t_
y=	t_*t_
pasos=	100

Tabla 6.2

a=	0
b=	25
x=	t_*t_
y=	t_
pasos=	100

Resumen de la unidad

- $(\text{arcsen}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ x\in(-1,1)$
- $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};\ x\in(-1,1)$
- $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};\ x\in\mathbb{R}$
- $(\text{arccot}\,x)'=\frac{-1}{1+x^2};\ x\in\mathbb{R}$
- $(\text{arcsec}\,x)'=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}};\ x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
- $(\text{arccsc}\,x)'=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}};\ x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Autoevaluación

1. La regla de correspondencia de la función inversa de $f(x)=6x-7$ es:

a. $g(y)=\frac{1}{6}y+\frac{7}{6}$

b. $g(y)=\frac{1}{6}y-\frac{7}{6}$

c. $g(y)=6y-7$

d. $g(y)=6y+7$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 194.

2. La derivada de la función $f(x)=\operatorname{arccsc}\left(5x^2-7x-20\right)$ es:

a. $\frac{-(10x-7)}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

b. $\frac{-(10x-7)}{\left|5x^2-7x-20\right|\sqrt{\left(5x^2-7x-20\right)^2-1}}$

c. $\frac{-1}{\left|5x^2-7x-20\right|\sqrt{\left(5x^2-7x-20\right)^2-1}}$

d. $\frac{-(10x-7)}{\left|5x^2-7x-20\right|\sqrt{1-\left(5x^2-7x-20\right)^2}}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 201.

3. La derivada de la función $f(x)=\arccos\left(\operatorname{sen}\sqrt{x^2-1}\right)$ es:

a. $\frac{-1}{2\sqrt{1-\left(\operatorname{sen}\sqrt{x^2-1}\right)^2}}\cos\sqrt{x^2-1}$

b. $\frac{-x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}\cos\sqrt{x^2-1}$

c. $\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-\left(\operatorname{sen}\sqrt{x^2-1}\right)^2}}\cos\sqrt{x^2-1}$

d. $\frac{-1}{2\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-\left(\operatorname{sen}\sqrt{x^2-1}\right)^2}}\cos\sqrt{x^2-1}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 172 y 201.

4. La función inversa de la función $f(x)=\frac{2x-8}{6-2x}$ es:

a. $f^{-1}(x)=\frac{3x+4}{1+x}$

b. $f^{-1}(x)=\frac{3x+4}{1-x}$

c. $f^{-1}(x)=\frac{3x-4}{1+x}$

d. $f^{-1}(x)=\frac{3x-4}{1-x}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 166 y 194.

5. El dominio de la función inversa de $f(x)=\sqrt{x+8}$ es:

a. $[-8,\infty)$

b. $\left[2\sqrt{2},\infty\right)$

c. $[0,\infty)$

d. $\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right]$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 33 y 193.

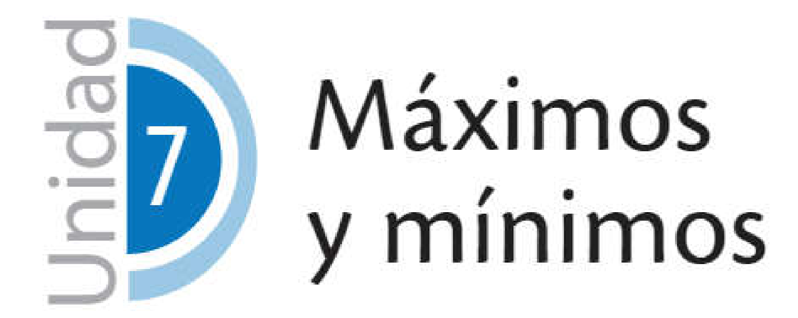
Heteroevaluación

1. Encuentra la derivada de la función $f(x)=\arctan\left(\cos^2(13x-29)\right)$.

2. Encuentra la derivada de la función $f(x)=\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{x-4}\right)$.

3. Encuentra la función inversa de la función $f(x)=\frac{6x+4}{3x}$.

La montaña rusa representa máximos y mínimos



Unidad 7 Máximos y mínimos

Ésta es una de las unidades más interesantes del curso, pues trata del uso de la derivada para estudiar el crecimiento y decrecimiento de las funciones.

Uno de los problemas más comunes en las ciencias, la industria, las finanzas, etcétera, es encontrar el valor máximo o mínimo que puede alcanzar una función.

Una función real de variable real es creciente en un conjunto A si para cualquier par de puntos que cumplan $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

La última parte de la unidad se dedica a estudiar problemas en distintos ámbitos. Por ejemplo, a un industrial le interesa saber cuál es el máximo número de productos de cierto tipo que puede fabricar con la maquinaria de que dispone. Un comerciante desea saber a qué precio debe vender un producto para que la utilidad sea máxima. Un distribuidor de mercancía desea construir una bodega en una región de manera que sus costos de transporte sean mínimos. Un gobernante desea diseñar un programa social de manera que el beneficio a la población sea máximo.

En ocasiones la mayor dificultad que enfrentan los estudiantes en este tipo de problemas es la de interpretar la información dada para construir una solución que resuelva el problema. En esta unidad aprenderás que muchos de estos problemas pueden plantearse en términos de funciones y el cálculo diferencial ayuda a encontrar los puntos donde se alcanza el máximo o el mínimo mediante el análisis de la derivada de la función.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.



- Funciones crecientes y decrecientes
- Máximos y mínimos
  - Criterio de la primera derivada
  - Criterio de la segunda derivada
- Determinación del máximo o mínimo absoluto de una función cuadrática sin usar derivadas
- ¿Toda función tiene máximo o mínimo absoluto?
- Problemas
  - Planteamiento
- Problemas de máximos y mínimos

Funciones crecientes y decrecientes

TIP

Una atmósfera es el peso de una columna de mercurio de 760 mm de altura y 1 cm^2 de sección, a la latitud de 45° y al nivel del mar. Por ejemplo, la isla de Hokkaido, la segunda más grande de Japón, está en la latitud 45°.

La presión p, medida en atmósferas, a una profundidad de d metros bajo la superficie del mar está dada por la ecuación:

$$p(d)=\frac{1}{10}d+1.$$

Determinar si la función p es creciente o decreciente.

Solución:
Como d es la distancia entonces $d\geq 0$. Consideramos $d_1<d_2$, entonces:

$$\frac{1}{10}d_1<\frac{1}{10}d_2$$
$$\frac{1}{10}d_1+1<\frac{1}{10}d_2+1$$
$$p(d_1)<p(d_2),$$

así la función es creciente, (ver Figura 7.1).

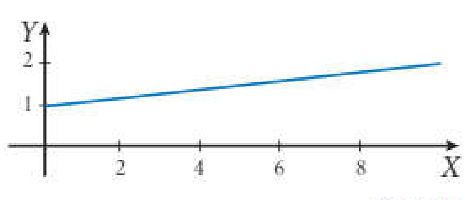


Figura 7.1

La utilidad principal de la derivada de una función es que da información sobre cómo cambia dicha función, por ejemplo, nos indica cuándo la función es creciente y cuándo es decreciente. También nos ayuda a determinar en qué puntos la función alcanza su valor máximo o mínimo. En la sección siguiente abordaremos con precisión estos últimos conceptos.

Una función f es *creciente* en un conjunto $A\subset Dom\ f$ si, para cualesquiera dos puntos $x_1,\ x_2\in A$, se tiene que:

$$x_1<x_2 \text{ entonces } f(x_1)\leq f(x_2).$$

Figura 7.2

Geométricamente, la gráfica de una función es creciente en el conjunto A si al movernos hacia la derecha a través de puntos de A la gráfica sube (ver Figura 7.2) o al menos no baja (ver Figura 7.3).

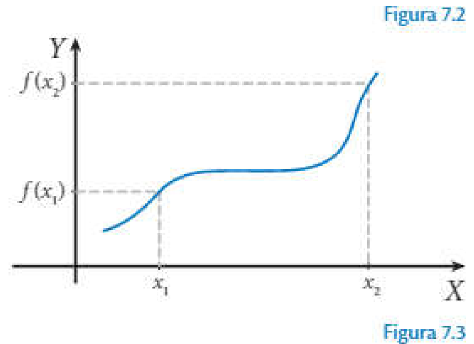


Figura 7.3

Una función f es *decreciente* en un conjunto $A\subset Dom\, f$ si, para cualesquiera dos puntos $x_1,\ x_2\in A$, se tiene que:

$$x_1<x_2 \text{ entonces } f(x_1)\geq f(x_2).$$

Geométricamente, la gráfica de una función es decreciente si al movernos hacia la derecha a través de puntos de A, la gráfica baja (ver Figura 7.4) o al menos no sube (ver Figura 7.5).

Figura 7.4

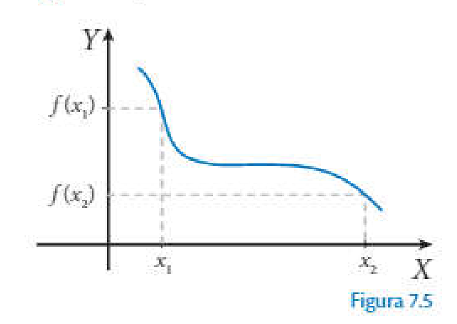


Figura 7.5

Una función es *monótona* en un conjunto A si es creciente o decreciente en él.

Cuando en un intervalo I, lo más grande posible, una función f es monótona, entonces llamamos a I un *intervalo de monotonía* de f.

La derivada de una función nos ayuda a estudiar su comportamiento en cuanto a su crecimiento o decrecimiento. Por ejemplo, nos permite determinar intervalos de monotonía de una función.

Sea f una función derivable en un intervalo abierto I:

- Cuando $f'(x) \geq 0$, la función f es creciente. En este caso la pendiente de la recta tangente en cada punto de I es mayor o igual que cero. En la Figura 7.6 la pendiente de la tangente que se ilustra es positiva.
- Cuando $f'(x) \leq 0$, la función f es decreciente. En este caso la pendiente de la recta tangente en cada punto de I es menor o igual que cero. En la Figura 7.7 la pendiente de la tangente que se ilustra es negativa.

TIP
La función f es estrictamente creciente si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.
La función f es estrictamente decreciente si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

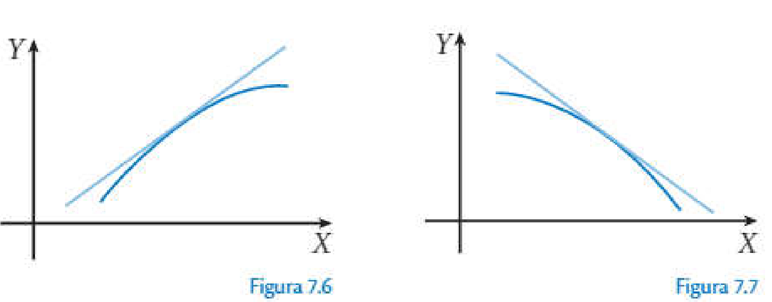


Figura 7.6 Figura 7.7

Así, tenemos el siguiente criterio para determinar el crecimiento o decrecimiento de una función derivable en un intervalo.

TIP
Si f es derivable en (a,b) y $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es creciente en (a,b).
Si f es derivable en (a,b) y $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es decreciente en (a,b).

Supongamos que f tiene derivada en un intervalo I:
i. Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I.
ii. Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I. (7.1)

Ejemplos

1. La función $f(x) = x^3$ es creciente en $\mathbb{R}$.

Solución:
El dominio de $f(x) = x^3$ es $\mathbb{R}$; o sea, el intervalo abierto $(-\infty, \infty)$.
Como:

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0$$

para todo $x \in (-\infty, \infty)$, entonces $f(x) = x^3$ es creciente en $\mathbb{R}$, (Figura 7.8).

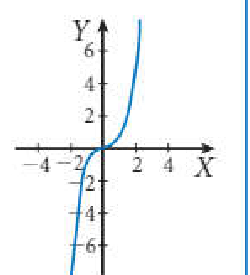


Figura 7.8

2. La función $f(x) = -\frac{x^5}{100} - x^3$ es decreciente en $\mathbb{R}$.

Solución:

El dominio de $f(x) = -\frac{x^5}{100} - x^3$ es el intervalo abierto $(-\infty, \infty)$.

TIP
Si f es derivable en (a,b) y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente creciente en (a,b).
Si f es derivable en (a,b) y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente decreciente en (a,b).

Ejemplos

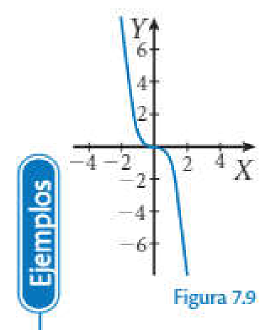


Figura 7.9

Como;

$$f'(x) = -5\frac{x^4}{100} - 3x^2 \leq 0$$

para todo $x \in (-\infty, \infty)$, entonces f es decreciente en $(-\infty, \infty)$, (Figura 7.9).

En particular,

Si f' tiene el mismo signo en todo punto de un intervalo, entonces f es creciente o decreciente en ese intervalo, según que el signo de f' sea positivo o negativo.

Un caso interesante es cuando $f'(x) = 0$ en un punto x de (a,b), esto lo analizaremos más adelante.

El comportamiento que tiene una función f, con relación a su monotonía, en un intervalo abierto (a,b) lo mantiene en $[a,b)$, $(a,b]$ o $[a,b]$ siempre que f sea continua en el (los) extremo(s) que se añade(n) a (a,b). Es decir:

Pensamiento crítico

Si f es continua en $[a,b]$, estrictamente creciente en (a,b), $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces ¿cuántos puntos c hay tales que $f(c) = 0$?

Observación 1

***Supongamos que f es creciente en un intervalo abierto** (a,b).*

- *Si además f es continua en a, entonces f es creciente en $[a,b)$.*
- *Si además f es continua en b, entonces f es creciente en $(a,b]$.*
- *Si además f es continua en a y b, entonces f es creciente en $[a,b]$.*

***Supongamos que f es decreciente en un intervalo abierto** (a,b).*

- *Si además f es continua en a, entonces f es decreciente en $[a,b)$.*
- *Si además f es continua en b, entonces f es decreciente en $(a,b]$.*
- *Si además f es continua en a y b, entonces f es decreciente en $[a,b]$.*

Ejemplo

1. Determinar los intervalos de monotonía de la función $f(x) = x^2 - 4x - 2$ en su dominio $(-\infty, \infty)$ y especificar el tipo de monotonía en cada uno de ellos.

Solución:

Vamos a aplicar el criterio (7.1). Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = 2x - 4,$$

encontramos los puntos x para los cuales la derivada es mayor o igual a cero; o sea resolvemos la desigualdad $f'(x) \geq 0$, es decir:

$$2x - 4 \geq 0$$
$$x \geq 2$$

Así, $f'(x) \geq 0$ en $[2, \infty)$. Por el criterio (7.1), la función f es creciente en $[2, \infty)$.

Por otra parte, encontramos los puntos x para los cuales la derivada es menor o igual a cero; o sea, resolvemos la desigualdad $f'(x) \leq 0$, es decir:

$$2x - 4 \leq 0$$
$$x \leq 2,$$

de donde, $f'(x) \leq 0$ en $(-\infty, 2]$ y por el criterio (7.1), f es decreciente en $(-\infty, 2]$.

Ejemplo

En el cuadro de la derecha indicamos, en el primer renglón los extremos del dominio, que en este caso son $-\infty$ e ∞, y el punto $x=2$ en el que la derivada cambia de signo. En el segundo renglón indicamos el signo de la derivada en los intervalos determinados y el valor de la derivada en $x=2$. En el tercer renglón, se indica mediante flechas el crecimiento o decrecimiento de la función en los intervalos, de acuerdo al signo de la derivada en dichos intervalos y también se muestra el valor de la función en $x=2$.

	$-\infty$		2		∞
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-6	$\nearrow$	

El cuadro anterior muestra que la función es decreciente en $(-\infty,2]$ y creciente en $[2,\infty)$, (Figura 7.10)

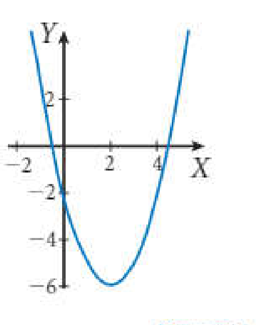


Figura 7.10

A partir del teorema de Darboux tenemos:

- Si $f'(x)\neq 0$ para todo $x\in I$ y se cumple que $f'(c)>0$ en un punto $c\in I$, entonces $f'(x)>0$ para todo $x\in I$ y por tanto, f es creciente en I.
- Si $f'(x)\neq 0$ para todo $x\in I$ y $f'(c)<0$ en un punto $c\in I$, entonces $f'(x)<0$ para todo $x\in I$ y por lo tanto, f es decreciente en I.

Con lo anterior tenemos que el criterio (7.1) se transforma en el siguiente, que es más sencillo de aplicar.

Supongamos que f es una función con derivada f' **distinta de cero en todo** I:

i. Si $f'(c)>0$ en algún punto $c\in I$, entonces f es creciente en I.

ii. Si $f'(c)<0$ en algún punto $c\in I$, entonces f es decreciente en I. (7.2)

Observación: De este criterio y la observación 1 se sigue que si f' **distinta de cero en todo punto de** (a,b) y f es continua en a (en b o en ambos extremos), entonces se tiene la monotonía respectiva de f en el intervalo $[a,b)$ $((a,b]$ o $[a,b])$.

TIP

Teorema de Darboux.
Si $f'(x)\neq 0$ para todo x en un intervalo I, entonces $f'(x)$ tiene el mismo signo en todo punto de I.

Ejemplos

1. Determinar los intervalos de monotonía y el tipo de ésta en cada uno de ellos, de la función $f(x)=x^3+6x^2$.

Solución:
Vamos a aplicar el criterio (7.2). Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x)=3x^2+12x.$$

Encontramos los puntos x en los que la derivada es cero; o sea, resolvemos la ecuación $f'(x)=0$:

$$3x^2+12x=0$$
$$3x(x+4)=0,$$

de donde, $3x=0$ o bien, $x+4=0$; es decir,

$$x=0 \quad \text{o} \quad x=-4.$$

Estos puntos determinan en la recta tres intervalos abiertos ajenos entre sí, (ver Figura 7.11):

$$(-\infty,-4),\ (-4,0)\ \text{ y }\ (0,\infty)$$

TIP

Si $f'(x)\neq 0$ para todo $x\in(a,b)$ y $f'(c)>0$ en algún punto $c\in(a,b)$, entonces f es creciente en (a,b).
Si $f'(x)\neq 0$ para todo $x\in(a,b)$ y $f'(c)<0$ en algún punto $c\in(a,b)$, entonces f es decreciente en (a,b).

−4 0 X

Figura 7.11

Puesto que en dichos intervalos abiertos la derivada nunca es cero, basta con analizar el signo de la derivada en algún punto de cada uno de ellos para aplicar el criterio (7.2). Elegimos puntos donde sea fácil evaluar la derivada $f'(x)=3x^2+12x$.

- $-5\in(-\infty,-4)$ y

$$f'(-5)=3(-5)^2+12(-5)=15>0.$$

Entonces, la función f es creciente en $(-\infty,-4)$.

- $-1\in(-4,0)$:

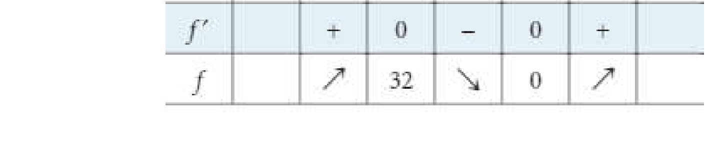
$$f'(-1)=3(-1)^2+12(-1)=-9<0.$$

Entonces, la función f es decreciente en $(-4,0)$.

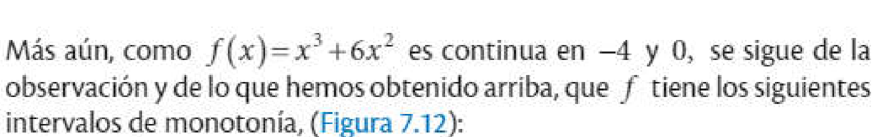
- $1\in(0,\infty)$:

$$f'(1)=3(1)^2+12(1)=15>0.$$

Entonces, la función f es creciente en $(0,\infty)$.



	$-\infty$		-4		0		∞
f'		+	0	−	0	+	
f		↗	32	↘	0	↗	



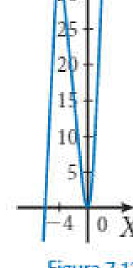


Figura 7.12

Más aún, como $f(x)=x^3+6x^2$ es continua en -4 y 0, se sigue de la observación y de lo que hemos obtenido arriba, que f tiene los siguientes intervalos de monotonía, (Figura 7.12):

- $(-\infty,-4]$, en el que la función f es creciente.
- $[-4,0]$, en el que la función f es decreciente.
- $[0,\infty)$, en el que la función f es creciente.

2. Determinar los intervalos de monotonía y el tipo de ésta, de la función $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+5}$.

Solución:

Ahora el dominio de la función no es todo $\mathbb{R}$, puesto que en $x=-5$ no está definida. Esto lo debemos tener en cuenta en el resto de nuestro análisis.

Vamos a aplicar el criterio (7.2). Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x)=\frac{2x(x+5)-1(x^2-16)}{(x+5)^2}$$
$$=\frac{x^2+10x+16}{(x+5)^2}.$$

TIP

Si $f(x)$ es un polinomio, entonces sus intervalos de monotonía tienen por extremos los puntos donde f' se anula.

Encontramos los puntos en los que la derivada es cero, o sea, resolvemos la ecuación $f'(x)=0$:

$$\frac{x^2+10x+16}{(x+5)^2}=0$$

$$x^2+10x+16=0$$

$$(x+8)(x+2)=0,$$

de donde;

$$x=-8 \quad \text{o} \quad x=-2.$$

Estos puntos y el punto $x=-5$, que es el único punto en donde la función f no está definida, determinan los siguientes intervalos abiertos, (Figura 7.13):

$$(-\infty,-8),\ (-8,-5),\ (-5,-2)\ \text{y}\ (-2,\infty).$$

−8 −5 −2 X

Figura 7.13

Puesto que en dichos intervalos abiertos la derivada nunca es cero, basta con analizar el signo de la derivada en algún punto de cada uno de ellos para usar el criterio (7.2). Tomamos puntos donde sea fácil evaluar la derivada $f'(x)=\dfrac{x^2+10x+16}{(x+5)^2}$.

- $-9\in(-\infty,-8)$:

$$f'(-9)=\frac{(-9)^2+10(-9)+16}{(-9+5)^2}=\frac{7}{16}>0.$$

Entonces, f' es positiva en $(-\infty,-8)$ y f es creciente en $(-\infty,-8)$.

- $-6\in(-8,-5)$:

$$f'(-6)=\frac{(-6)^2+10(-6)+16}{(-6+5)^2}=\frac{-8}{1}<0.$$

Entonces, f' es negativa en $(-8,-5)$ y f es decreciente en $(-8,-5)$.

- $-3\in(-5,-2)$:

$$f'(-3)=\frac{(-3)^2+10(-3)+16}{(-3+5)^2}=\frac{-5}{4}<0.$$

Entonces, f' es negativa en $(-5,-2)$ y f es decreciente en $(-5,-2)$.

- $0\in(-2,\infty)$:

$$f'(0)=\frac{(0)^2+10(0)+16}{(0+5)^2}=\frac{16}{25}>0.$$

Entonces, f' es positiva en $(-2,\infty)$ y f es creciente en $(-2,\infty)$.

	$-\infty$		-8		-5		-2		∞
f'		+	0	−		−	0	+	
f		↗	−16	↘		↘	−4	↗	

TIP

Jean Gaston Darboux (1842-1917) fue un matemático francés que se centró, principalmente, en el estudio de la geometría y el análisis matemático. Además, escribió la biografía de Henri Poincaré, otro importante matemático.

Ejemplos

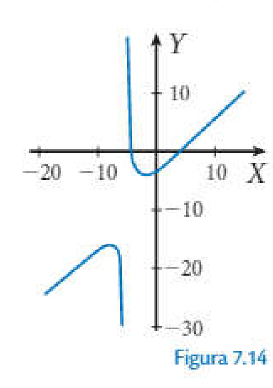


Figura 7.14

Más aún, como $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+5}$ es continua en -8 y -2, se sigue de la observación y de lo que hemos obtenido arriba que los intervalos de monotonía de f son los siguientes, (Figura 7.14):

- $(-\infty,-8]$, en el que la función f es creciente.
- $[-8,-5)$, en el que la función f es decreciente.
- $(-5,-2]$, en el que la función f es decreciente.
- $[-2,\infty)$, en el que la función f es creciente.

Ejercicios

Determinar en cada caso los intervalos de monotonía de la función dada.

1. $f(x)=x^4+2x^2+5$
2. $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$
3. $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$
4. $f(x)=x^4-2x^3$
5. $f(x)=\sqrt{x+8}$
6. $f(x)=\sqrt{x^2-16}$
7. $f(x)=\dfrac{x^2+8x+16}{x-6}$
8. $f(x)=\dfrac{11x-3}{(x+5)^2}$
9. $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-25}$
10. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2x-15}$
11. $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+5}$
12. $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2(x+4)}$
13. $f(x)=|x+8|$.
14. $f(x)=|x-3|$.
15. $f(x)=|x^2-4|$

Máximos y mínimos



La función de la Figura 7.15:

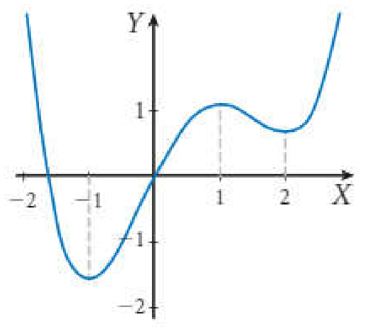


Figura 7.15

- Es decreciente hasta $x=-1$.
- Es creciente entre -1 y 1.
- Es decreciente entre 1 y 2.
- Es creciente a partir de $x=2$.
- El punto $x=1$ es importante, ya que el valor de la función ahí es mayor que sus valores en todos los puntos cercanos a 1, aunque como puede apreciarse, hay valores de la función mayores que $f(1)$ que son tomados en puntos que están más allá de 2. Decimos entonces que en $x=1$ la función alcanza un valor *máximo local* o *máximo relativo*. Observa que en este punto la recta tangente es horizontal, es decir, $f'(1)=0$.

Podemos imaginar que la gráfica de una función es como una carretera que está subiendo y bajando al pasar por una zona montañosa. Cuando la carretera alcanza la cima de una colina estamos más alto que todos los puntos cercanos, ahí hay un máximo local, pero es posible que haya otras colinas más altas por donde pasa la carretera antes o después.

- Similarmente, en los puntos $x=-1$ y $x=2$ el valor de la función es menor que los valores de la función en todos los puntos cercanos a ellos, aunque hay mu-

chos puntos para los cuales el valor de la función es menor que $f(2)$. Decimos que la función alcanza un valor *mínimo local* o *mínimo relativo* en -1 y en 2.

Observa que en esos dos puntos la recta tangente es horizontal, es decir, $f'(-1)=0$ y $f'(2)=0$, (ver Figura 7.16).

En general decimos que:

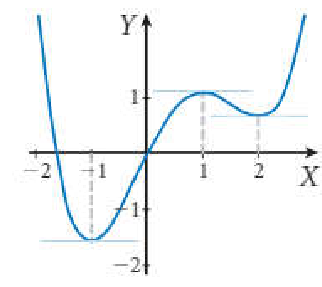


Figura 7.16

> Una función f alcanza un *máximo local* o *máximo relativo* en un punto c si:
> $$f(c) \geq f(x) \text{ para todo } x \text{ cercano a } c.$$
> Una función f alcanza un *mínimo local* o *mínimo relativo* en un punto d si:
> $$f(d) \leq f(x) \text{ para todo } x \text{ cercano a } d.$$

Existen también los conceptos de *máximo* y *mínimo absolutos*.

Decimos que:

> Una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza un *máximo absoluto* en un punto $c \in A$ si:
> $$f(c) \geq f(x) \text{ para todo } x \in A.$$
> Una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza un *mínimo absoluto* en un punto $d \in A$ si:
> $$f(d) \leq f(x) \text{ para todo } x \in A.$$

TIP

Una función f alcanza un máximo local en un punto c si $f(c) \geq f(x)$ para todo x cercano a c.
Una función f alcanza un mínimo local en un punto d si $f(d) \leq f(x)$ para todo x cercano a d.



Observación: Si f es constante en un intervalo I entonces en todos los puntos de I alcanza un máximo local y un mínimo local.

Diremos que f alcanza o tiene un máximo en x si tiene un máximo local o absoluto en ese punto. De manera similar, diremos que f alcanza o tiene un mínimo en x si tiene un mínimo local o absoluto en ese punto.

- Si una función es creciente en un intervalo $(a,c]$ y decreciente en $[c,b)$ entonces f tiene un máximo en c, (ver Figura 7.17).
- Si una función es decreciente en un intervalo $(a,c]$ y creciente en $[c,b)$ entonces f tiene un mínimo en c, (ver Figura 7.18).

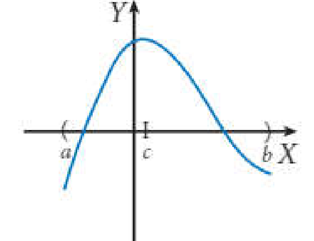


Figura 7.17

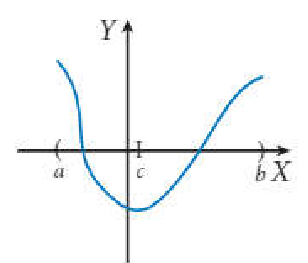


Figura 7.18



Ejemplos

1. En el ejemplo de la página 210 analizamos el crecimiento y decrecimiento de la función continua $f(x)=x^2-4x-2$ y obtuvimos que:
   - f es decreciente en $(-\infty,2]$ y creciente $[2,\infty)$.

   Entonces la función alcanza un mínimo en $x=2$. (Ver Figura 7.19a).



Pensamiento crítico

Si un punto $x=c$ es un máximo y mínimo local de una función f, ¿qué se puede decir de la función?

2. En el ejemplo 1 de la página 211 analizamos el crecimiento y decrecimiento de la función continua $f(x)=x^3+6x^2$ y obtuvimos que:

- f es creciente en $(-\infty,-4]$ y decreciente en $[-4,0)$.
- f es decreciente en $(-4,0]$ y creciente en $[0,\infty)$.

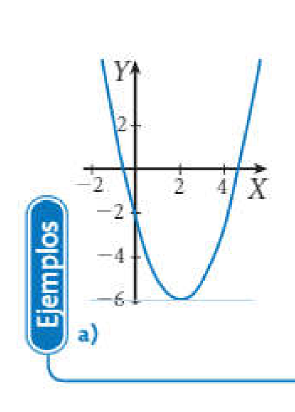
Entonces, la función alcanza un máximo en $x=-4$ y un mínimo en $x=0$. (Ver Figura 7.19b).

3. En el ejemplo 2 de la página 212 analizamos el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+5}$ y obtuvimos que:

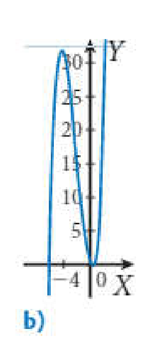
- f es creciente en $(-\infty,-8]$ y decreciente en $[-8,-5)$.
- f es decreciente en $(-5,-2]$ y creciente $[-2,\infty)$.

Entonces, la función alcanza un máximo en $x=-8$ y un mínimo en $x=-2$. (Ver la Figura 7.19c).

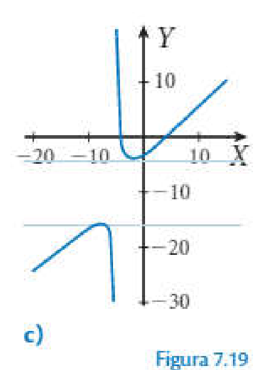
Ejemplos



a)



b)

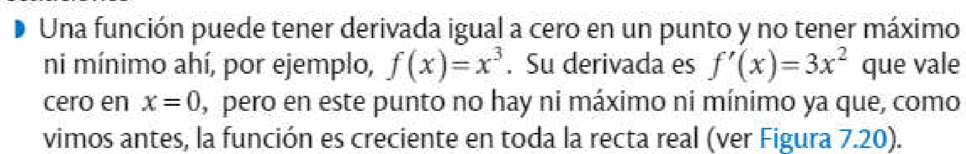


c)

Figura 7.19

En la Figura 7.19 aparecen las gráficas de las funciones consideradas en los tres ejemplos anteriores. En ellas puede observarse que las rectas tangentes a sus gráficas en los puntos correspondientes a donde la función alcanza un valor máximo o mínimo son horizontales. O sea, la derivada es cero en los puntos donde se toman esos valores.

Precauciones



- Una función puede tener derivada igual a cero en un punto y no tener máximo ni mínimo ahí, por ejemplo, $f(x)=x^3$. Su derivada es $f'(x)=3x^2$ que vale cero en $x=0$, pero en este punto no hay ni máximo ni mínimo ya que, como vimos antes, la función es creciente en toda la recta real (ver Figura 7.20).
- Una función puede tener un máximo o un mínimo en un punto donde no es derivable. Por ejemplo, $f(x)=|x|$ tiene un mínimo en $x=0$ y no es derivable en $x=0$, (ver Figura 7.21).

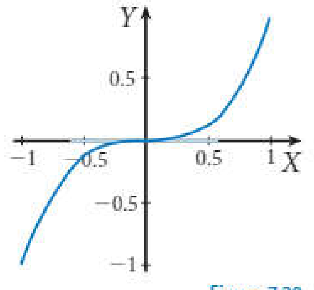


Figura 7.20

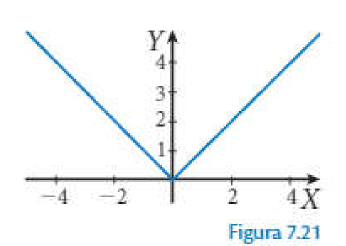


Figura 7.21

Cuando queremos buscar los puntos de un intervalo abierto (a,b) donde una función f alcanza un máximo o un mínimo, debemos concentrarnos en *los puntos de* (a,b) *donde la derivada de* f *vale cero y los puntos de* (a,b) *donde la derivada de* f *no existe.* Estos son los únicos candidatos.

> Si f es una función definida en un intervalo (a,b), entonces $c\in(a,b)$ es llamado un *punto crítico* de f si
> **i.** $f'(c)=0$ o
> **ii.** $f'(c)$ no existe.

> Los máximos y los mínimos de una función en un intervalo (a,b) solo pueden alcanzarse en puntos críticos.

Diremos que dos puntos críticos $p<q$ de una función f son consecutivos si entre ellos no hay ningún otro punto crítico de f.

Al aplicar el criterio (7.2) obtenemos el que sigue:

Supongamos que p y q son puntos críticos consecutivos de f:

i. Si $f'(c)>0$ en algún punto $c\in(p,q)$, entonces f es creciente en (p,q).

ii. Si $f'(c)<0$ en algún punto $c\in(p,q)$, entonces f es decreciente en (p,q). (7.3)

TIP

Los máximos y mínimos de una función se localizan en los puntos en los que la derivada es cero o no existe.

Criterio de la primera derivada

Para encontrar los máximos y mínimos de una función puede usarse el llamado:

- *Criterio de la primera derivada*

Supongamos que f es una función continua en (a,b) y que es derivable en (a,b), excepto tal vez en $c\in(a,b)$, que es un punto crítico de f.

i. Si $f'(x)\geq 0$ para todo $x\in(a,c)$ y $f'(x)\leq 0$ para todo $x\in(c,b)$ entonces f alcanza un máximo en c.

ii. Si $f'(x)\leq 0$ para todo $x\in(a,c)$ y $f'(x)\geq 0$ para todo $x\in(c,b)$ entonces f alcanza un mínimo en c.

iii. Si f no es constante y f' no cambia de signo al pasar por c, entonces f no alcanza máximo ni mínimo en c.

Recordamos que $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x,f(x))$. Si una recta tiene pendiente positiva, entonces se inclina así: /. Si una recta tiene pendiente negativa, entonces se inclina así: \.

Para ayudarnos a recordar el criterio de la primera derivada puede servirnos el siguiente esquema que nos dice cómo cambian las inclinaciones de las tangentes.

- Si tenemos /\, entonces en c hay máximo.
- Si tenemos \/, entonces en c hay mínimo.

Ejemplos

1. Encontrar los máximos y mínimos de la función $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$.

Solución:

Vamos a aplicar el criterio de la primera derivada. Encontramos la derivada de la función:

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Observamos que la función es continua en $(-\infty,\infty)$, su derivada no está definida en $x=0$ y en ningún punto la derivada vale cero. Así el único punto crítico es el cero.

TIP

Sea $c\in(a,b)$ un punto crítico de una función f derivable en (a,b) excepto tal vez en c.

Si f' es mayor o igual que cero a la izquierda de c y menor o igual que cero a la derecha de c entonces f alcanza un máximo en c.

Si f' es menor o igual que cero a la izquierda de c y mayor o igual que cero a la derecha de c entonces f alcanza un mínimo en c.

El cual determina los intervalos:

$$(-\infty,0) \quad \text{y} \quad (0,\infty).$$

Usamos el criterio de la primera derivada para ver si en 0 la función alcanza un valor máximo o mínimo.

En cada intervalo elegimos un punto donde sea fácil de evaluar la derivada

	$-\infty$		0		∞
f'		$-$	■	$+$	
f		↘	0	↗	

- $-1 \in (-\infty,0)$:

$$f'(-1)=\frac{2}{3\sqrt[3]{-1}}=-\frac{2}{3}<0.$$

- $1 \in (0,\infty)$:

$$f'(1)=\frac{2}{3\sqrt[3]{1}}=\frac{2}{3}>0.$$

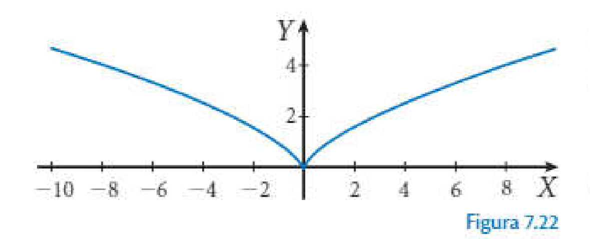


Figura 7.22

Como a la izquierda de $x=0$, la derivada es negativa (\ ) y a la derecha es positiva (/), entonces f tiene un mínimo en $x=0$.

Notamos que la derivada de $f'(x)\geq 0$ no existe en 0, esto lo señalamos con ■ en el cuadro de la izquierda. También ahí observamos que el último renglón sugiere la configuración \/ para la inclinación de las tangentes. (Ver Figura 7.22.)

2. Encontrar los máximos y mínimos de la función $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-8x^{\frac{1}{3}}$.

Solución:
Vamos a aplicar el criterio de la primera derivada. Encontramos la derivada de la función:

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}-\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\\ &=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{8}{3}x^{-\frac{2}{3}}\\ &=\frac{4}{3}\left(x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}\right)\\ &=\frac{4}{3}\left(\frac{x-2}{x^{\frac{2}{3}}}\right). \end{aligned}$$

Observamos que la función es continua en $\mathbb{R}$, su derivada no está definida en $x=0$ y la derivada vale cero en $x=2$. Así los puntos críticos son 0 y 2.

Usamos el criterio de la primera derivada para ver si en 0 o 2 se alcanza un valor máximo o mínimo.

Para analizar el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha de los puntos críticos, usamos el resultado (7.2). Para ello consideramos los intervalos determinados por los puntos críticos:

$$(-\infty,0), \quad (0,2) \quad \text{y} \quad (2,\infty).$$

En cada intervalo elegimos un punto donde sea fácil de evaluar la derivada

$$f'(x)=\frac{4}{3}\left(\frac{x-2}{x^{\frac{2}{3}}}\right)$$

- $-1\in(-\infty,0)$:

$$f'(-1)=\frac{4}{3}\left(\frac{-1-2}{(-1)^{\frac{2}{3}}}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{-3}{1}\right)<0.$$

- $1\in(0,2)$:

$$f'(1)=\frac{4}{3}\left(\frac{1-2}{(1)^{\frac{2}{3}}}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{-1}{1}\right)<0.$$

- $3\in(2,\infty)$:

$$f'(3)=\frac{4}{3}\left(\frac{3-2}{(3)^{\frac{2}{3}}}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{(3)^{\frac{2}{3}}}\right)>0.$$

Como al pasar de la izquierda de $x=0$ a la derecha de él, la derivada no cambia de signo, y f no es una función constante, entonces f no tiene máximo ni mínimo en ese punto.

Como a la izquierda de $x=2$ la derivada es negativa (\ ) y a la derecha es positiva (/), entonces f tiene un mínimo en $x=2$, (ver Figura 7.23).

Pensamiento crítico

Una función $f(x)$ no es derivable en un punto c, ¿puede f alcanzar un máximo o un mínimo en c?

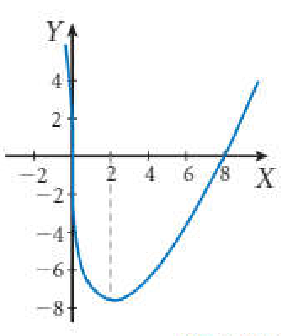


Figura 7.23

Ejemplos

	$-\infty$		0		2		∞
f'		−	■	−	0	+	
f		↘	0	↘	$-6\sqrt[3]{2}$	↗	

Ejercicios

Encuentra en cada caso los máximos y mínimos de la función utilizando el criterio de la primera derivada.

1. $f(x)=x^4-x^3$
2. $f(x)=x^{2/3}+3$
3. $f(x)=3x^2-5x+9$
4. $f(x)=\frac{x^3}{12}-x^2+4x$
5. $f(x)=\frac{1}{3}x^4+x^3-2$
6. $f(x)=4x^5-\frac{20}{3}x^3$
7. $f(x)=x^{4/3}+7x^{1/3}$
8. $f(x)=x^{5/3}+5x^{2/3}$
9. $f(x)=6x^{3/5}-3x^{8/5}$
10. $f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2+1}$
11. $f(x)=\frac{x^3-1}{4x^3-x-3}$
12. $f(x)=\frac{2x+5}{x^2-4}$
13. $f(x)=|x-5|$
14. $f(x)=|x+6|$
15. $f(x)=|x^2-9|$

Criterio de la segunda derivada

TIP

Sea f una función con segunda derivada en un intervalo (a,b) y $c \in (a,b)$. Si $f'(c)=0$ y $f''(c)<0$ entonces f alcanza un máximo en c.

El siguiente es otro criterio para encontrar máximos y mínimos.

Criterio de la segunda derivada

Si f es una función con segunda derivada en un intervalo (a,b) y $c \in (a,b)$ entonces

i. Si $f'(c)=0$ y $f''(c)<0$ entonces f alcanza un máximo en c.

ii. Si $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$ entonces f alcanza un mínimo en c.

Observación:

El siguiente argumento justifica el inciso i) del criterio anterior: Como f tiene segunda derivada en (a,b), entonces es derivable en ese intervalo.

Por la definición de derivada, $f''(c)<0$ significa que

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<0,$$

de aquí se puede concluir que:

$$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<0 \tag{7.4}$$

para x cercanos a c.

Si x está a la izquierda de c, es decir, $x<c$, entonces $x-c<0$, de donde, por (7.4),

$$f'(x)-f'(c)>0$$

y como $f'(c)=0$ entonces $f'(x)>0$.

Si x está a la derecha de c, es decir, $x>c$ entonces $x-c>0$, de donde, por (7.4),

$$f'(x)-f'(c)<0$$

y como $f'(c)=0$, entonces $f'(x)<0$.

Por el criterio de la primera derivada f alcanza un máximo en c.

Análogamente puede justificarse ii.

Ejemplos

1. Encontrar los máximos y los mínimos de la función $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$.

Solución:

Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x)=x^3-x^2-2x.$$

Encontramos los puntos en los que la derivada vale cero:

$$x^3-x^2-2x=0$$
$$x\left(x^2-x-2\right)=0$$
$$x(x+1)(x-2)=0,$$

de donde;

$$x=0, \qquad x=-1 \qquad \text{y} \qquad x=2.$$

Por lo tanto, los puntos críticos son -1, 0 y 2.

TIP

Sea f una función con segunda derivada en un intervalo (a,b) y $c \in (a,b)$. Si $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$ entonces f alcanza un mínimo en c.

Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x)=3x^2-2x-2$$

Ahora evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos:

- $x=-1$:

$$f''(-1)=3(-1)^2-2(-1)-2=3>0,$$

entonces f alcanza un mínimo en $x=-1$.

- $x=0$:

$$f''(0)=3(0)^2-2(0)-2=-2<0,$$

entonces f alcanza un máximo en $x=0$.

- $x=2$:

$$f''(2)=3(2)^2-2(2)-2=6>0,$$

entonces f alcanza un mínimo en $x=2$, (ver Figura 7.24).

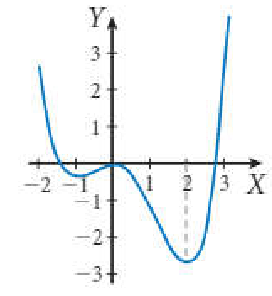


Figura 7.24

2. Encontrar los máximos y los mínimos de la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$.

Solución:

La función no está definida en $x=2$.

Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-1(x^2-1)}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{2x^2-4x-x^2+1}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}.$$

Aunque f' no está definida en 2, este punto no es punto crítico ya que la función ni siquiera está definida ahí.

Encontramos los puntos en los que la derivada vale cero:

$$\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}=0$$
$$x^2-4x+1=0,$$

De donde;

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}$$
$$=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}$$
$$=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}$$
$$=2\pm\sqrt{3}.$$

Así:

$$x=2+\sqrt{3} \quad \text{y} \quad x=2-\sqrt{3}.$$

Los puntos críticos son $2-\sqrt{3}$ y $2+\sqrt{3}$.

Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)\left(x^2-4x+1\right)}{(x-2)^4}$$

$$=\frac{(x-2)\left[(2x-4)(x-2)-2\left(x^2-4x+1\right)\right]}{(x-2)^4}$$

$$=\frac{(2x-4)(x-2)-2\left(x^2-4x+1\right)}{(x-2)^3}$$

$$=\frac{2x^2-8x+8-2x^2+8x-2}{(x-2)^3}$$

$$=\frac{6}{(x-2)^3}.$$

Ahora evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos:

- $x=2-\sqrt{3}$:

$$f''\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{6}{\left(2-\sqrt{3}-2\right)^3}=\frac{6}{\left(-\sqrt{3}\right)^3}<0,$$

entonces f alcanza un máximo en $x=2-\sqrt{3}$.

- $x=2+\sqrt{3}$:

$$f''\left(2+\sqrt{3}\right)=\frac{6}{\left(2+\sqrt{3}-2\right)^3}=\frac{6}{\left(\sqrt{3}\right)^3}>0,$$

entonces f alcanza un mínimo en $x=2+\sqrt{3}$, (ver Figura 7.25).

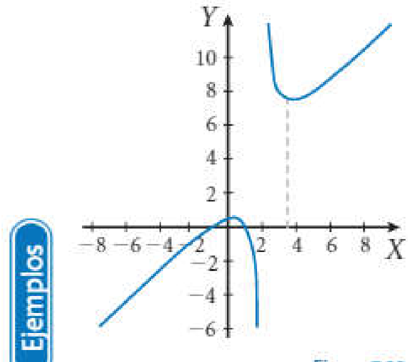


Figura 7.25

Ejemplos

Ejercicios

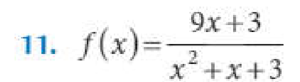
En cada caso, encuentra los máximos y mínimos de la función utilizando el criterio de la segunda derivada.

1. $f(x)=-x^2+6$
2. $f(x)=x^2-5$
3. $f(x)=x^3-4x$
4. $f(x)=-x^3+3x^2$
5. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{4}x^2-6x$
6. $f(x)=\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{4}x^2$
7. $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2$
8. $f(x)=\frac{x^2+11}{x-5}$
9. $f(x)=\frac{10x}{x^2+4}$
10. $f(x)=\frac{-30x}{x^2+25}$

Pensamiento crítico

Si $f'(c)=0$ y $f''(c)=0$, entonces, ¿f tiene un máximo o un mínimo en c?

Ejercicios



11. $f(x)=\dfrac{9x+3}{x^2+x+3}$

12. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+1}$

13. $f(x)=x+\dfrac{1}{x+5}$

14. $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x-3}$

15. $f(x)=\dfrac{4x-6}{x^2-2}$

16. $f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

17. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-16}$

18. $f(x)=\dfrac{x^2+x-17}{x-6}$

Determinación del máximo o mínimo absoluto de una función cuadrática sin usar derivadas

La gráfica de la función cuadrática $f(x)=\frac{1}{8}\left(x^2+6x+33\right)$ es una parábola vertical que abre hacia arriba (ver Figura 7.26). Para comprobar esta afirmación hacemos $y=f(x)$:

$$y=\frac{1}{8}\left(x^2+6x+33\right),$$

despejamos los términos en x y completamos el cuadrado:

$$8y-33=x^2+6x$$
$$8y-33+9=\left(x^2+6x+9\right)$$
$$8y-24=(x+3)^2$$
$$8(y-3)=(x+3)^2$$
$$y-3=\frac{1}{8}(x-(-3))^2.$$

Reconocemos que ésta es la ecuación estándar de una parábola vertical con vértice en $(-3,3)$ que abre hacia arriba.

Observamos que el vértice es el punto más bajo de la gráfica, por lo tanto, la función f alcanza su mínimo absoluto en -3 y dicho valor es $f(-3)=3$.

La gráfica de cualquier función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ es una parábola vertical. Para comprobarlo, procedemos como en el ejemplo anterior.

Hacemos $y=f(x)$ y obtenemos la ecuación:

$$y=ax^2+bx+c$$

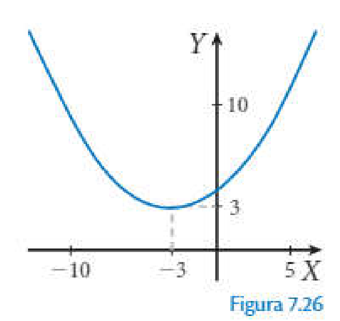


Figura 7.26

Al despejar los términos en x y completar el cuadrado llegamos a;

$$y-c=ax^2+bx$$

$$y-c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)$$

$$y-c+\frac{b^2}{4a}=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{(2a)^2}\right)$$

$$y-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

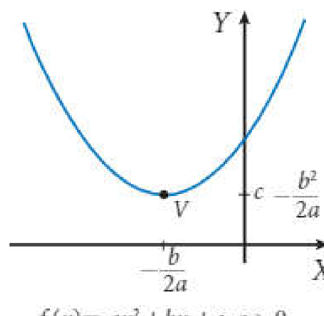
$$y-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2,$$

que es la ecuación estándar de una parábola vertical que abre hacia arriba si $a>0$ o hacia abajo si $a<0$ y que tiene su vértice en $V\left(-\frac{b}{2a},c-\frac{b^2}{4a}\right)$.

Así, V será el punto más bajo o más alto de la gráfica según que la parábola abra hacia arriba $(a>0)$ (ver Figura 7.27a) o hacia abajo $(a<0)$ (ver Figura 7.27b).

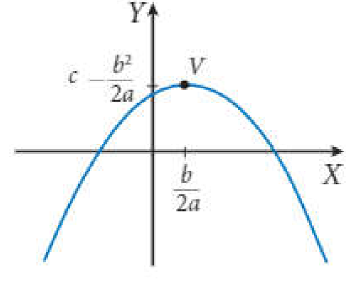
Cuando $a>0$, entonces $c-\frac{b^2}{4a}$ es el mínimo absoluto de f y cuando $a<0$, entonces $c-\frac{b^2}{4a}$ es el máximo absoluto de f. En ambos casos $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}$. En resumen: la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene:

- mínimo absoluto si $a>0$. El valor mínimo es la segunda coordenada del vértice V; es decir, $c-\frac{b^2}{4a}$ y f lo toma en $-\frac{b}{2a}$ que es la primera coordenada de V; o sea, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}$.
- máximo absoluto si $a<0$. El valor máximo es la segunda coordenada del vértice V; es decir, $c-\frac{b^2}{4a}$ y f lo toma en $-\frac{b}{2a}$ que es la primera coordenada de V; o sea, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}$.



$f(x)=ax^2+bx+c;\ a>0$

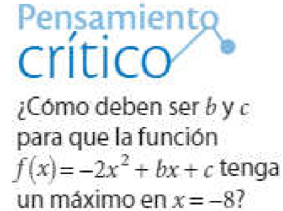
a)



$f(x)=ax^2+bx+c;\ a<0$

b)

Figura 7.27



¿Cómo deben ser b y c para que la función $f(x)=-2x^2+bx+c$ tenga un máximo en $x=-8$?

Ejemplos

1. Encontrar el máximo o mínimo absoluto de la función $f(x)=2x^2-20x+48$ y el punto donde alcanza dicho valor.

Solución:
La gráfica de

$$f(x)=\overbrace{2}^{a}x^2-20x+48$$

es una parábola vertical que abre hacia arriba $(2>0)$. El vértice V de la parábola es el punto de la gráfica que está más abajo. Entonces f tiene un mínimo absoluto. La segunda coordenada de V es el valor mínimo de f y es tomado en la primera coordenada de V.

Para obtener las coordenadas del vértice hacemos $y=f(x)$ despejamos los términos en x y completamos el cuadrado:

$$y=2x^2-20x+48$$
$$y-48=2x^2-20x$$
$$y-48=2\left(x^2-10x\right)$$
$$y-48+2(5)^2=2\left(x^2-10x+5^2\right)$$
$$y+2=2(x-5)^2$$
$$y-(-2)=2(x-5)^2.$$

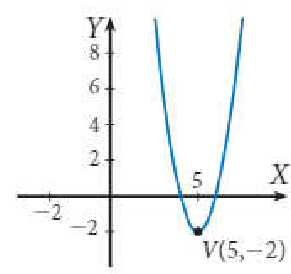


Figura 7.28

De donde, el vértice es $V(5,-2)$. El valor mínimo de f es -2 y lo alcanza en $x=5$, (ver Figura 7.28).

2. Encontrar el máximo o mínimo absoluto de la función $f(x)=-x^2+6x-5$ y el punto donde alcanza dicho valor.

Solución:
La gráfica de

$$f(x)=\overbrace{-1}^{a}x^2+6x-5$$

es una parábola que abre hacia abajo $(a<0)$. Por lo tanto, el vértice V de la parábola es el punto de la gráfica que está más arriba. Entonces f tiene un máximo absoluto. La segunda coordenada de V es el valor máximo de f y es tomado en la primera coordenada de V.

Para obtener las coordenadas del vértice hacemos $y=f(x)$ despejamos los términos en x y completamos el cuadrado:

$$y=-x^2+6x-5$$
$$y+5=-\left(x^2-6x\right)$$
$$y+5-3^2=-\left(x^2-6x+3^2\right)$$
$$y-4=-(x-3)^2.$$

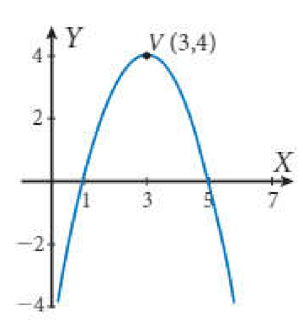


Figura 7.29

De donde, el vértice es $V(3,4)$. Por consiguiente, el valor máximo de f es 4 y lo alcanza en $x=3$, (ver Figura 7.29).

Ejercicios

Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas determina el valor máximo o mínimo absoluto y el punto donde lo alcanza.

1. $f(x)=\frac{1}{8}\left(x^2-8x+8\right)$
2. $f(x)=\frac{-1}{2}\left(x^2+10x+29\right)$
3. $f(x)=\frac{-1}{20}\left(x^2+2x-39\right)$
4. $f(x)=x^2+7$
5. $f(x)=-12x^2+72x-78$
6. $f(x)=4x^2-48x+147$

¿Toda función tiene máximo o mínimo absoluto?

Consideremos la función idéntica en $\mathbb{R}$, es decir la función $I:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, con $I(x)=x$.

Para cada número real x_1 existe un valor de x, por ejemplo $x = x_1 + 1$, tal que $I(x)>I(x_1)$, ver Figura 7.30.

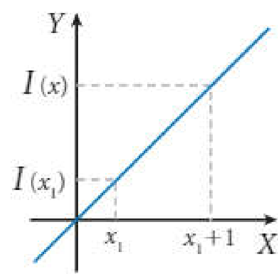


Figura 7.30

Del mismo modo, para cada número real x_0 existe un valor de x, por ejemplo $x=x_0-1$, tal que $I(x)<I(x_0)$. (Ver Figura 7.31.)

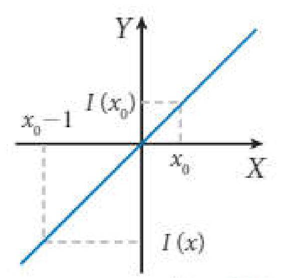


Figura 7.31

Así, esta función no tiene máximo ni mínimo absoluto.

Más aún, esta función restringida a $(0,1)$ (ver Figura 7.32) tampoco tiene máximo ni mínimo absoluto ya que si $x_0 \in (0,1)$, entonces $\frac{x_0}{2}, \frac{x_0+1}{2} \in (0,1)$ y se cumplen las desigualdades

$$I\left(\frac{x_0+1}{2}\right) > I(x_0)$$

y

$$I\left(\frac{x_0}{2}\right) < I(x_0).$$

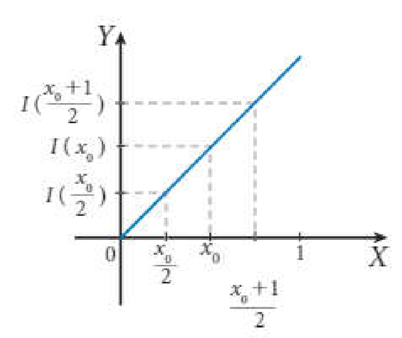


Figura 7.32

Por lo tanto, la respuesta que da nombre a esta sección es negativa, es decir hay funciones que no tienen máximo ni mínimo absolutos.

Sin embargo, hay dos condiciones que si son satisfechas por una función, garantizan que ésta tiene valores máximo y mínimo absolutos. Esto lo expresamos en el siguiente resultado que llamaremos el *teorema sobre los valores máximo y mínimo absolutos de una función*.

Teorema. *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua, entonces* f *tiene máximo y mínimo absolutos. Es decir existen* $x_0, x_1 \in [a,b]$ *tales que* $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$ *para todo* $x \in [a,b]$.

Obsérvese que las dos condiciones sobre f son:

- La función f es continua.
- El dominio de f es un intervalo cerrado.

En los ejemplos vistos al inicio de la sección faltó que la función considerada tuviera por dominio un intervalo cerrado. La función que tiene la Figura 7.33 cumple que su dominio es un intervalo cerrado, pero no es una función continua y no alcanza un valor máximo.

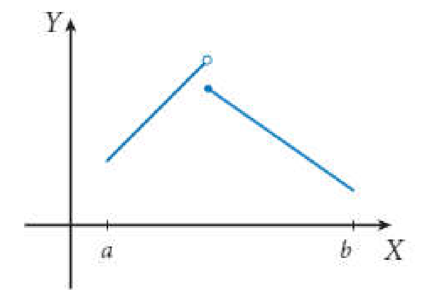


Figura 7.33

Las condiciones sobre f en el teorema sobre los valores máximo y mínimo absolutos de una función, son suficientes para que una función f tenga máximo y mínimo absolutos, pero no son necesarias, por ejemplo la función cuya gráfica aparece en la Figura 7.34, no es continua ni está definida en un intervalo cerrado, pero si alcanza un valor máximo absoluto M en c y un valor mínimo absoluto m en d.

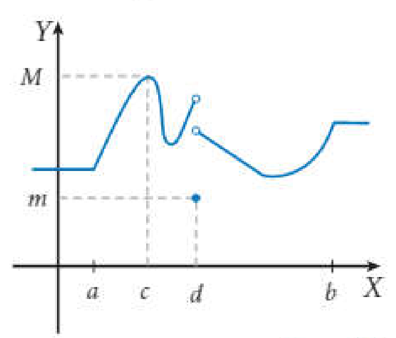


Figura 7.34

Advertimos que en los problemas de la sección "Problemas de máximos y mínimos" que aparece más adelante, siempre existen los valores máximo o mínimo que se pide determinar.

Problemas

Planteamiento

El área de un cierto rectángulo de lados x y y es igual a 9. Escribir el perímetro del rectángulo como una función de x.

Solución:

Perímetro:	$P = 2x + 2y$
Área:	$A = yx$

El perímetro de un rectángulo de lados x y y es:

$$P = 2x + 2y. \tag{7.5}$$

Como el área del rectángulo es;

$$A = xy$$

y sabemos que es igual a 9 entonces:

$$9 = xy.$$

Despejando y tenemos:

$$y = \frac{9}{x}.$$

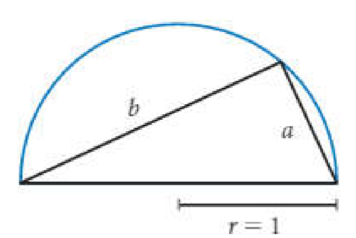
Sustituyendo el valor de y en (7.5) tenemos que la función buscada es;

$$P(x) = 2x + 2\left(\frac{9}{x}\right).$$

Los problemas de máximos y mínimos que abordaremos más adelante presentan situaciones como la del ejemplo introductorio. En todos los casos, a partir de los datos del problema se obtendrá una función, digamos f, la cual se desea optimizar. Para resolver el problema, es necesario escribir a f como función de una sola variable, por lo que debemos buscar relaciones entre las variables y escribir todas en términos de una de ellas.

Ejemplos

1. Un triángulo rectángulo de catetos a y b está inscrito en un semicírculo de radio $r = 1$. Así, su hipotenusa es el diámetro del semicírculo. Escribir el área del triángulo en función de a.



	Triángulo	Círculo
Área:	$A = \frac{1}{2}ab$	$A = \pi r^2$
Perímetro:	$P = a + b + 2r$	$P = 2\pi r$
Pitágoras:	$(2r)^2 = a^2 + b^2$	

Puesto que en el problema se pide escribir el área del triángulo en función del lado a, de las fórmulas anteriores elegimos la que tiene que ver con el área del triángulo.

En el triángulo tomamos a a como base. Como el triángulo es rectángulo, b es la altura correspondiente. Entonces el área es;

$$A = \frac{1}{2}ab.$$

Como hay dos variables, expresaremos a una en términos de la otra. Para ello usamos que la hipotenusa del triángulo mide $2r$, es decir, 2 y que por el teorema de Pitágoras sabemos:

$$a^2 + b^2 = (2r)^2 = 2^2.$$

Despejando b tenemos:

$$b^2 = 4 - a^2$$

$$b = \pm\sqrt{4 - a^2}$$

como b es una longitud, entonces

$$b=\sqrt{4-a^2} \tag{7.6}$$

Por lo que el área del triángulo se expresa en función de a como;

$$A(a)=\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}.$$

2. Si x y y son tales que $x+y=6$, escribir su producto como función de x.

Solución:
Como queremos encontrar el producto de x y y entonces la función que buscamos es

$$f(x)=xy$$

pero ésta depende de dos variables: x y y. Entonces escribimos a y en términos de x. Como sabemos que $x+y=6$ entonces

$$y=6-x.$$

Sustituyendo el valor de y en (7.6) tenemos que la función buscada es:

$$f(x)=x(6-x)$$

3. Un fabricante sabe que puede vender x artículos por semana a un precio de p pesos cada uno, donde x y p están relacionados, debido a las reglas de la demanda, por la fórmula $x+2p=200$. El costo de producción de x unidades es $C(x)=0.04x^2+3x+100$ y el ingreso por la venta de x unidades es $I(x)=-0.2x^2+35x$. Escribe la utilidad o ganancia $U(x)$ como función del precio.

Solución:

Ingreso:	$I(x)=-0.2x^2+35x$
Costo:	$C(x)=0.04x^2+3x+100$
Utilidad:	$U(x)=I(x)-C(x)$

Como la utilidad se encuentra restando el costo del ingreso, tenemos que

$$\begin{aligned} U(x)&=I(x)-C(x)\\ &=-0.2x^2+35x-\left(0.04x^2+3x+100\right). \end{aligned}$$

O sea,

$$U(x)=-0.24x^2+32x-100.$$

En la fórmula anterior la ganancia está en función de la cantidad de artículos vendidos. Para escribirla como función del precio despejamos x de la fórmula que se nos dio: $x+2p=200$,

$$x=200-2p.$$

Ahora sustituimos este valor en la función U:

$$\begin{aligned}U(200-2p)&=-0.24(200-2p)^2+32(200-2p)-100\\&=-0.24\left(40\,000-800p+4p^2\right)+6\,400-64p-100\\&=-9\,600+192p-0.96p^2+6\,400-64p-100\\&=-0.96p^2+128p-3\,300,\end{aligned}$$

y al resultado lo llamamos $G(p)$; o sea,

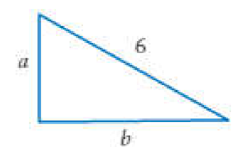
$$G(p)=-0.96p^2+128p-3\,300.$$

Ésta es la utilidad o ganancia como función del precio p.

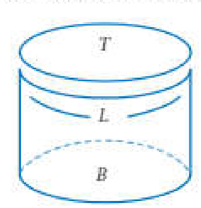
Ejemplos

Ejercicios

1. El producto de los números x y y es igual a 16. Escribe la suma del cuadrado de x, más y como función de x.
2. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos a y b mide 6 cm. Escribe el área del triángulo como función del cateto b.



3. Se va a construir un tinaco cilíndrico con capacidad de 5 m^3. El costo del tinaco incluye la base (B), el área lateral (L) y la tapa (T). El costo por metro cuadrado de la base y el área lateral es de \$500 y el costo de la tapa es el triple del costo de la base. Escribe la función del costo total del tinaco en función del radio de la base.



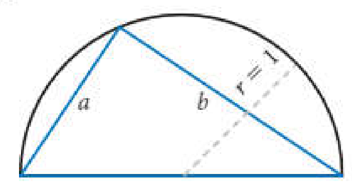
	Cilindro circular radio r y altura h
Área lateral:	$2\pi rh$
Área base:	πr^2
Volumen:	$\pi r^2 h$

4. Un alambre de 70 cm se dobla formando un ángulo recto. Describe la distancia entre los extremos del alambre como función de uno de los lados.
5. El costo de producir un artículo es de 15 pesos. Al precio x, se venden $\frac{1}{x^2}$ artículos. Escribe la función que determina la utilidad de esta venta en función del precio. Recuerda que la utilidad se calcula restando al total del monto obtenido por la venta el costo.
6. Al conectar en serie dos resistencias R_1 y R_2, la resistencia total R_T es de 75 ohms. Escribe la resistencia total R_T obtenida al conectar las resistencias en paralelo, en función de R_1. Recuerda que si R_1 y R_2 se conectan en serie, entonces $R_T=R_1+R_2$ y si se conectan en paralelo, entonces $\frac{1}{R_T}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.

Problemas de máximos y mínimos

Encontrar el triángulo rectángulo de área máxima cuyos catetos son a y b, y que está inscrito en un semicírculo de radio $r=1$.

Solución:



Área:	$A=\frac{1}{2}ab$
Pitágoras:	$c^2=a^2+b^2$

En el ejemplo 1 de la página 229, escribimos la función en la variable a que determina el área del triángulo:

$$A(a)=\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}.$$

Debemos encontrar el valor máximo de la función $A(a)$.
Calculamos la derivada:

$$\begin{aligned}A'(a)&=\left(\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}\right)'\\&=\left(\frac{1}{2}a\right)'\sqrt{4-a^2}+\frac{1}{2}a\left(\sqrt{4-a^2}\right)'\\&=\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}+\frac{1}{2}a\left(\frac{-2a}{2\sqrt{4-a^2}}\right)\\&=\frac{\sqrt{4-a^2}\sqrt{4-a^2}-a^2}{2\sqrt{4-a^2}}\\&=\frac{4-a^2-a^2}{2\sqrt{4-a^2}}\\&=\frac{4-2a^2}{2\sqrt{4-a^2}}\\&=\frac{2-a^2}{\sqrt{4-a^2}}.\end{aligned}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$\begin{aligned}\frac{2-a^2}{\sqrt{4-a^2}}&=0\\2-a^2&=0\\a^2&=2\\a&=\pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

como a es una longitud, entonces $a=\sqrt{2}$.

Calculamos la segunda derivada:

$$A''(a)=\left(\frac{2-a^2}{\sqrt{4-a^2}}\right)'$$

$$=\frac{\left(2-a^2\right)'\sqrt{4-a^2}-\left(\sqrt{4-a^2}\right)'\left(2-a^2\right)}{\left(\sqrt{4-a^2}\right)^2}$$

$$=\frac{-2a\sqrt{4-a^2}-\dfrac{-2a}{2\sqrt{4-a^2}}\left(2-a^2\right)}{\left(\sqrt{4-a^2}\right)^2}$$

$$=\frac{-2a\sqrt{4-a^2}+\dfrac{a\left(2-a^2\right)}{\sqrt{4-a^2}}}{\left(\sqrt{4-a^2}\right)^2}$$

$$=\frac{-2a\left(4-a^2\right)+a\left(2-a^2\right)}{\sqrt{4-a^2}\left(\sqrt{4-a^2}\right)^2}$$

$$=\frac{-6a+a^3}{\left(\sqrt{4-a^2}\right)^3}.$$

Evaluamos la segunda derivada en $a=\sqrt{2}$:

$$A''\left(\sqrt{2}\right)=\frac{-6\left(\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}\right)^3}{\left(\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}\right)^3}$$

$$=\frac{-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^3}$$

$$=-2<0$$

entonces A tiene un máximo en $a=\sqrt{2}$.
Para saber cuánto mide b, sustituimos el valor de a en (7.6):

$$b=\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, el triángulo rectángulo de mayor área es isósceles. El área máxima es:

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2}=1.$$

TIP

Para resolver un problema de máximos y mínimos realizamos los siguientes pasos:

1. Leer detenidamente el problema.
2. Escribir todos los datos.
3. Plantear una función.
4. Escribir la función en términos de una sola variable utilizando las condiciones del problema.
5. Aplicar los criterios para encontrar máximos y mínimos.

Ejemplos

1. Con una cartulina rectangular de 40×15 cm se quiere construir una caja abierta cortando en cada esquina un cuadrado de lado x y doblando los lados hacia arriba. Encontrar el valor x para el cual el volumen de la caja es máximo.

Solución:
Los lados de la cartulina, después de cortar las esquinas, miden $40-2x$ y $15-2x$. Puesto que la altura de la caja será igual al lado x del cuadrado (ver Figura 7.35), entonces el volumen es:

$$\begin{aligned} V &= \text{área de la base} \times \text{altura} \\ &= (40-2x)(15-2x)x \\ &= 4x^3-110x^2+600x, \end{aligned}$$

es decir, el problema es encontrar el valor de x donde esta función alcanza el valor máximo.

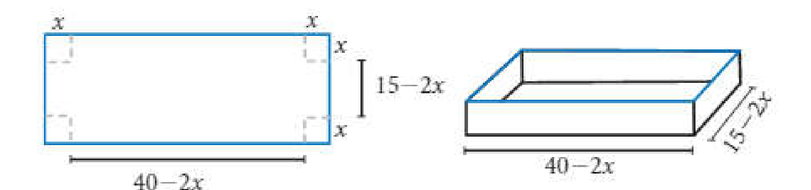


Figura 7.35

Consideramos;

$$V(x)=4x^3-110x^2+600x.$$

Encontramos la primera derivada de esta función:

$$\begin{aligned} V'(x) &= 4(3x^2)-110(2x)+600 \\ &= 12x^2-220x+600. \end{aligned}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$12x^2-220x+600=0$$

$$3x^2-55x+150=0$$

$$x=\frac{55\pm\sqrt{(-55)^2-4(3)(150)}}{2(3)}$$

$$x=\frac{55\pm\sqrt{1\,225}}{6}$$

$$x=\frac{55\pm35}{6},$$

de donde;

$$x=\frac{55+35}{6}=15 \quad \text{o} \quad x=\frac{55-35}{6}=\frac{10}{3}$$

De estas dos soluciones, descartamos $x=15$ porque en nuestra cartulina no podemos cortar en cada esquina un cuadrado de lado 15 cm. Así, $x=\dfrac{10}{3}$ es nuestro único candidato.

Ahora calculamos la segunda derivada:

$$\begin{aligned} V''(x) &= 12(2x)-220 \\ &= 24x-220. \end{aligned}$$

Evaluando la segunda derivada en $x=\dfrac{10}{3}$ tenemos:

$$V''\left(\frac{10}{3}\right)=24\left(\frac{10}{3}\right)-220=-140<0.$$

De donde la función V tiene un máximo en $x=\dfrac{10}{3}$, es decir, la caja de volumen máximo se obtiene al cortar un cuadrado de $\dfrac{10}{3}$ cm de lado.

2. Encuentra las dimensiones del cilindro circular recto de mayor área lateral que puede inscribirse en un cono de altura 15 cm y radio de la base igual a 8 cm.

Solución:

	Cilindro	Cono
Área lateral:	$A=2\pi rh$	$A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$
Volumen:	$V=\pi r^2h$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$

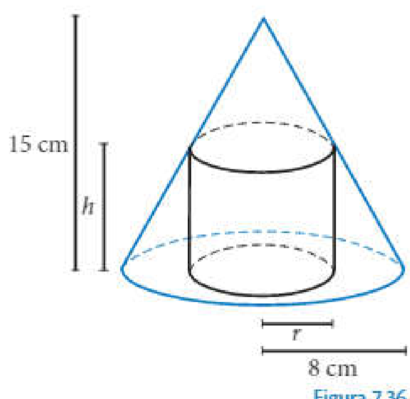
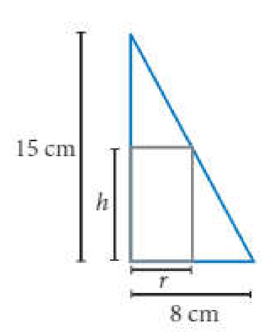


Figura 7.36

Las bases del cono y el cilindro tienen el mismo centro y la recta que une el vértice del cono con la base es perpendicular a ésta, (ver Figura 7.36).

Llamamos h a la altura del cilindro y r a su radio. Haciendo un corte vertical que pase por el vértice del cono, (ver Figura 7.37), tenemos:



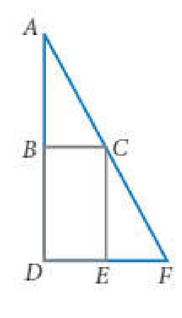


Figura 7.37

El área lateral del cilindro se calcula como:

$$A=2\pi rh \tag{7.7}$$

Usando la figura, observamos que $EF = DF - DE$ y que los triángulos ADF y CEF son semejantes. Entonces:

$$\frac{AD}{DF} = \frac{CE}{EF} = \frac{CE}{DF - DE}.$$

Como $AD = 15, DE = r, CE = h, DF = 8,$ obtenemos:

$$\frac{15}{8} = \frac{h}{8 - r}.$$

Al despejar h tenemos;

$$h = \frac{15}{8}(8 - r). \tag{7.8}$$

Sustituimos este valor en la fórmula (7.7):

$$\begin{aligned} A &= 2\pi rh \\ &= 2\pi r\left(\frac{15}{8}(8 - r)\right) \\ &= \frac{15}{8}(2\pi)\big(r(8 - r)\big) \\ &= \frac{15}{4}\pi\left(8r - r^2\right). \end{aligned}$$

Así, la función que debemos maximizar es $A(r) = \frac{15}{4}\pi\left(8r - r^2\right)$. Calculamos la primera derivada:

$$A'(r) = \frac{15}{4}\pi(8 - 2r).$$

Igualamos la primera derivada a cero: $A'(r) = 0$; o sea,

$$\begin{aligned} \frac{15}{4}\pi(8 - 2r) &= 0 \\ 8 - 2r &= 0 \\ r &= 4. \end{aligned}$$

Calculamos la segunda derivada:

$$A''(r) = \frac{15}{4}\pi(-2)$$

y la evaluamos en $r = 4$:

$$A''(4) = -\frac{15}{2}\pi < 0.$$

Entonces en $r = 4$ hay un máximo.

Sustituimos $r = 4$ en la fórmula (7.8):

$$\begin{aligned} h &= \frac{15}{8}(8-r) \\ &= \frac{15}{8}(8-4) \\ &= \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las dimensiones del cilindro de área lateral máxima inscrito en el cono dado son $r = 4$, $h = \frac{15}{2}$ y el área lateral máxima es;

$$A = 2\pi(4)\left(\frac{15}{2}\right) = 60\pi.$$

Observa que el radio y la altura del cilindro encontrado son la mitad de los correspondientes del cono.

Ejemplos

Ejercicios

1. Un niño lanza una pelota hacia arriba, verticalmente. La relación entre la altura y el tiempo t transcurrido desde el lanzamiento está dada por la ecuación $h(t) = 12t - 4.9t^2$. Donde t se mide en segundos y la distancia en metros.
   a. ¿Cuál es la altura máxima que puede alcanzar la pelota?
   b. ¿Cuántos segundos después del lanzamiento alcanza la pelota la altura máxima?
2. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 80 y cuyo producto sea máximo.
3. Supongamos que a_1, a_2, a_3, a_4 son 4 números fijos. Para cada x calculamos el cuadrado de la distancia de x a cada uno de esos puntos y sumamos los resultados así obtenidos:

$$(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + (x-a_3)^2 + (x-a_4)^2$$

   ¿Para qué x se obtiene el valor mínimo?
4. El área de un rectángulo de lados x y y es igual a 9. Encuentra los valores de x y y para que el perímetro sea mínimo.
5. Encuentra un número positivo tal que el doble de dicho número más 18 veces su recíproco sea mínimo.
6. Encuentra dos números a y b cuyo producto sea 4 y cuya media armónica sea máxima. La *media armónica* de a y b se define como $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.
7. Encuentra dos números a y b tales que su suma sea 20 y su *media geométrica* sea máxima. La media geométrica de a y b se define como $\sqrt{ab}$.

8. Considera todos los rectángulos de área igual a $144\ \text{cm}^2$. Encuentra las dimensiones del rectángulo que tenga perímetro mínimo.
9. Encontrar el perímetro máximo que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 2.
10. Considera la parábola $y=4-\frac{1}{3}x^2$ y un rectángulo inscrito en ella cuya base se encuentra sobre el eje X. Encuentra las dimensiones del rectángulo de mayor área que satisface las condiciones anteriores.
11. Encuentra el punto de la parábola $y=-\frac{x^2}{4}$ más cercano al punto $(1,-2)$. Recuerda que la distancia entre dos puntos (x,y) y (a,b) es $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.
12. Considera las rectas $y=-x+1$ y $y=x+1$. Considera los rectángulos que pueden inscribirse en el triángulo formado por las dos rectas y el eje X, de manera que uno de los lados esté sobre el eje X. Encuentra las dimensiones del rectángulo de mayor área.
13. Encuentra la medida de los lados del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en el círculo $x^2+y^2=9$.
14. Con una cartulina cuadrada de 60×60 cm se quiere construir una caja abierta cortando en cada esquina un cuadrado y doblando los lados hacia arriba. Encontrar el lado del cuadrado que debe cortarse para que el volumen de la caja sea máximo.
15. Considera el punto $P(1,3)$ y traza una recta que pase por P y corte a los semiejes positivos X y Y en $Q(a,0)$ y $R(0,b)$, respectivamente. Encuentra la ecuación de la recta que haga que el área del triángulo con vértices Q, R y el origen, sea lo más pequeña posible.
16. Se quiere imprimir un volante rectangular cuya área de impresión debe ser de $540\ \text{cm}^2$ dejando un margen superior de 3 cm, inferior de 2 cm, izquierdo de 2 cm y derecho de 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del volante para que éste tenga área mínima?
17. Una empresa solicita a una maquiladora que le fabrique cajas sin tapa de base cuadrada con capacidad de $4000\ \text{cm}^3$. La maquiladora sabe que el metro cuadrado de material tiene un costo de 2.50 pesos.
    a. ¿Qué dimensiones tendrá cada caja, para que se emplee la menor cantidad de material?
    b. ¿Cuál sería el costo neto de material por cada caja para la maquiladora?
18. Encuentra las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en un cono de altura 12 cm y radio de la base igual a 5 cm.
19. Encuentra las dimensiones del cono circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio 9 cm.
20. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la elipse $2x^2+3y^2=18$ y que tiene sus lados paralelos a los ejes de esa elipse?

	Esfera	Cono
Área lateral	$A=4\pi r^2$	$A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$
Volumen	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Ejercicios

Mundo virtual

En esta sección te invitamos a visitar varios sitios que contienen material relacionado con los conceptos de máximos y mínimos. Algo de ese material está desarrollado por los autores de este libro, pero mucho más ha sido desarrollado por personas de todo el mundo que tienen interés en las matemáticas.

- http://atenea.matem.unam.mx Éste es un sitio del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en el cual los investigadores del Instituto están creando material para cursos en línea. Puedes entrar como invitado sin necesidad de registrarte. Una vez dentro del sitio, elige la categoría "Cálculo diferencial e integral", dentro de ella, el curso "Cálculo I" y entra a las lecciones de la sección "Máximos y mínimos".
- http://newton.matem.unam.mx/arquimedes En este sitio hay muchos interactivos de matemáticas para bachillerato, que explican cómo resolver problemas muy puntuales. Revisa los que corresponden a Cálculo diferencial e integral, en particular, los que corresponden a derivadas y a aplicaciones de la derivada.
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web Sitio del Ministerio de Educación, Salud y Deporte del Gobierno español que contiene unidades didácticas y recursos interactivos desarrollados con la herramienta Descartes. Estos materiales fueron elaborados por profesores de enseñanza media. Selecciona "Aplicaciones", y luego "Análisis", encontrarás varias lecciones relativas al tema de máximos y mínimos que estudiaste en esta unidad.
- http://es.wikipedia.org La enciclopedia en línea Wikipedia es uno de los sitios de referencia para encontrar información relacionada con la ciencia y la cultura. En el buscador escribe: Extremos de una función. Hojea el documento para ampliar los temas vistos en esta unidad, en particular, la historia de la derivada.
- http://newton.matem.unam.mx/geolab En este sitio puedes descargar el programa Geolab y el curso para aprender a utilizarlo. En las secciones de Mundo virtual te guiaremos para realizar algunas construcciones relacionadas con los temas de este libro.

Construcciones con Geolab

Geolab no es un programa de cálculo simbólico, por lo que no sabe calcular la derivada de una función, pero sí puede dibujar funciones de manera que puedes comprobar que los máximos o mínimos que obtengas mediante el cálculo diferencial sean correctos.

Recuerda que si f es una función real, la ecuación de la recta tangente a la gráfica en un punto $(a, f(a))$ es;

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

Que escrita en la forma general es;

$$f'(a)x - y + \left(f(a) - af'(a)\right) = 0 \qquad (7.9)$$

1. Construye la función $f(x)=x^3$ usando el constructor **Gráfica de función** en el menú **Define funciones**. Llena los parámetros de la función como

$$\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= 1 \\ y &= t_\wedge 3 \\ pasos &= 100 \end{aligned}$$

Ahora construye la recta tangente a la gráfica en $(0,0^3)$ usando el constructor **Calculada** del menú **Define rectas**. Como $f'(x)=3x^2$ entonces $f'(0)=0,$ así que los coeficientes de la ecuación general (7.9) son

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= -1 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

La recta tangente es horizontal, pero la función no tiene máximo ni mínimo en 0.

2. Repite la construcción anterior con la función $f(x)=x^3+6x^2$ y la recta tangente en $(-4,f(-4))=(-4,32)$. Como la derivada de f es $f'(x)=3x^2+12x,$ entonces $f'(-4)=0,$ así que los coeficientes de la ecuación general (7.9) son

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= -1 \\ C &= 32 \end{aligned}$$

y comprueba que esta recta es tangente a la gráfica de f en $(-4,32)$ y es horizontal.

Seguramente necesitarás hacer zoom hacia afuera para poder ver el punto $(-4,32)$. Utiliza el menú **Define datos de ventana** para ello, o teclea Ctrl-O para hacer el zoom.

Resumen de la unidad

1. Si $f'(x)\geq 0$ para todo $x\in(a,b)$ entonces f es creciente en (a,b).
2. Si $f'(x)\leq 0$ para todo $x\in(a,b)$ entonces f es decreciente en (a,b).
3. Supongamos que f es una función cuya derivada f' es distinta de cero en (a,b):
   - Si además $f'(c)>0$ en algún punto $c\in(a,b)$, entonces f es creciente en (a,b).
   - Si además $f'(c)<0$ en algún punto $c\in(a,b)$, entonces f es decreciente en (a,b).

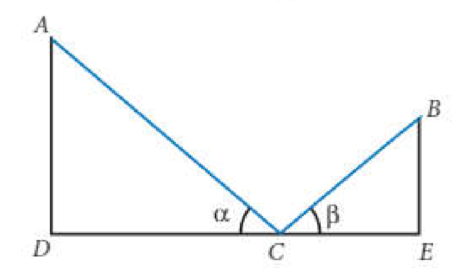
4. Supongamos que f es creciente en un intervalo abierto (a,b):
   - Si además f es continua en a, entonces f es creciente en $[a,b)$.
   - Si además f es continua en b, entonces f es creciente en $(a,b]$.
   - Si además f es continua en a y b, entonces f es creciente en $[a,b]$.
5. Supongamos que f es decreciente en un intervalo abierto (a,b):
   - Si además f es continua en a, entonces f es decreciente en $[a,b)$.
   - Si además f es continua en b, entonces f es decreciente en $(a,b]$.
   - Si además f es continua en a y b, entonces f es decreciente en $[a,b]$.
6. Un punto c del dominio de una función f es llamado un punto crítico de f si $f'(c)=0$ o bien no existe.
7. *Criterio de la primera derivada:* Si f es una función continua en (a,b) y derivable en (a,b) , excepto tal vez en $c\in(a,b)$ y c es un punto crítico de f entonces:
   - Si $f'(x)\geq 0$ para todo $x\in(a,c)$ y $f'(x)\leq 0$ para todo $x\in(c,b)$, entonces f alcanza un máximo en c.
   - Si $f'(x)\leq 0$ para todo $x\in(a,c)$ y $f'(x)\geq 0$ para todo $x\in(c,b)$, entonces f alcanza un mínimo en c.
   - Si f' no cambia de signo, entonces f no alcanza máximo ni mínimo en c.
8. *Criterio de la segunda derivada:* Si f es una función con segunda derivada en un intervalo (a,b) y $c\in(a,b)$, entonces:
   - $f'(c)=0$ y $f''(c)<0$ implica que f alcanza un máximo en c.
   - $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$ implica que f alcanza un mínimo en c.
9. Una función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene mínimo absoluto si $a>0$ y tiene máximo absoluto si $a<0$. Alcanza el valor respectivo en $x=-\dfrac{b}{2a}$.
10. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, entonces f tiene máximo y mínimo absolutos.

Ejercicios de repaso

Encuentra en cada caso los máximos y mínimos de la función.

1. $f(x)=(x-2)^3(x+1)^2$
2. $f(x)=x(x-1)^2(x+2)^2$
3. $f(x)=2x^3-15x^2+24x$
4. $f(x)=\dfrac{(x-5)^2(x+2)^2}{10}$
5. $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{10}{3}x^3+9x$
6. $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

7. Un alambre de 70 cm se dobla formando un ángulo recto. Encuentra las longitudes de los lados para que la distancia entre los extremos del alambre sea mínima.
8. En la figura siguiente, la distancia DE es igual a 10 metros, la distancia AD es igual a 5 metros y la distancia BE es igual a 3 metros. Mostrar que para que la suma de las distancias AC más CB sea mínima el punto C debe colocarse de manera que los ángulos α y β sean iguales.



Para ello sigue los pasos que a continuación se indican:

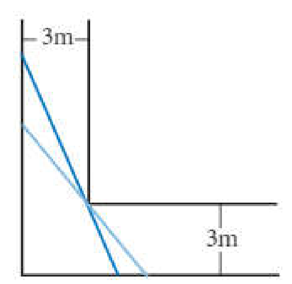
a. Llama $x = DC$ y escribe CE en términos de DE y x.
b. Usa el teorema de Pitágoras para escribir la longitud $d(x) = AC + CB$ en función de x.
c. Escribe $\tan\alpha$ y $\tan\beta$ en términos de los catetos de los triángulos ADC y BCE respectivamente.
d. Encuentra $d'(x)$ y muestra que si $\tan\alpha = \tan\beta$ entonces $d'(x) = 0$.
e. Calcula la segunda derivada y muestra que en el punto encontrado se alcanza el valor mínimo.

9. Con una cartulina rectangular de 60×30 cm se quiere construir una caja abierta cortando en cada esquina un cuadrado y doblando los lados hacia arriba. Encontrar el lado del cuadrado que debe cortarse para que el volumen de la caja sea máximo.
10. Encuentra dos números a y b tales que su suma sea 5 y cuya media armónica sea máxima. Ver la definición de media armónica en el ejercicio 6 de la página 237.
11. Encuentra dos números a y b tales que la suma de uno más el doble del otro sea 6 y su media geométrica sea máxima. Ver la definición de media geométrica en el ejercicio 7 de la página 237.
12. Encontrar el rectángulo de mayor área de manera que uno de sus lados está sobre el eje X y dos de sus vértices están sobre la curva $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.
13. Encontrar el triángulo rectángulo de mayor área que se puede inscribir en el semicírculo superior con centro en el origen y radio 1 de tal manera que uno de los lados del triángulo se encuentra sobre el eje X y otro es paralelo al eje Y.
14. Si dos pasillos de 3 metros de ancho cada uno se encuentran formando una esquina como se muestra en la figura. ¿Cuánto mide la varilla más larga que puede pasar de un pasillo al otro de manera horizontal?

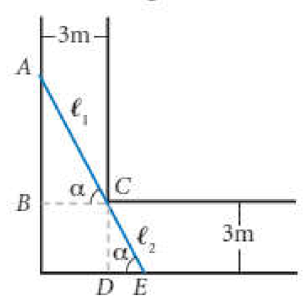
Sugerencias:

a. Consideraremos la varilla como un segmento de recta. Nos interesan los segmentos que tocan la pared externa de cada pasillo y el vértice interno de ambos, como se indica en la figura. De todos los segmentos que cumplen lo

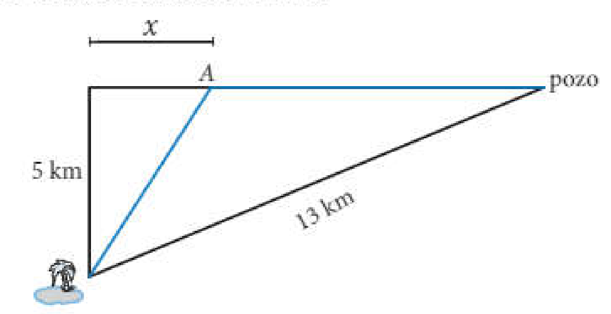
anterior debemos elegir el de menor longitud para garantizar que la varilla que le corresponde pueda dar la vuelta.



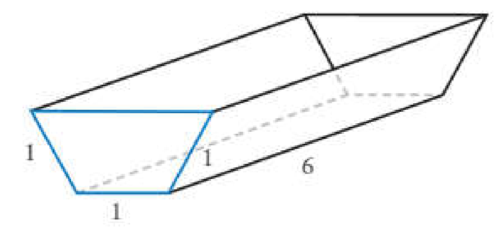
b. Considera las longitudes de los segmentos AC y CE. Escribe cada una de las longitudes en términos del ángulo α.

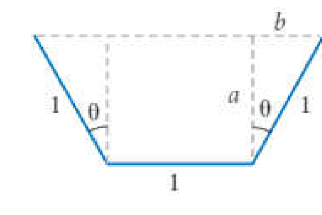


15. Se quiere llevar agua potable de un pozo que se encuentra a la orilla del mar a una isla que está a 13 km de distancia del pozo. El costo de tubería por kilómetro bajo el mar es 3 veces el costo de kilómetro por tierra. La tubería irá desde la isla a un punto A en la costa y luego por tierra hasta el pozo. La distancia entre la isla y la costa es de 5 km. ¿Dónde debe estar colocado el punto A para que el costo de la tubería sea mínimo?



16. Con una lámina de 3×6 m se quiere hacer una canaleta como en la figura. Encontrar el valor de θ que hace que el volumen sea máximo.





Autoevaluación

1. Los intervalos de monotonía de la función $f(x)=x^2-16x+6$ son:
   a. f crece en $(-\infty,8]$ y decrece en $[8,\infty)$
   b. f decrece en $(-\infty,-58]$ y crece en $[-58,\infty)$
   c. f crece en $(-\infty,-58]$ y decrece en $[-58,\infty)$
   d. f decrece en $(-\infty,8]$ y crece en $[8,\infty)$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 209, 210 y 211.

2. La función $f(x)=-4x^2+6x-3$ es decreciente en el intervalo:
   a. $\left[-\frac{3}{4},\infty\right)$ c. $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right]$
   b. $\left[\frac{3}{4},\infty\right)$ d. $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 209, 210 y 211.

3. La función $f(x)=\frac{4x+8}{x^2+5x+7}$:
   a. Es decreciente en $(-\infty,-3)$ y $(-1,\infty)$; creciente en $(-3,-1)$
   b. Es creciente en $(-\infty,-3)$ y $(-1,\infty)$; decreciente en $(-3,-1)$
   c. Es decreciente en $(-\infty,-3)$ y $(-3,-1)$; creciente en $(-1,\infty)$
   d. Es creciente en $(-\infty,-3)$ y $(-3,-1)$; decreciente en $(-1,\infty)$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 209, 210 y 211.

4. La función $f(x)=\frac{x^2-27}{x-6}$:
   a. Es creciente en $(-\infty,3)$ y $(9,\infty)$ y decreciente en $(3,9)$.
   b. Es creciente en $(-\infty,-9)$ y decreciente en $(-3,6)$ y $(6,9)$.
   c. Es creciente en $(-\infty,3)$ y $(6,\infty)$ y decreciente en $(3,6)$.
   d. Es creciente en $(-\infty,3)$ y $(9,\infty)$ y decreciente en $(3,6)$ y $(6,9)$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 209, 210 y 211.

5. La función $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$ tiene:
   a. Un máximo en $x=-3$ y un mínimo en $x=1$.
   b. Mínimos en $x=-1$ y $x=3$.
   c. No tiene máximos ni mínimos.
   d. Un máximo en $x=-1$ y un mínimo en $x=3$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 215, 217 y 220.

6. La función $f(x)=\frac{x^2-5}{x(x+2)}$ tiene un mínimo en:
   a. No tiene mínimo. c. $x=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$
   b. $x=-\sqrt{5}$ d. $x=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 215, 217 y 220.

7. La función $f(x)=\frac{x^2-1}{x(x-1)}$ tiene un máximo en:
   a. $x=0$
   b. No tiene máximo.
   c. La función es constante, entonces todos los puntos del dominio son máximos.
   d. $x=1$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 215, 217 y 220.

8. ¿Cuál es la segunda derivada de la función $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$?
   a. $\frac{-x^2+2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$ c. $\frac{-3x^3-2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
   b. $\frac{x^3+2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ d. $\frac{5x^2+2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 166 y 173.

9. Encontrar dos números enteros tales que su diferencia es igual a 48 y su producto es máximo son:
   a. $x=80$ y $y=-32$ c. $x=32$ y $y=80$
   b. $x=-32$ y $y=-80$ d. $x=32$ y $y=-80$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 232 subsecuentes.

Heteroevaluación

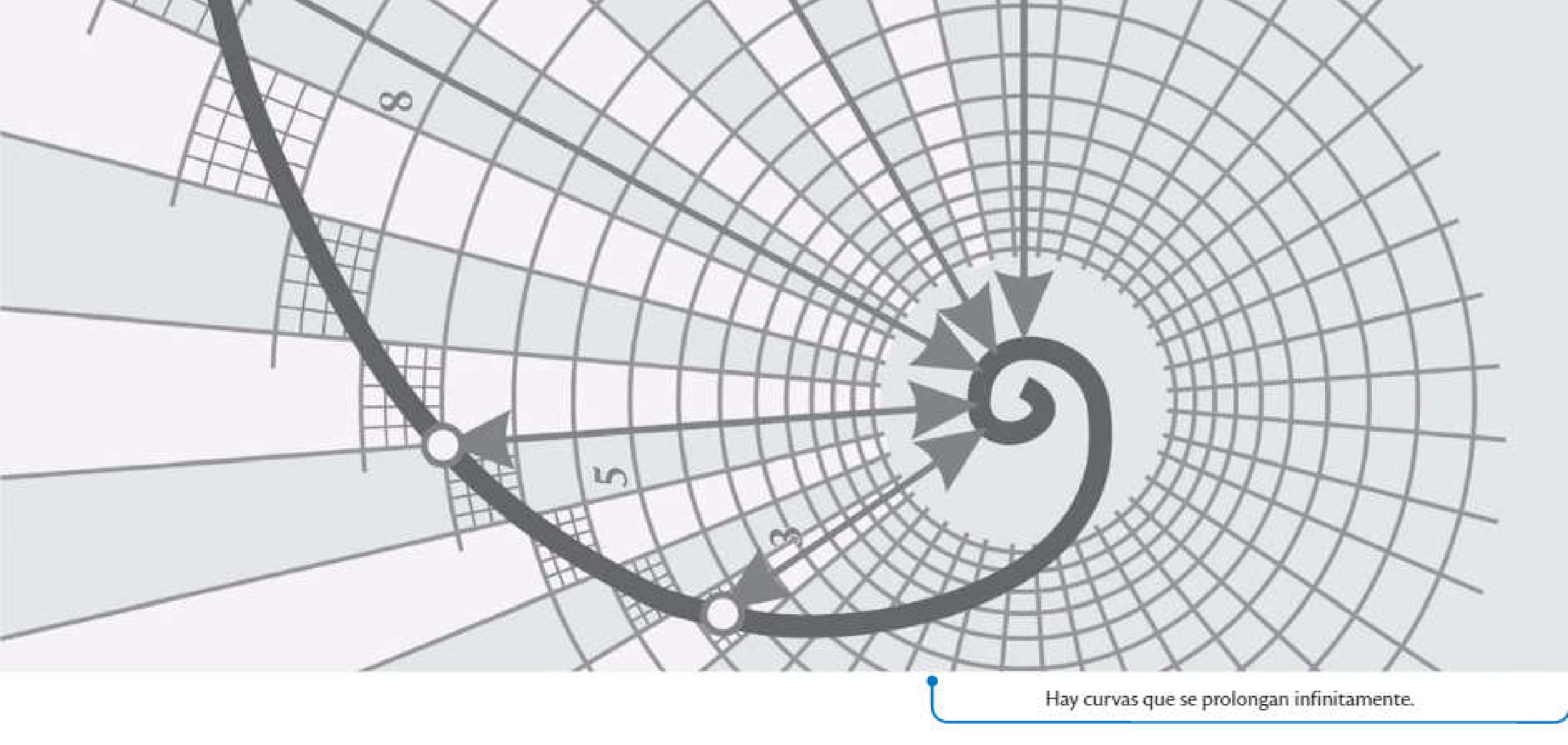
1. Encuentra los intervalos de monotonía de la función $f(x)=10x^3+7x^2-4x$.

2. Encuentra los intervalos de monotonía de la función $f(x)=3x^4-8x^3-48x^2+26$.

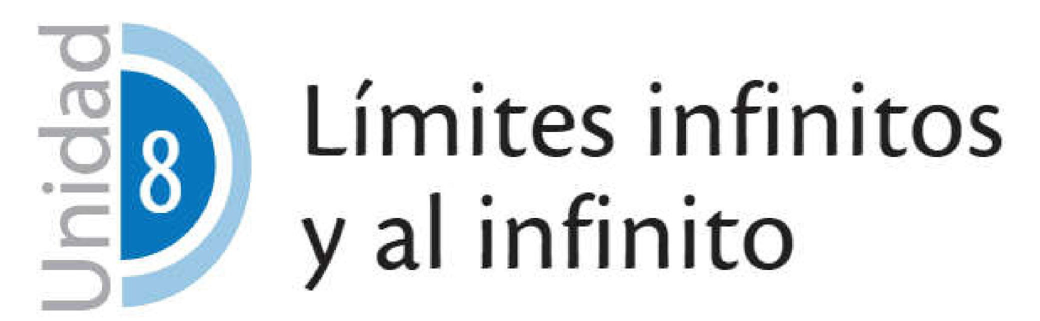
3. Encuentra los máximos y mínimos de la función $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$.

4. Encuentra los máximos y mínimos de la función $f(x)=\frac{x^2-1}{x(x-3)}$.

5. Encuentra los máximos y mínimos de la función $f(x)=\frac{4(x-1)(x+2)}{x^2-12}$.



Hay curvas que se prolongan infinitamente.



Unidad 8 Límites infinitos y al infinito

En la unidad de límites estudiamos el límite de una función cuando x tiende a un número x_0. En esta unidad se describe el comportamiento de la función cuando vemos que sus valores crecen o decrecen sin cota cuando x tiende a x_0.

En la vida cotidiana podrás encontrar el concepto de límites infinitos y al infinito en casos como:

Si una cantidad de dinero se deposita en un banco en un pagaré con una tasa de interés fija mayor que la tasa de inflación y los intereses se reinvierten de manera automática cada año; después de muchos años el pagaré puede valer incluso más que el propio banco.

Cuando un animal muere, la cantidad de carbono-14 que hay en sus restos empieza a disminuir y después de 5 730 años, por ejemplo, se reduce a la mitad de la que el animal tenía cuando estaba vivo. En un fósil de millones de años, la pequeñísima cantidad de carbono-14 que hay en él nos permite saber en qué época vivió. En todos estos ejemplos, lo que nos interesa es conocer el comportamiento de cierta función cuando la variable crece de manera indefinida.

Hay otras situaciones en las cuales el valor de una función crece de forma indefinida cuando la variable se aproxima a cierto valor. Por ejemplo, imaginemos un cilindro de plastilina que tiene un volumen de 1 dm^3. ¿Qué sucede con la altura del cilindro si lo amasamos de manera que su radio vaya siendo cada vez más chico? Si pudiéramos amasarlo de manera que el radio fuera igual al de un cabello, su altura sería increíblemente grande.

Estos tipos de situaciones se llaman, de manera genérica, límites infinitos, y es el tema que estudiaremos en esta unidad.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.

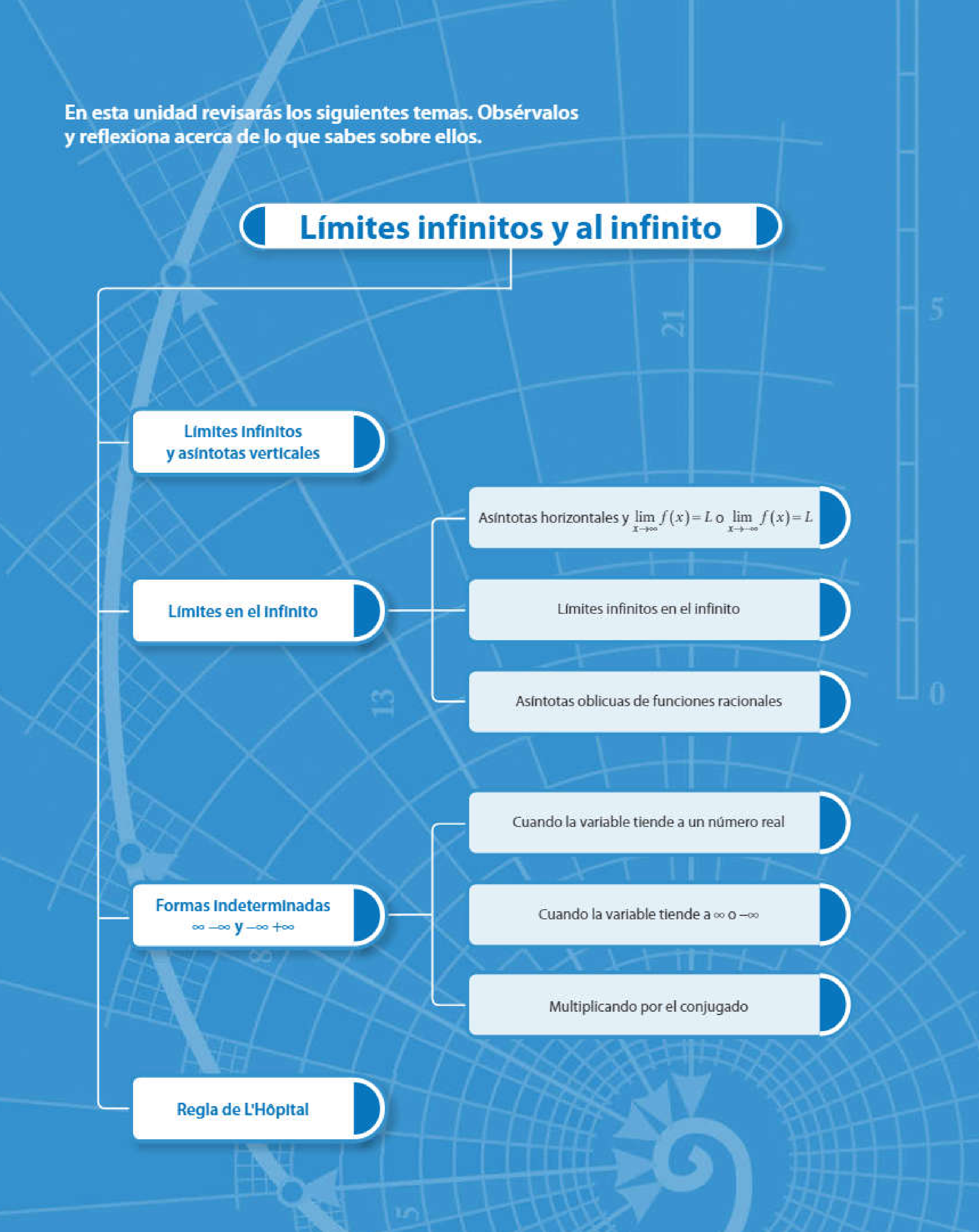


Tabla 8.1

x	$f(x)$
5.12	125
5.06	250
5.03	500
5.01	1 500
5.001	15 000
5.0001	150 000
5.00001	1 500 000

Tabla 8.2

x	$f(x)$
4.88	−125
4.94	−250
4.97	−500
4.99	−1 500
4.999	−15 000
4.9999	−150 000
4.99999	−1 500 000

Límites infinitos y asíntotas verticales

La función;

$$f(x)=\frac{15}{x-5}$$

no está definida en $x=5$, ya que para dicho valor el denominador es cero y por tanto, el cociente no está definido. Veamos el comportamiento de $f(x)$ cerca de este punto.

Observamos que conforme nos acercamos a $x=5$ por la derecha (Tabla 8.1), los valores de la función $\frac{15}{x-5}$ son cada vez más grandes, (Figura 8.1). Si nos acercamos a $x=5$ por la izquierda (Tabla 8.2), los valores de la función son negativos y de tamaño cada vez más grande.

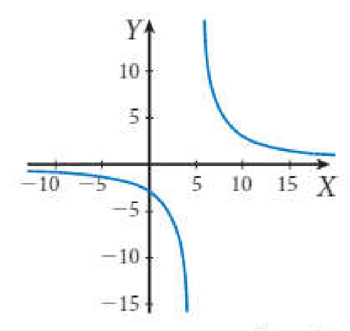


Figura 8.1

En el primer caso decimos que f tiende a infinito cuando x se aproxima a 5 por la derecha y escribimos

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{15}{x-5}=\infty$$

En el segundo, decimos que f tiende a menos infinito cuando x se aproxima a 5 por la izquierda y escribimos

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{15}{x-5}=-\infty$$

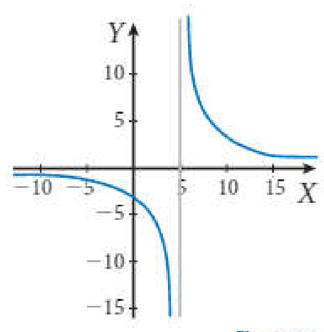


Figura 8.2

Entre más cerca está x de 5, la gráfica de $f(x)$ se parece más a la recta $x=5$. Cuando esto sucede, decimos que la recta $x=5$ es una asíntota de $f(x)$. Además, dicha recta es paralela al eje Y, entonces es una asíntota vertical de $f(x)$, (Figura 8.2).

Cuando tenemos una función $f(x)$ definida en un intervalo, excepto tal vez en el punto c decimos que f tiende a infinito cuando x tiende a c por la derecha, y escribimos

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\infty,$$

si a medida que nos aproximamos a c por la derecha, los valores de la función son cada vez más grandes (Figura 8.3), para este análisis no nos interesa qué sucede en el punto c.

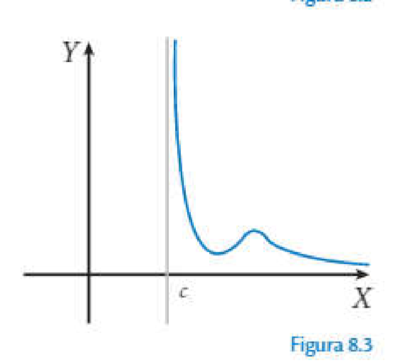


Figura 8.3

Análogamente, si al aproximarnos a c por la izquierda, los valores de la función son negativos y de tamaño cada vez más grande entonces decimos que f tiende a menos infinito cuando x tiende a c por la izquierda, (ver Figura 8.4) y escribimos:

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=-\infty$$

Es decir, no nos interesa qué sucede en el punto c.

De manera análoga definimos los conceptos correspondientes a:

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=-\infty \text{ y } \lim_{x\to c^-} f(x)=\infty$$

- Si $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$, entonces decimos que $f(x)$ tiende a ∞ cuando x tiende a c y escribimos $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$.
- Análogamente, escribimos $\lim\limits_{x\to c} f(x)=-\infty$ si $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c} f(x)=-\infty$ y en este caso decimos que $f(x)$ tiende a $-\infty$, cuando x tiende a c.

Algunos autores usan, en todos estos casos, la expresión "diverge a" en lugar de "tiende a" y otros dicen que el límite existe en sentido *impropio o generalizado*.

La recta $x=c$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de la función *f* si alguno de los límites laterales en *c* es $\pm\infty$; es decir; si cumple al menos una de las siguientes igualdades:

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to c^+} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to c} f(x)=\infty \text{ o } \lim_{x\to c} f(x)=-\infty.$$

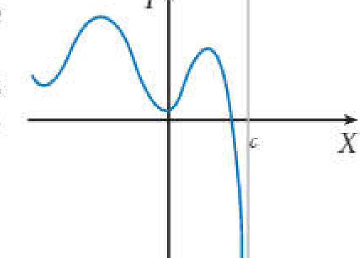


Figura 8.4

Un criterio útil para calcular este tipo de límites es el siguiente:

> Si $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}=0$ y
>
> **i)** $f(x)>0$ para $x\in(a,c)$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$
>
> **ii)** $f(x)<0$ para $x\in(a,c)$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)=-\infty$
>
> Similarmente se obtiene $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ analizando el signo de $f(x)$ a la derecha de c.

Ejemplos

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$.

Solución:

En este caso $f(x)=\dfrac{1}{x}$. De tal forma, que primero calculamos;

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 0} x=0$$

- Si $x>0$ entonces $f(x)=\dfrac{1}{x}>0$ de donde

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty.$$

- Si $x<0$ entonces $f(x)=\dfrac{1}{x}<0$ de donde

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Por lo tanto, $x=0$ es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ no existe porque los límites laterales no coinciden (ver Figura 8.5).

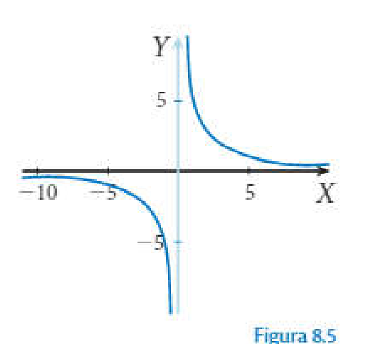


Figura 8.5

Pensamiento crítico

Si $\lim_{x\to c}(fg)(x)$ existe, entonces ¿existen $\lim_{x\to c} f(x)$ y $\lim_{x\to c} g(x)$?

2. Calcular $\lim_{x\to 6}\dfrac{-8}{x-6}$.

Solución:.
En este caso $f(x)=\dfrac{-8}{x-6}$.

De tal forma, que primero calculamos;

$$\lim_{x\to 6}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{-8}=0$$

Ahora analizamos el signo de $f(x)$:

- Si $x>6$, tenemos

$$x-6>0$$

y como $-8<0$, entonces

$$\frac{-8}{x-6}<0$$

Por lo tanto;

$$\lim_{x\to 6^+}\frac{-8}{x-6}=-\infty$$

- Si $x<6$, tenemos

$$x-6<0,$$

y como $-8<0$, entonces

$$\frac{x-6}{-8}>0$$

Por lo tanto;

$$\lim_{x\to 6}\frac{-8}{x-6}=\infty.$$

Figura 8.6

Además, la recta $x=6$ es una asíntota vertical. (Figura 8.6).

3. $\lim_{x\to 2}\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$.

Solución:
En este caso $f(x)=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$

Primero calculamos

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{4x-12}=\frac{0}{-4}=0$$

Ahora analizamos el signo de $f(x)=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$

Como $(x-2)^2>0$ el signo de $f(x)$ depende solo del signo de $4x-12$.

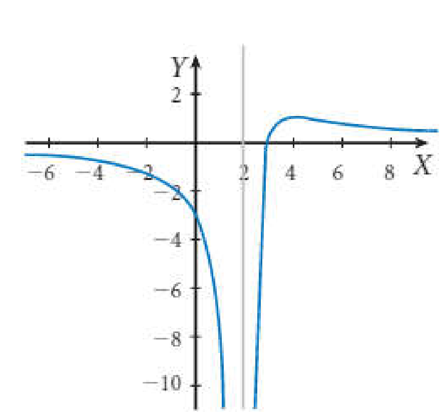
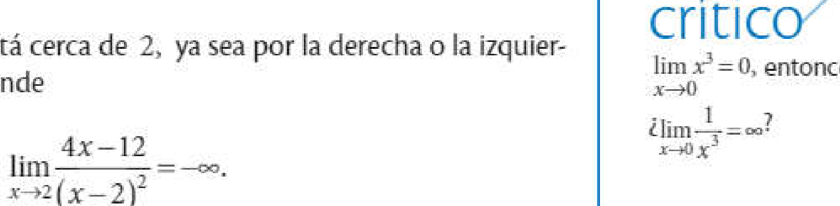


Figura 8.7



- $4x-12>0$ si $x>3$
- $4x-12<0$ si $x<3$

Así que $f(x)<0$ si x está cerca de 2, ya sea por la derecha o la izquierda, (ver Figura 8.7), de donde



$$\lim_{x\to 2}\frac{4x-12}{(x-2)^2}=-\infty.$$

Pensamiento crítico

$\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$, entonces

¿$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=\infty$?

Como consecuencia del criterio anterior para límites laterales, obtenemos el siguiente resultado para el límite impropio.

Si $\lim\limits_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=0$ y

i. $f(x)>0$ en un intervalo que contiene a c, excepto quizás en c, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$.

ii. $f(x)<0$ en un intervalo que contiene a c, excepto quizás en c, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)=-\infty$.

Ejemplos

1. Calcular $\lim\limits_{x\to -4}\frac{9}{(x+4)^2}$.

Solución:

En este caso $f(x)=\frac{9}{(x+4)^2}$. De tal forma, que primero calculamos;

$$\lim_{x\to -4}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)^2}{9}=0$$

Como $(x+4)^2>0$ si $x\neq -4$ entonces

$$f(x)=\frac{9}{(x+4)^2}>0$$

De donde por el inciso i) del párrafo anterior, tenemos;

$$\lim_{x\to -4}\frac{9}{(x+4)^2}=\infty$$

Por lo tanto, $x=-4$ es una asíntota vertical, (Figura 8.8).

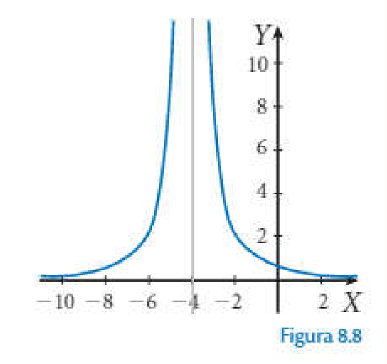


Figura 8.8

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 5}\frac{-6}{(x-5)^4}$.

Solución:

En este caso tomamos $f(x)=\frac{-6}{(x-5)^4}$. De tal forma, que primero calculamos;

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)^4}{-6}=0$$

Pensamiento crítico

¿Cuánto vale $\lim_{x \to a} \frac{k}{(x-a)^{2n}}$, si $k \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$?

Ejemplos

Como $(x-5)^4 > 0$ si $x \neq 5$ y $-6 < 0$, entonces;

$$f(x) = \frac{-6}{(x-5)^4} < 0$$

De donde por el inciso ii de la página anterior;

$$\lim_{x \to 5} \frac{-6}{(x-5)^4} = -\infty$$

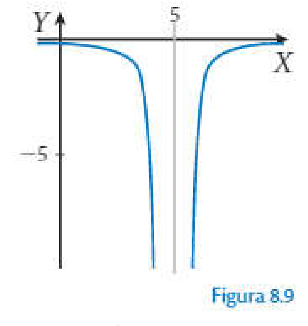


Figura 8.9

Por lo tanto, $x = 5$ es una asíntota vertical, (ver Figura 8.9)

Propiedades

1. Si $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$, entonces:

a. $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \infty$.

b. $\lim_{x \to c} (f(x)g(x)) = \infty$.

c. $\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = 0$.

2. Si $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to c} g(x) = L$, siendo L un número real, entonces:

a. $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \infty$.

b. $\lim_{x \to c} (f(x)g(x)) = \begin{cases} \infty & \text{si } L > 0. \\ -\infty & \text{si } L < 0. \end{cases}$

Para recordar esta última propiedad, aplicamos la regla de los signos.

3. Si $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \infty$.

4. Si $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to c} g(x) = -\infty$, entonces:

a. $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = -\infty$.

b. $\lim_{x \to c} (f(x)g(x)) = \infty$.

c. $\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = 0$.

5. Si $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to c} g(x) = L$, siendo L un número real, entonces:

a. $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = -\infty$.

b. $\lim_{x \to c} (f(x)g(x)) = \begin{cases} -\infty & \text{si } L > 0. \\ \infty & \text{si } L < 0. \end{cases}$

Nuevamente podemos decir que se cumple la regla de los signos, como es el caso en todos los incisos (b).

Todo lo anterior es también válido cuando consideramos límites laterales.



¿Cuánto vale $\lim_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^n}$ si n es un número entero?

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3-4x+2}{(x+2)^2}$.

Solución:
Escribimos

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-4x+2}{(x+2)^2} = \lim_{x\to -2}\left(x^3-4x+2\right)\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right)$$

Calculamos $\lim_{x\to -2} \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

- Primero vemos que

$$\lim_{x\to -2} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to -2}(x+2)^2 = 0.$$

- Si $x \neq -2$ entonces $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0$, de donde,

$$\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty.$$

Como:

$$\lim_{x\to -2}\left(x^3-4x+2\right) = 2 > 0,$$

entonces por la propiedad 2(b) tenemos que

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-4x+2}{(x+2)^2} = \infty.$$

Así, $x=-2$ es una asíntota vertical, (ver Figura 8.10).

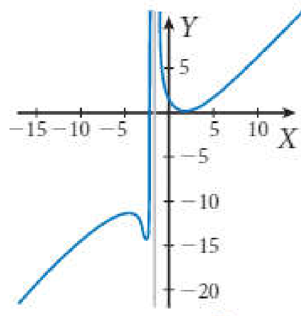


Figura 8.10

2. Calcular $\lim_{x\to 10} \dfrac{x-4}{10-x}$.

Solución:
Escribimos

$$\frac{x-4}{10-x} = (x-4)\left(\frac{1}{10-x}\right)$$

Entonces;

$$\lim_{x\to 10}(x-4) = 6$$

Ahora calculamos $\lim_{x\to 10} \dfrac{1}{10-x}$.

Primero vemos que

$$\lim_{x\to 10}(10-x) = 0$$

- Si $x > 10$ entonces $10-x<0$, de donde,

$$\frac{1}{10-x} < 0.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 10^{+}} \frac{1}{10-x} = -\infty$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 10^{+}} \frac{x-4}{10-x} = \lim_{x\to 10^{+}} (x-4)\left(\frac{1}{10-x}\right) = -\infty.$$

- Si $x<10$ entonces $10-x>0$, de donde,

$$\frac{1}{10-x} > 0.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 10} \frac{1}{10-x} = \infty.$$

De donde,

$$\lim_{x\to 10} \frac{x-4}{10-x} = \lim_{x\to 10} (x-4)\left(\frac{1}{10-x}\right) = \infty.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 10^{+}} \frac{x-4}{10-x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 10} \frac{x-4}{10-x} = \infty.$$

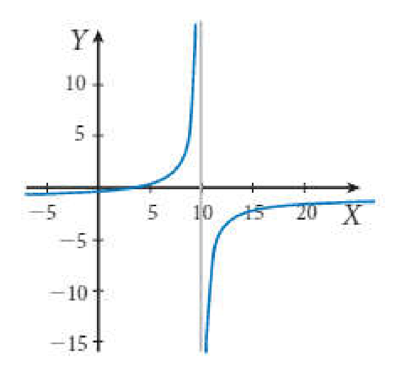


Figura 8.11

Así, $x=10$ es una asíntota vertical, (ver Figura 8.11). Como los límites laterales en 10 son distintos, entonces $\lim_{x\to 10} \frac{x-4}{10-x}$ no existe.

3. Calcular $\lim_{x\to -4} \frac{-(2x+5)^2}{(x+4)^2}$.

Solución:
Escribimos

$$\lim_{x\to -4} \frac{-(2x+5)^2}{(x+4)^2} = \lim_{x\to -4} \left(-(2x+5)^2\right)\left(\frac{1}{(x+4)^2}\right)$$

Calculamos $\lim_{x\to -4} \frac{1}{(x+4)^2}$.

- Primero vemos que

$$\lim_{x\to -4} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to -2} (x+4)^2 = 0.$$

- Si $x \neq -4$ entonces $f(x) = \frac{1}{(x+4)^2} > 0$, de donde,

$$\lim_{x\to -4} \frac{1}{(x+4)^2} = \infty.$$

Como

$$\lim_{x\to -4}\left(-(2x+5)^2\right)=-9<0$$

Entonces por la propiedad 2(b) tenemos que

$$\lim_{x\to -4}\frac{-(2x+5)^2}{(x+4)^2}=-\infty.$$

Así $x=-4$ es una asíntota vertical, (Figura 8.12).

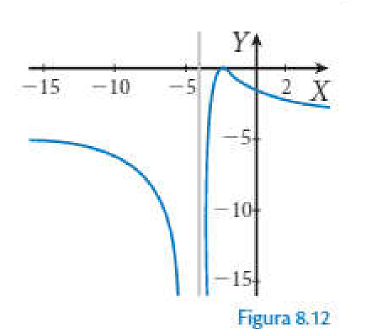


Figura 8.12

Ejemplos

Ejercicios

Determina en cada caso si existe el límite. Con base en tu respuesta encuentra, en su caso, las ecuaciones de las asíntotas verticales.

1. $\lim_{x\to -8}\frac{1}{(x+8)^2}$
2. $\lim_{x\to 2}\frac{12}{(x-2)^2}$
3. $\lim_{x\to -\frac{1}{4}}\frac{-8}{(4x+1)^2}$
4. $\lim_{x\to 10}\frac{1}{x-10}$
5. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{1}{2x-1}$
6. $\lim_{x\to 3}\frac{4}{x-3}$
7. $\lim_{x\to -7}\frac{x+14}{(x+7)^2}$
8. $\lim_{x\to 9}\frac{-x-20}{(x-9)^2}$
9. $\lim_{x\to -4}\frac{x+9}{(x+4)^2}$
10. $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$
11. $\lim_{x\to 5}\frac{-3x}{x-5}$
12. $\lim_{x\to 4}\frac{3x+7}{x-4}$
13. $\lim_{x\to -5}\frac{6x+8}{x+5}$
14. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+4x}{x+3}$
15. $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-8x}{x-6}$
16. $\lim_{x\to -\frac{20}{3}}\frac{x^2+x}{3x+20}$
17. $\lim_{x\to \frac{38}{4}}\frac{x^2-2x}{4x-38}$
18. $\lim_{x\to 1}\frac{3x}{(x+5)(x-1)}$
19. $\lim_{x\to -8}\frac{-x}{(x+8)(x-2)}$
20. $\lim_{x\to 4}\frac{(x+3)(x-2)}{(x-4)(x-7)}$
21. $\lim_{x\to -6}\frac{(x-9)(x-1)}{(x+6)(x+1)}$
22. $\lim_{x\to 7}\frac{x^2+6x-16}{x^2-9x+14}$
23. $\lim_{x\to 8}\frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-40}$
24. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+8x+15}{x^2+5x+6}$
25. $\lim_{x\to -10}\frac{x^2-10x+24}{x^2+6x-40}$

Tabla 8.3

x	$f(x)$
10	0.1
50	0.02
100	0.01
500	0.002
1 000	0.001
5 000	0.0002
10 000	0.0001

Límites en el infinito

Asíntotas horizontales y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

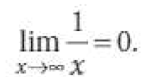
Veamos el comportamiento de la función;

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

para valores grandes de x.

Si los valores de x crecen, su recíproco es cada vez más pequeño. Es decir, a medida que x crece, los valores de la función se aproximan cada vez más a cero (ver Tabla 8.3).

En este caso decimos que f tiende a cero cuando x tiende a infinito y escribimos;



$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

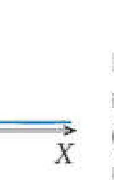


Figura 8.13

La gráfica de $f(x)$ Figura 8.13 se parece cada vez más a la recta $y=0$. Por tener esta propiedad y ser paralela al eje X (en este caso coincide con X), decimos que la recta $y=0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

Decimos que f tiende al número L cuando x tiende a ∞, y escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

si los valores de la función se acercan cada vez más a L conforme x es más grande, (ver Figura 8.14).

En tanto que, decimos que f tiende al número L cuando x tiende a $-\infty$, y escribimos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

si los valores de la función se acercan cada vez más a L conforme x toma valores negativos y de tamaño cada vez más grande, (ver Figura 8.15).

La recta $y=L$ es una *asíntota horizontal* de la gráfica de la función f si se cumple alguno de los siguientes hechos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L, \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=L.$$

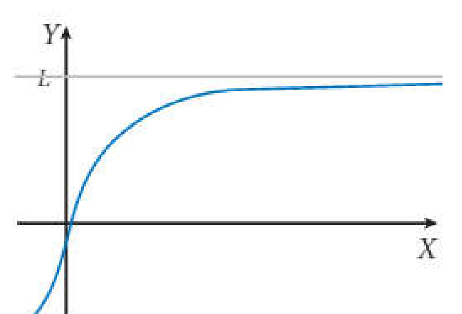


Figura 8.14

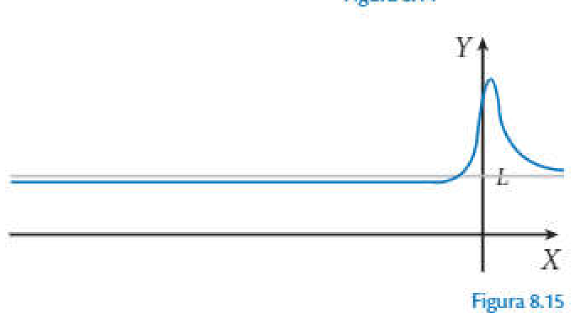


Figura 8.15

Propiedades

1. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=M$ entonces:

   a. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\pm g(x)\right)=L\pm M.$

   b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)=LM.$

   c. Si además $M\neq 0$ entonces: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}.$

2. Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=M$ entonces:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\pm g(x)\right)=L\pm M.$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)g(x)\right)=LM.$

c. Si además $M\neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}.$

Puesto que $\frac{1}{t}$ tiende a ∞ cuando t tiende a 0 por la derecha, tenemos el siguiente procedimiento

Para calcular $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ procedemos a sustituir x por $\frac{1}{t}$ y hacemos tender t a 0 por la derecha; si el límite es L, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L.$

Análogamente, para calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ procedemos a sustituir x por $\frac{1}{t}$ y hacemos tender t a 0 por la izquierda; si el límite obtenido es L, entonces $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L.$

Lo anterior se resume como:

i. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ si y solo si $\lim\limits_{t\to0^+}f\left(\dfrac{1}{t}\right)=L.$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ si y solo si $\lim\limits_{t\to0^-}f\left(\dfrac{1}{t}\right)=L.$

Ejemplos

1. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x-9}{2x^2+3}.$

Solución:

- Hacemos $f(x)=\dfrac{7x^2+x-9}{2x^2+3}$, sustituimos x por $\dfrac{1}{t}$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{7\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}-9}{2\left(\frac{1}{t}\right)^2+3}=\frac{\frac{7+t-9t^2}{t^2}}{\frac{2+3t^2}{t^2}}=\frac{7+t-9t^2}{2+3t^2}$$

- Como queremos calcular el límite cuando x tiende a ∞, entonces hacemos tender t a 0 por la derecha y obtenemos

$$\lim_{t\to0^+}\frac{7+t-9t^2}{2+3t^2}=\frac{7+0-9(0)^2}{2+3(0)^2}=\frac{7}{2}$$

Así, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x-9}{2x^2+3}=\dfrac{7}{2}$ y por lo tanto, la recta $y=\dfrac{7}{2}$ es una asíntota horizontal, (ver Figura 8.16).

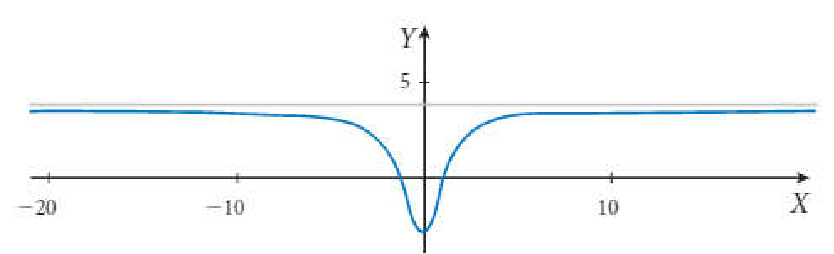


Figura 8.16

2. Calcular $\lim_{x\to-\infty} \frac{10x-12}{\sqrt{4x^2-2x+6}}$.

Solución:

- Hacemos $f(x)=\frac{10x-12}{\sqrt{4x^2-2x+6}}$.

Sustituimos x por $\frac{1}{t}$.

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{10\left(\frac{1}{t}\right)-12}{\sqrt{4\left(\frac{1}{t}\right)^2-2\frac{1}{t}+6}}$$

$$=\frac{\frac{10-12t}{t}}{\sqrt{\frac{4-2t+6t^2}{t^2}}}$$

$$=\frac{10-12t}{t\left(\frac{\sqrt{4-2t+6t^2}}{|t|}\right)}$$

$$=\frac{10-12t}{t\left(\frac{\sqrt{4-2t+6t^2}}{-t}\right)} \quad \text{(ya que } t<0)$$

$$=\frac{10-12t}{-\sqrt{4-2t+6t^2}}$$

- Como x tiende a $-\infty$, entonces debemos hacer tender t a cero por la izquierda y por lo tanto $t<0$, así:

$$\lim_{t\to 0} \frac{10-12t}{-\sqrt{4-2t+6t^2}}=\frac{10-12(0)}{-\sqrt{4-2(0)+6(0)^2}}$$

$$=\frac{10}{-\sqrt{4}}$$

$$=-5$$

TIP

El símbolo que usamos para la raíz cuadrada, fue usado por primera vez en Alemania en el año 1525.



Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{10x-12}{\sqrt{4x^2-2x+6}} = -5$ y así, la recta $y=-5$ es una asíntota horizontal, (Figura 8.17).

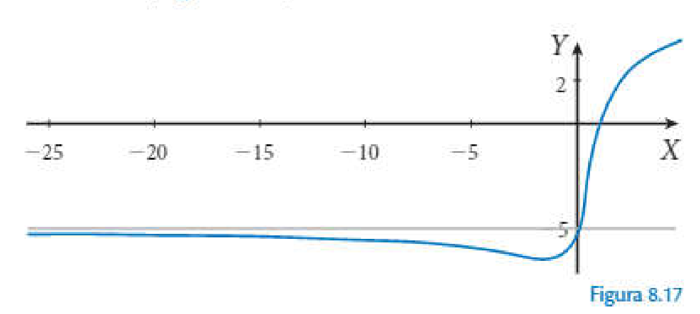


Figura 8.17

En lo sucesivo utilizaremos el resultado siguiente para calcular algunos límites cuando la variable tiende a ∞ o a $-\infty$,

> Si n es un número natural, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0.$

Al usar el resultado anterior, tenemos otra manera de resolver el ejemplo 1 de la página 257. Factorizamos x^2 en el numerador y denominador:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+x-9}{2x^2+3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(7+\dfrac{1}{x}-\dfrac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\dfrac{3}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{7+\dfrac{1}{x}-\dfrac{9}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x^2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{1}{x}-\dfrac{9}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{x^2}\right)} \\
&= \frac{7}{2}.
\end{aligned}
$$

Ejemplos

1. Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{32x^2+8x-6}{4x^2+5x+6}$.

   Solución:
   Factorizamos x^2 en el numerador y denominador; observa que x^2 es la máxima potencia de x que aparece en el denominador.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{32x^2+8x-6}{4x^2+5x+6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(32+\frac{8}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{32+\frac{8}{x}-\frac{6}{x^2}}{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=8$$

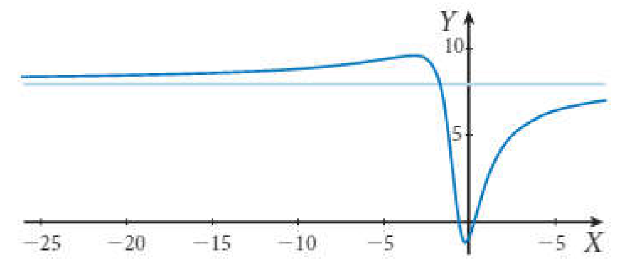


Figura 8.18

Por lo tanto, $\lim_{x\to-\infty}\frac{32x^2+8x-6}{4x^2+5x+6}=8$ y entonces la recta $y=8$ es una asíntota horizontal, (Figura 8.18).

2. Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^4+10x^3-7x+35}{9x^7-12x^5+14}$.

Solución:

Factorizamos x^7 en el numerador y denominador, observa que x^7 es la máxima potencia de x que aparece en el denominador

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^4+10x^3-7x+35}{9x^7-12x^5+14}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^7\left(\frac{8}{x^3}+\frac{10}{x^4}-\frac{7}{x^6}+\frac{35}{x^7}\right)}{x^7\left(9-\frac{12}{x^2}+\frac{14}{x^7}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8}{x^3}+\frac{10}{x^4}-\frac{7}{x^6}+\frac{35}{x^7}}{9-\frac{12}{x^2}+\frac{14}{x^7}}=\frac{0}{9}=0$$

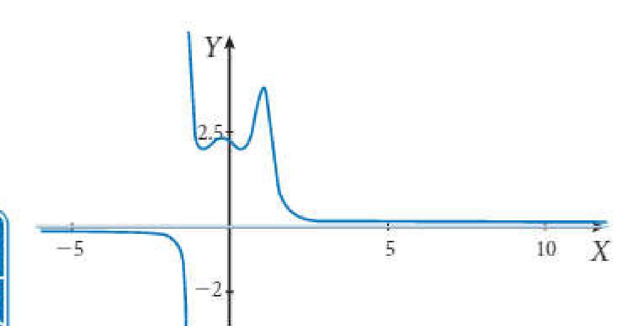


Figura 8.19

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^4+10x^3-7x+35}{9x^7-12x^5+14}=0$ y así la recta $y=0$ es una asíntota horizontal, (Figura 8.19).

Ejemplos

Ejercicios

Calcula en cada caso el límite y encuentra la ecuación de una asíntota horizontal.

1. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-8}$

3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+3}$

4. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-9x}{x-11}$

5. $\lim_{x\to-\infty}\frac{15x}{3x+24}$

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{20x-1}{5x+8}$

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{32x+6}{9x-40}$

8. $\lim_{x\to-\infty}\frac{14x^2+2x}{2x^2-5}$

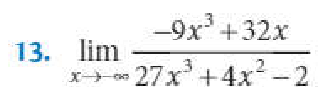
9. $\lim_{x\to\infty}\frac{28x^2-12x}{12x^2-5}$

10. $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-10x+5}{3x^3+x-4}$

11. $\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^2+12x-20}{11x^2-48}$

12. $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^5-7x^3}{9x^5+6x^4+1}$

Ejercicios



13. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-9x^3+32x}{27x^3+4x^2-2}$

14. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-3x^4+10x^3-2}{8x^4-8x^2+x}$

15. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{22x^2+6x-13}{-2x^2+52x}$

16. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{35x^8+x^5-2x+12}{5x^8-14x^4-3x^2+8}$

17. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8x^5+5x^3+15}{10x^5+3x^3+15}$

18. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-4x}{\sqrt{x^2-4}}$

19. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{25x^4-9}}{5x^2}$

20. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+7x-5}}{4x+19}$

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{25x^2+8x+2}{\sqrt{16x^4-256}}$

22. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{144x^2-144x-864}}{-3x-24}$

23. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{18x^2-64}{\sqrt{81x^4+5x}}$

24. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4-6x^3+7x^2}}{12x^2-4x-11}$

25. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3+2\sqrt{x}}{8-\sqrt{x}}$

Límites infinitos en el infinito

Veamos el comportamiento de la función $f(x)=x^3-4x^2+x-5$ para valores de x grandes, (ver Tabla 8.4).

Observamos que a medida que x crece, los valores de la función crecen cada vez más, (ver Figura 8.20).

En este caso decimos que f tiende a infinito cuando x tiende a infinito y escribimos

$$\lim_{x \to \infty}\left(x^3-4x^2+x-5\right)=\infty$$

En general, decimos que f tiende a ∞ cuando x tiende a ∞, y escribimos;

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$$

si los valores de la función son cada vez más grandes, conforme x es más grande, (Figura 8.21).

Decimos que f tiende a ∞ cuando x tiende a $-\infty$, y escribimos;

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=\infty$$

si los valores de la función son cada vez más grandes, conforme x es negativo y es más grande en tamaño, (Figura 8.22).

Análogamente, podemos definir los conceptos asociados a los símbolos;

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$$

Tabla 8.4

x	$f(x)$
5	25
10	605
50	115 045
100	960 095
500	124 000 495
1 000	996 000 995
5 000	124 900 004 995
10 000	999 600 009 995

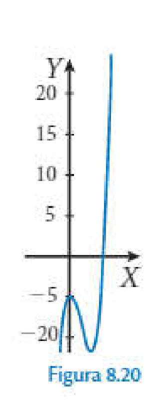


Figura 8.20

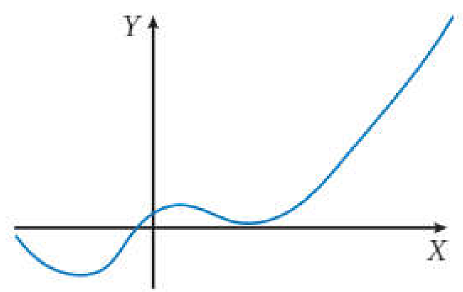


Figura 8.21

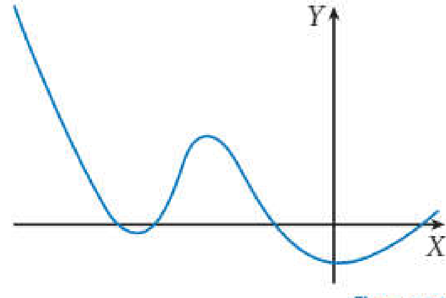


Figura 8.22

Propiedades

1. Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)= L$, con L número real, entonces:

a. $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)+g(x)\big)=\infty.$

b. $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)g(x)\big)=\begin{cases}\infty & \text{si } L>0.\\ -\infty & \text{si } L<0.\end{cases}$

c. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0.$

d. $\lim_{x\to\infty} f^{n}(x)=\infty$ si $n\geq 1.$

2. Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)= L$, con L número real, entonces:

a. $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)+g(x)\big)=-\infty.$

b. $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)g(x)\big)=\begin{cases}-\infty & \text{si } L>0.\\ \infty & \text{si } L<0.\end{cases}$

c. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0.$

d. $\lim_{x\to\infty} f^{n}(x)=\begin{cases}\infty & \text{si } n\geq 1 \text{ es par}.\\ -\infty & \text{si } n\geq 1 \text{ es impar}.\end{cases}$

3. Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ entonces:

a. $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)+g(x)\big)=\infty.$

b. $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)g(x)\big)=\infty.$

4. Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=-\infty$ entonces:

a. $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)+g(x)\big)=-\infty.$

b. $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)g(x)\big)=\infty.$

5. Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, entonces $\lim_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}=\infty.$

Pueden enunciarse propiedades análogas cuando la variable tiende a $-\infty$.
Más que recordar de memoria las propiedades anteriores, debemos recurrir a nuestra experiencia para usar la lista anterior.
Por ejemplo:

- Si sumamos números grandes obtenemos un número grande (propiedad 1(a)).

- Si multiplicamos dos números negativos de tamaño grande obtenemos un número positivo grande (propiedad 4(b)).

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x\to-\infty}\left(x^7+x^6-6x^3-3x^2\right)$.

Solución:
No podemos decir directamente que es la suma de los límites pues aparecen indeterminaciones de la forma $\infty-\infty$, así que para calcular este límite, factorizamos x^7 que es la máxima potencia de x que aparece en el polinomio:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^7+x^6-6x^3-3x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}x^7\left(1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x^5}\right)$$

Como;

$$\lim_{x\to-\infty}x^7=-\infty$$

y

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x^5}\right)=1,$$

por la propiedad 2b, tenemos que

$$\lim_{x\to-\infty}x^7\left(1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x^5}\right)=-\infty.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to-\infty}\left(x^7+x^6-6x^3-3x^2\right)=-\infty$ (Figura 8.23).

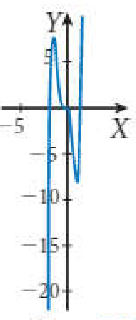


Figura 8.23

2. Calcular $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{25}-\frac{x^4}{750}-\frac{x^5}{1\,500}\right)$.

Solución:
No podemos decir directamente que es la suma de los límites pues aparecen indeterminaciones de la forma $\infty-\infty$, así que para calcular este límite, factorizamos la máxima potencia de x que aparece en el polinomio, es decir, x^5:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{25}-\frac{x^4}{750}-\frac{x^5}{1\,500}\right)=\lim_{x\to-\infty}x^5\left(\frac{2}{25x^2}-\frac{1}{750x}-\frac{1}{1\,500}\right)$$

Como:

$$\lim_{x\to-\infty}x^5=-\infty$$

y

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{25x^2}-\frac{1}{750x}-\frac{1}{1\,500}\right)=-\frac{1}{1\,500},$$

Figura 8.24

Por la propiedad 2b, tenemos que;

$$\lim_{x\to-\infty} x^5\left(\frac{2}{25x^2}-\frac{1}{750x}-\frac{1}{1500}\right)=\infty.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{25}-\frac{x^4}{750}-\frac{x^5}{1500}\right)=\infty$, (Figura 8.24).

3. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^6+100x^4-x^2+100}{20x^4+60x^2+40}$.

Solución:

Factorizamos la máxima potencia de x en el numerador (x^6) y hacemos lo mismo en el denominador (x^4).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^6+100x^4-x^2+100}{20x^4+60x^2+40}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6\left(-1+\frac{100}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{100}{x^6}\right)}{x^4\left(20+\frac{60}{x^2}+\frac{40}{x^4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{-1+\frac{100}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{100}{x^6}}{20+\frac{60}{x^2}+\frac{40}{x^4}}\right)$$

Como;

$$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$$

y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{100}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{100}{x^6}}{20+\frac{60}{x^2}+\frac{40}{x^4}}=-\frac{1}{20},$$

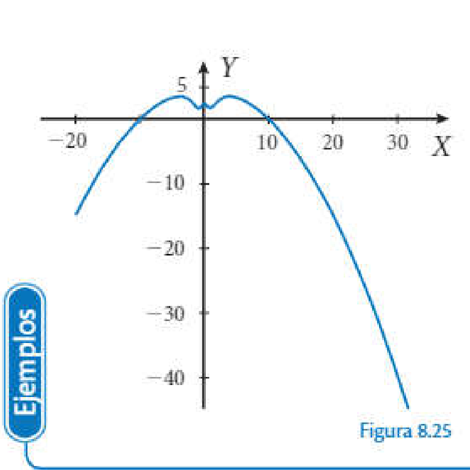


Figura 8.25

por la propiedad 2b, tenemos que;

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{-1+\frac{100}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{100}{x^6}}{20+\frac{60}{x^2}+\frac{40}{x^4}}\right)=-\infty.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^6+100x^4-x^2+100}{20x^4+60x^2+40}=-\infty$, (Figura 8.25).

Ejemplos

Ejercicios

En cada caso, calcula el límite.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(8x^4+5x^2-x+3\right)$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-16x^5-4x^2+7x\right)$

Ejercicios

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2-6x+3\right)$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^6-8x^3+6x+3\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-9x^7-10x^6+x^3-2\right)$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5x^3-16x^2-8x+7\right)$

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-8x^5+7x^4+9x^3-4\right)$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(21x^4+5x^3+2x+5\right)$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-75}{x+8}$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x-80}{x-12}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^4-9x^2-90}{10\left(x^2+x-12\right)}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-16x^2}{30x+150}$

13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^5+3x^4-x^3+8x^2+2}{x^4+8x^2+16}$

14. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^6+12x^5-x^4}{x^5+21x^4+157x^3+553x^2+1\,470x+3\,430}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7-3x^5-6x^3+6x^2}{x^6+9x^4+20x^2+12}$

Asíntotas oblicuas de funciones racionales

Analicemos el comportamiento de $f(x)=\frac{x^4-15x^3-10x^2-25}{x^3-3x^2+20}$ en ∞, o sea cuando x es grande.

Solución:

Por lo antes visto podemos determinar que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-15x^3-10x^2-25}{x^3-3x^2+20}=\infty.$$

Para obtener otra información hagamos la división indicada:

$$\begin{array}{r|l}
 & x-12 \\ \hline
x^3-3x^2+20 & x^4-15x^3-10x^2\qquad-25 \\
 & \underline{-x^4+3x^3\qquad\quad-20x} \\
 & -12x^3-10x^2-20x-25 \\
 & \underline{12x^3-36x^2\qquad+240} \\
 & -46x^2-20x+215
\end{array}$$

entonces;

$$f(x)=\frac{x^4-15x^3-10x^2-25}{x^3-3x^2+20}=(x-12)+\left(\frac{-46x^2-20x+215}{x^3-3x^2+20}\right).$$

Así:

$$f(x)-(x-12)=\frac{-46x^2-20x+215}{x^3-3x^2+20}. \tag{8.1}$$

TIP
Los cocientes de polinomios tienen asíntotas oblicuas solo en el caso en que el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

Ahora calculamos el límite del segundo miembro cuando x tiende a ∞:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-46x^2-20x+215}{x^3-3x^2+20}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-46-\frac{20}{x}+\frac{215}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{20}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{-46-\frac{20}{x}+\frac{215}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{20}{x^3}}\right)=0,$$

entonces tenemos que;

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(x-12)\right)=0,$$

esto quiere decir que la gráfica de la función $f(x)$ se parece cada vez más a la recta $y=x-12$ cuando x crece.

Por tener esta propiedad y no ser paralela a ninguno de los ejes decimos que la recta con ecuación $y=x-12$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función en ∞.

Por cierto, observamos que;

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-46x^2-20x+215}{x^3-3x^2+20}=0,$$

es decir, a medida que x tiende a $-\infty$ la gráfica de la función $f(x)$ también se parece cada vez más a la gráfica de la misma recta: $y=x-12$. O sea:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-12)\right)=0.$$

Por este motivo $y=x-12$ es una asíntota oblicua de $f(x)$ en $-\infty$, (Figura 8.26).

Una recta con ecuación $y=mx+b$ con $m\neq 0$ es una *asíntota oblicua* en ∞ o $-\infty$ de una función f si,

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(mx+b)\right)=0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(mx+b)\right)=0,$$

respectivamente.

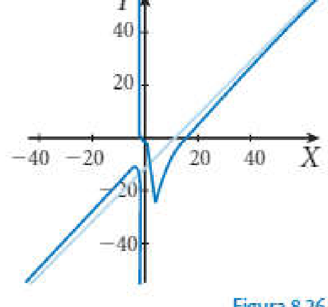


Figura 8.26

Las funciones racionales, es decir los cocientes de polinomios, tienen asíntotas oblicuas solo en el caso en que el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, como en el ejemplo anterior. Entonces, la manera de encontrar la única asíntota oblicua es efectuando la división. Si el cociente es $mx+b$, entonces $y=mx+b$ es la asíntota buscada y lo es tanto en ∞, como en $-\infty$.



1. Determinar la asíntota oblicua de $f(x)=\dfrac{4x^5+8x^4+x^3-2x^2-6x+18}{4x^4+x^2-6}$.

Solución:
Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, entonces la función tiene una asíntota oblicua.

Efectuamos la división;

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline 4x^4+x^2-6 & 4x^5+8x^4+x^3-2x^2-6x+18 \\ & -4x^5 \quad -x^3 \quad +6x \\ \hline & 8x^4 \quad -2x^2 \quad +18 \\ & -8x^4 \quad -2x^2 \quad +12 \\ \hline & -4x^2 \quad +30 \end{array}$$

Entonces $y=x+2$ es la asíntota oblicua de $f(x)$ en ∞ y $-\infty$ como podemos comprobarlo, (Figura 8.27).

$$f(x)=\frac{4x^5+8x^4+x^3-2x^2-6x+18}{4x^4+x^2-6}$$
$$=x+2+\frac{-4x^2+30}{4x^4+x^2-6}$$

y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^2+30}{4x^4+x^2-6}=0.$$

Así que

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)=0$$

y también se tiene que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^2+30}{4x^4+x^2-6}=0$$

Por lo que;

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)=0.$$

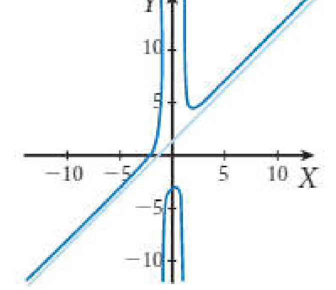


Figura 8.27

2. Determinar la asíntota oblicua de $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+9x-120}{x^2-10x+10}$.

Solución:
Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, entonces la función tiene una asíntota oblicua que lo es tanto en ∞, como en $-\infty$.

Efectuamos la división

$$\begin{array}{r|l} & x+5 \\ \hline x^2-10x+10 & x^3-5x^2+9x-120 \\ & -x^3+10x^2-10x \\ \hline & 5x^2-x-120 \\ & -5x^2+50x-50 \\ \hline & 49x-170 \end{array}$$

Ejemplos

Entonces $y=x+5$ es la asíntota oblicua de $f(x)$ como podemos comprobarlo, (ver Figura 8.28):

$$f(x)=\frac{x^3-5x^2+9x-120}{x^2-10x+10}=x+5+\frac{49x-170}{x^2-10x+10}$$

y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{49x-170}{x^2-10x+10}=0$$

entonces tenemos que

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(x+5)\right)=0.$$

También se cumple que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{49x-170}{x^2-10x+10}=0,$$

es decir,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+5)\right)=0.$$

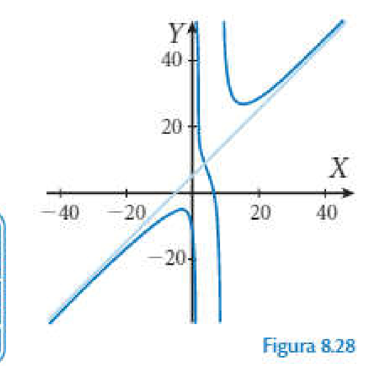


Figura 8.28

Ejercicios

Encuentra en cada caso las asíntotas oblicuas.

1. $f(x)=\dfrac{x^2}{2x+5}$
2. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-12}{3x-7}$
3. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$
4. $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$
5. $f(x)=\dfrac{6x^3+10x-18}{4x^2-12x}$
6. $f(x)=\dfrac{x^4-3x^3-8x^2+20x}{2x^3+8x^2-21x-10}$
7. $f(x)=\dfrac{x^4+3x^3+3x^2+x}{x^3-3x^2+3x-1}$
8. $f(x)=\dfrac{x^4(x-15)}{(x-1)^4}$
9. $f(x)=\dfrac{-5x^5+6x^3-13x+20}{4x^4-5x^3+15x-9}$
10. $f(x)=\dfrac{x^7-2x^6+5x^3+10}{x^6+11x^4+39x^2+45}$
11. $f(x)=\dfrac{x^8-2x^6-11x^4+12x^2+36}{x^7+3x^6-7x^5+11x^4-17x^3+13x^2-9x+5}$
12. $f(x)=\dfrac{x^9-8x^8+26x^7-80x^6+185x^5-200x^4+400x^3}{x^8+8x^6+24x^4+32x^2+16}$

Formas indeterminadas $\infty-\infty$ y $-\infty+\infty$

Cuando la variable tiende a un número real

Calcular $\lim\limits_{x\to 4'}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{5}{x^2-16}\right)$.

Solución:

- Analizamos primero $\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{x-4}$.

Como $x > 4$ entonces $x - 4 > 0$ y

$$\lim_{x\to 4} x - 4 = 0$$

de donde

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty.$$

- Ahora calculamos

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{5}{x^2-16} = \lim_{x\to 4^+} \frac{5}{(x-4)(x+4)}$$
$$= \lim_{x\to 4^+} \left(\frac{5}{x+4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right)$$

y como

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{5}{x+4} = \frac{5}{8},$$

entonces

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{5}{x^2-16} = \lim_{x\to 4^+} \left(\frac{5}{x+4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right) = \infty.$$

Así, al tratar de calcular $\lim_{x\to 4^+} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{5}{x^2-16}\right)$, tenemos una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Para resolver este límite, efectuamos la resta de las funciones

$$\frac{1}{x-4} - \frac{5}{x^2-16} = \frac{1}{x-4} - \frac{5}{(x-4)(x+4)}$$
$$= \frac{x+4-5}{(x-4)(x+4)}$$
$$= \frac{x-1}{(x-4)(x+4)}$$

y ahora calculamos:

$$\lim_{x\to 4^+} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{5}{x^2-16}\right) = \lim_{x\to 4^+} \frac{x-1}{(x-4)(x+4)}$$
$$= \lim_{x\to 4^+} \left(\frac{x-1}{x+4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right).$$

como

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x-1}{x+4} = \frac{3}{7}$$

y

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{x-4} = \infty,$$

TIP

Si una función racional tiene asíntota oblicua, la ecuación de dicha recta se obtiene calculando el cociente de la división.

entonces

$$\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right)=\infty.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{5}{x^2-16}\right)=\infty$, (Figura 8.29).

Figura 8.29

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x\to 5}\left(\frac{10x}{x^2-x-20}-\frac{x}{x^2-4x-5}\right)$.

Solución:

- Analizamos primero:

$$\lim_{x\to 5}\frac{10x}{x^2-x-20}=\lim_{x\to 5}\frac{10x}{(x+4)(x-5)}$$
$$=\lim_{x\to 5}\left(\frac{10x}{x+4}\right)\left(\frac{1}{x-5}\right).$$

Como $x<5$ entonces $x-5<0$ y

$$\lim_{x\to 5}(x-5)=0,$$

de donde

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}=-\infty$$

y

$$\lim_{x\to 5}\frac{10x}{x+4}=\frac{50}{9}.$$

de manera que

$$\lim_{x\to 5}\frac{10x}{x^2-x-20}=-\infty.$$

- Ahora calculamos:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{x}{(x+1)(x-5)}$$
$$=\lim_{x\to 5}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{1}{x-5}\right)$$

y como

$$\lim_{x\to 5}\frac{x}{x+1}=\frac{5}{6}$$

entonces

$$\lim_{x\to 5}\frac{x}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to 5}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{1}{x-5}\right)=-\infty.$$

Así, al sustituir directamente en la fórmula del límite de una diferencia para calcular $\lim_{x\to 5}\left(\frac{10x}{x^2-x-20}-\frac{x}{x^2-4x-5}\right)$, tenemos una indeterminación del tipo $-\infty+\infty$.

- Para encontrar este límite, efectuamos la resta de funciones

$$\begin{aligned}\frac{10x}{x^2-x-20}-\frac{x}{x^2-4x-5}&=\frac{10x}{(x+4)(x-5)}-\frac{x}{(x+1)(x-5)}\\&=\frac{10x(x+1)-x(x+4)}{(x+4)(x-5)(x+1)}\\&=\frac{10x^2+10x-x^2-4x}{(x+4)(x-5)(x+1)}\\&=\frac{9x^2+6x}{(x+4)(x-5)(x+1)}\end{aligned}$$

y ahora calculamos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\left(\frac{10x}{x^2-x-20}-\frac{x}{x^2-4x-5}\right)&=\lim_{x\to 5}\frac{9x^2+6x}{(x+4)(x-5)(x+1)}\\&=\lim_{x\to 5}\left(\frac{9x^2+6x}{(x+4)(x+1)}\right)\left(\frac{1}{x-5}\right).\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x\to 5}\frac{9x^2+6x}{(x+4)(x+1)}=\frac{85}{18}$$

y

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}=-\infty.$$

entonces

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{9x^2+6x}{(x+4)(x+1)}\right)\left(\frac{1}{x-5}\right)=-\infty.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 5}\left(\frac{10x}{x^2-x-20}-\frac{x}{x^2-4x-5}\right)=-\infty$, (Figura 8.30).

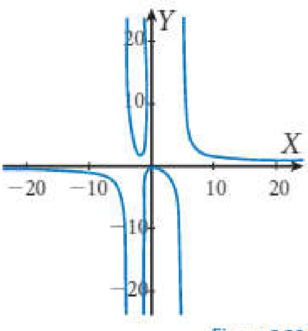


Figura 8.30

2. Calcular $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{x^2}{x-1}\right)$.

Solución:

- Analizamos primero $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$.

Calculamos el límite del denominador

$$\lim_{x\to 1}(x-1)=0.$$

TIP

Al calcular un límite en un punto a debe recordarse que su valor depende de los valores de la función cerca de a y no de que la función esté definida en a. Así, $\lim_{x\to a} f(x) = g(a)$ si f y g coinciden cerca a y g es continua en a.

Como $x<1$ entonces $x-1<0$, de donde

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Por otra parte

$$\lim_{x\to 1^-} x = 1.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty.$$

- Ahora calculamos $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x^2\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

Como

$$\lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$$

entonces

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x^2\left(\frac{1}{x-1}\right) = -\infty.$$

Así, la fórmula para el límite de una diferencia nos lleva a una indeterminación del tipo $-\infty+\infty$. Para calcular el límite, efectuamos la resta

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{x-1} &= \frac{x-x^2}{x-1}\\ &= \frac{x(1-x)}{x-1}\\ &= \frac{-x(x-1)}{x-1}\\ &= -x.\end{aligned}$$

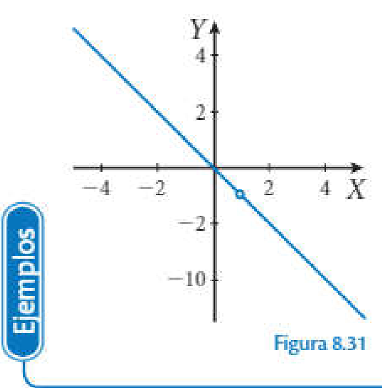


Figura 8.31

Ahora calculamos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-x(x-1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1^-} (-x)\\ &= -1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{x-1}\right) = -1$, (Figura 8.31).

Ejemplos

Cuando la variable tiende a ∞ o $-\infty$

Calcular $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2}{2x+1} - \frac{5x^3}{5x^2+3}\right)$.

Solución:
Como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{2}{2+\frac{1}{x}}\right)$$
$$=\infty$$

y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{5x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{x^2\left(5+\frac{3}{x^2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{5}{5+\frac{3}{x^2}}\right)$$
$$=\infty.$$

Entonces tenemos una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Para resolver este límite, efectuamos la operación indicada:

$$\frac{2x^2}{2x+1}-\frac{5x^3}{5x^2+3}=\frac{2x^2\left(5x^2+3\right)-5x^3\left(2x+1\right)}{\left(2x+1\right)\left(5x^2+3\right)}$$
$$=\frac{10x^4+6x^2-10x^4-5x^3}{\left(2x+1\right)\left(5x^2+3\right)}$$
$$=\frac{-5x^3+6x^2}{\left(2x+1\right)\left(5x^2+3\right)},$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{2x+1}-\frac{5x^3}{5x^2+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^3+6x^2}{10x^3+5x^2+6x+3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(-5+\frac{6}{x}\right)}{x^3\left(10+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{6}{x}}{10+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{3}{x^3}}$$
$$=-\frac{1}{2}.$$

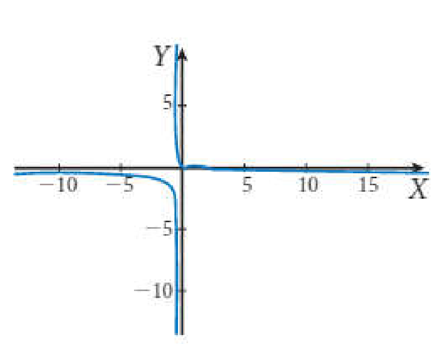


Figura 8.32

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{2x+1}-\frac{5x^3}{5x^2+3}\right)=-\frac{1}{2}$, (ver Figura 8.32).

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{18x^3}{3x^2-5}-\frac{18x^2}{3x+5}\right)$.

Solución:

Como

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{18x^3}{3x^2-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{18x^3}{x^2\left(3-\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{18}{3-\frac{5}{x^2}}\right)$$

$$=-\infty$$

y

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{18x^2}{3x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{18x^2}{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{18}{3+\frac{5}{x}}\right)$$

$$=-\infty,$$

entonces tenemos una indeterminación del tipo $-\infty+\infty$. Para resolver este límite, efectuamos la resta siguiente:

$$\frac{18x^3}{3x^2-5}-\frac{18x^2}{3x+5}=\frac{18x^3(3x+5)-18x^2\left(3x^2-5\right)}{\left(3x^2-5\right)(3x+5)}$$

$$=\frac{90x^3+90x^2}{9x^3+15x^2-15x-25},$$

de donde:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{18x^3}{3x^2-5}-\frac{18x^2}{3x+5}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{90x^3+90x^2}{9x^3+15x^2-15x-25}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(90+\frac{90}{x}\right)}{x^3\left(9+\frac{15}{x}-\frac{15}{x^2}-\frac{25}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{90+\frac{90}{x}}{9+\frac{15}{x}-\frac{15}{x^2}-\frac{25}{x^3}}$$

$$= \frac{90}{9} = 10.$$

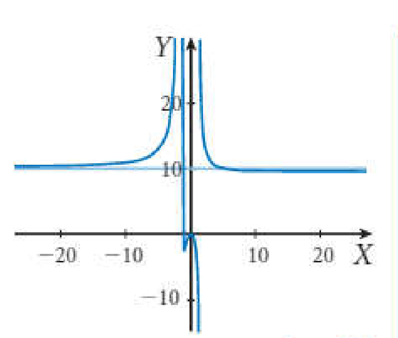
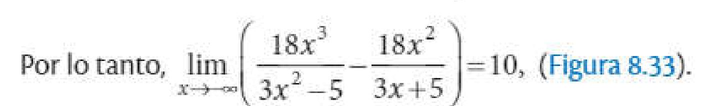


Figura 8.33


Por lo tanto, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{18x^3}{3x^2-5}-\frac{18x^2}{3x+5}\right)=10$, (Figura 8.33).

2. Calcular $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-5x^2}{x+1}-\frac{x^3-x^2}{2x^2+4}\right)$.

Solución:

Como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5x^2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1-\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\infty$$

y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2}{2x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{4}{x^2}}\right)$$

$$=\infty,$$

entonces tenemos una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Para resolver este límite, efectuamos la operación indicada:

$$\frac{x^3-5x^2}{x+1}-\frac{x^3-x^2}{2x^2+4}=\frac{\left(x^3-5x^2\right)\left(2x^2+4\right)-\left(x+1\right)\left(x^3-x^2\right)}{\left(x+1\right)\left(2x^2+4\right)}$$

$$=\frac{2x^5-10x^4+4x^3-20x^2-x^4+x^2}{\left(x+1\right)\left(2x^2+4\right)}$$

$$=\frac{2x^5-11x^4+4x^3-19x^2}{2x^3+2x^2+4x+4},$$

De donde

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-5x^2}{x+1}-\frac{x^3-x^2}{2x^2+4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-11x^4+4x^3-19x^2}{2x^3+2x^2+4x+4}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(2-\frac{11}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{19}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{2-\frac{11}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{19}{x^3}}{2+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}}\right)$$

$$=\infty.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-5x^2}{x+1}-\frac{x^3-x^2}{2x^2+4}\right)=\infty$, (Figura 8.34).

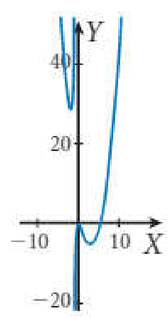


Figura 8.34

TIP

Las siguientes reglas son útiles para calcular los límites de una función racional en ∞ o $-\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+\cdots+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n+\cdots+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_0}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}.$$

Pensamiento crítico

¿Cuál debe ser el valor de a para que la recta $y=\frac{1}{5}$ sea una asíntota horizontal de la función $f(x)=\frac{ax^2+8x-6}{-5x^2-14x+3}$?

Ejemplos

Ejercicios

Calcula los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to6'}\left(\frac{1}{x-6}-\frac{8}{x^2-36}\right)$
2. $\lim_{x\to5}\left(\frac{2}{x^2-25}-\frac{4}{x-5}\right)$
3. $\lim_{x\to-2'}\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{6}{x+2}\right)$
4. $\lim_{x\to7}\left(\frac{2x^2}{x-7}-\frac{14x}{x-7}\right)$
5. $\lim_{x\to-3'}\left(\frac{10}{x^2+2x-3}-\frac{x}{x^2+4x+3}\right)$
6. $\lim_{x\to4'}\left(\frac{6x+1}{x^2-5x+4}-\frac{x-1}{x^2-3x-4}\right)$
7. $\lim_{x\to2}\left(\frac{5x^3-3x}{8(x^2-4)}-\frac{9x^2-2}{8(x^2-4)}\right)$
8. $\lim_{x\to5'}\left(\frac{x^2-10}{x^2-6x+5}-\frac{5x}{x^2-4x-5}\right)$
9. $\lim_{x\to8}\left(\frac{x^2-16}{(x-8)(x-3)}-\frac{6x}{(x-8)(x-3)}\right)$

Ejercicios

10. $\lim\limits_{x\to -6'}\left(\dfrac{5x^2+30x}{(x+6)(x+2)}-\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-36}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+5}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x^3+4x^2}{x^2+4}-\dfrac{2x^3-x-6}{x^2+2}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-4}-\dfrac{7x^2+x+1}{x^2-4}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x^3+4x^2}-\dfrac{6x^2+1}{2x^3-8x^2}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4-3x^2}{x^3+8x}-\dfrac{x^3-4x^2-x}{x^2-25}\right)$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4+2x^3}{x^2+16}-\dfrac{x^4-x^2-x}{x^3+6x}\right)$

17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{(x+3)(x-8)}-\dfrac{x^3-7x^2+2x-14}{(x+9)(x-8)}\right)$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4x-3}{6(x+5)(x-2)}-\dfrac{x^4-6x^2+x-1}{6(x+5)(x-6)}\right)$

19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^6-3x^3+1}{(x^2+1)(x^2+3)}-\dfrac{2+4x^4-x^5}{(x^2+1)(x^2+7)}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+4x^2+x}{3(x^2-100)}-\dfrac{x^4+8}{20(x-10)(x+5)}\right)$

Multiplicando por el conjugado

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{18x-36}-x\right)$.

Solución:
Como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sqrt{18x-36}&=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x\left(18-\frac{36}{x}\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\sqrt{18-\frac{36}{x}}\\&=\infty\end{aligned}$$

(propiedad 5 de la página 262) y

$$\lim_{x\to\infty}x=\infty,$$

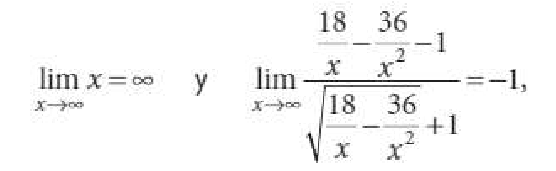
entonces tenemos una vez más una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Para resolver este límite, multiplicamos y dividimos por el conjugado de la función:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{18x-36}-x\right)&=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{18x-36}-x\right)\left(\frac{\sqrt{18x-36}+x}{\sqrt{18x-36}+x}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{18x-36-x^2}{\sqrt{18x-36}+x}.\end{aligned}$$

Ahora simplificamos la expresión:

$$\frac{18x-36-x^2}{\sqrt{18x-36}+x}=\frac{x^2\left(\frac{18}{x}-\frac{36}{x^2}-1\right)}{x\left(\frac{\sqrt{18x-36}}{x}+1\right)}=\frac{x^2\left(\frac{18}{x}-\frac{36}{x^2}-1\right)}{x\left(\sqrt{\frac{18-36}{x^2}}+1\right)}=x\left(\frac{\frac{18}{x}-\frac{36}{x^2}-1}{\sqrt{\frac{18}{x}-\frac{36}{x^2}}+1}\right).$$

Calculamos



$$\lim_{x\to\infty} x=\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{18}{x}-\frac{36}{x^2}-1}{\sqrt{\frac{18}{x}-\frac{36}{x^2}}+1}=-1,$$

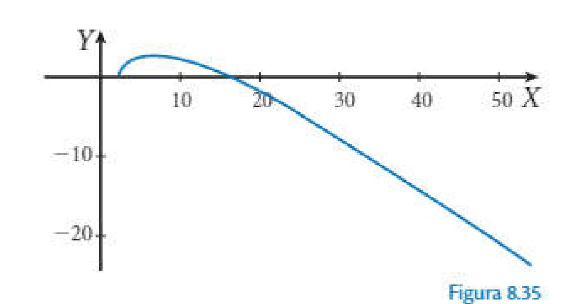


Figura 8.35

entonces

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\frac{18}{x}-\frac{36}{x^2}-1}{\sqrt{\frac{18}{x}-\frac{36}{x^2}}+1}\right)=-\infty.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{18x-36}-x\right)=-\infty$, (Figura 8.35).

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+6}-2x\right)$.

Solución:
Como

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2\left(4+\frac{6}{x^2}\right)}=\infty$$

y

$$\lim_{x\to\infty}(2x)=\infty,$$

entonces tenemos una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Para resolver este límite, multiplicamos y dividimos por el conjugado de la función:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+6}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+6}-2x\right)\left(\frac{\sqrt{4x^2+6}+2x}{\sqrt{4x^2+6}+2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+6-4x^2}{\sqrt{4x^2+6}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{4x^2+6}+2x}=0$$ (Propiedades 1c y 5 de la página 262).

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+6}-2x\right)=0$, (Figura 8.36).

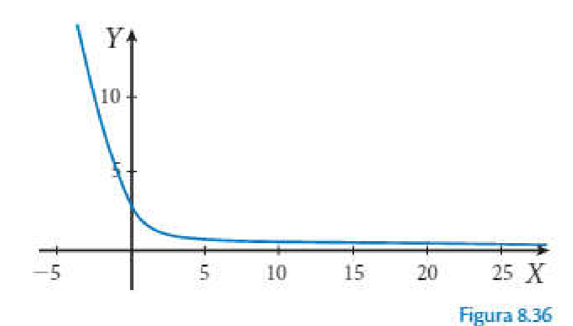


Figura 8.36

2. Calcular $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+5}-\sqrt{2x^2-1}\right)$.

Solución:
Como

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2+5}=\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-1}=\infty,$$

entonces tenemos una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Para resolver este límite, multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+5}-\sqrt{2x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+5}-\sqrt{2x^2-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3x^2+5}+\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{3x^2+5}+\sqrt{2x^2-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+5-\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{3x^2+5}+\sqrt{2x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+6}{\sqrt{3x^2+5}+\sqrt{2x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{6}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2\left(3+\frac{5}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{6}{x^2}\right)}{|x|\left(\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{6}{x^2}\right)}{-x\left(\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\right)} \quad \text{ya que } x<0$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-x)\left(\frac{1+\frac{6}{x^2}}{\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}\right).$$

Como

$$\lim_{x\to-\infty}(-x)=\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{6}{x^2}}{\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},$$

TIP

Si para $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{g(x)}-h(x)\right)$ existe una indeterminación del tipo $\infty-\infty$, entonces para calcular el límite se multiplica y se divide por el conjugado de $\sqrt{g(x)}-h(x)$, es decir, por $\sqrt{g(x)}+h(x)$.

entonces

$$\lim_{x\to-\infty}(-x)\left(\frac{1+\frac{6}{x^2}}{\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}\right)=\infty.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+5}-\sqrt{2x^2-1}\right)=\infty$, (Figura 8.37).

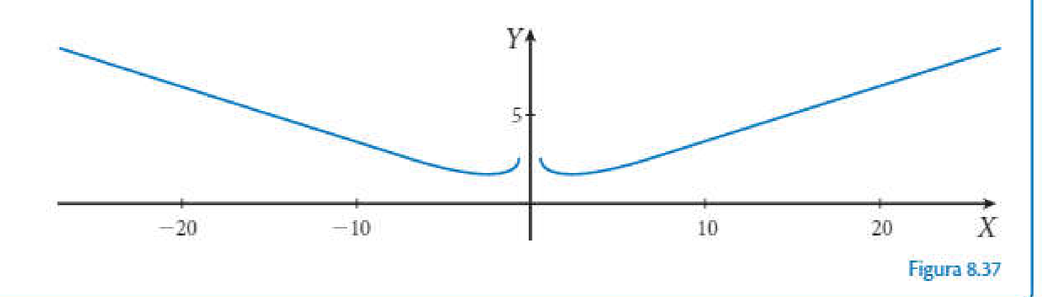


Figura 8.37

Ejemplos

Ejercicios

Calcula los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x-4}-x\right)$
2. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{-x+6}+x\right)$
3. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x+8}-\sqrt{5x-8}\right)$
4. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{6x^2+8}+3x\right)$
5. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+25}-\sqrt{x^2-1}\right)$
6. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{16x^2-25}-2x\right)$
7. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+9}-\sqrt{7x^2+49}\right)$
8. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x}-\sqrt{x^4+3}\right)$
9. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+6}-\sqrt{x^2-9}\right)$
10. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3-64}-\sqrt{x^3-27}\right)$
11. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+12}\right)$
12. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+6x+20}-\sqrt{9x^2+7x+4}\right)$

Regla de L'Hôpital

Calcular $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}8x}{x}$.

Solución:

Como

$$\lim_{x\to0}\operatorname{sen}8x=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to0}x=0$$

tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Este límite fue calculado en la página 142, donde vimos que su valor es 8. Veamos otra forma de encontrarlo.

Calculamos las derivadas del numerador y el denominador y tomamos el límite del cociente, es decir, (Figura 8.38).

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}8x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos 8x}{1}=\lim_{x\to 0}8\cos 8x=8\cos 0=8.$$

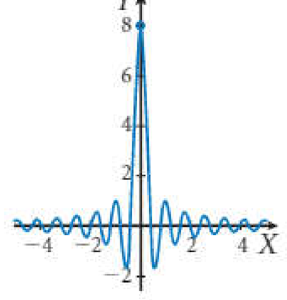


Figura 8.38

Entonces;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}8x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos 8x}{1}=8.$$

En el ejemplo anterior utilizamos el resultado conocido como la regla de L'Hôpital, que enunciamos a continuación:

> Si f y g son derivables y $g'(x)\neq 0$ en un intervalo que contiene a c, excepto quizás en c y además $\lim_{x\to c}f(x)=0$ y $\lim_{x\to c}g(x)=0$, o bien $\lim_{x\to c}f(x)=\pm\infty$ y $\lim_{x\to c}g(x)=\pm\infty$, y si $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe o es $\pm\infty$, entonces
>
> $$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla nos permite en muchos casos resolver indeterminaciones de los tipos:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{-\infty}{-\infty},\quad \frac{\infty}{-\infty},\quad \frac{-\infty}{\infty},$$

lo que a su vez nos permite en otros casos resolver indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$.

Observación: La regla anterior también es válida cuando la variable tiende a ∞ o a $-\infty$, o se trata de límites laterales y c es un extremo del intervalo donde $g'(x)\neq 0$.

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x\to -8}\frac{x^2+7x-8}{x+8}$.

Solución

Tenemos que:

$$\lim_{x\to -8}\left(x^2+7x-8\right)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -8}(x+8)=0.$$

En el ejemplo 1 de la página 130, usando reglas de factorización obtuvimos que

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+7x-8}{x+8}=-9.$$

Calculemos ahora el límite usando la regla de L'Hôpital, es decir, primero calculamos las derivadas del numerador y denominador

$$\left(x^2+7x-8\right)'=2x+7$$

y

$$(x+8)'=1.$$

TIP

Cuando aplicas la regla de L'Hôpital para encontrar $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ debes calcular el límite del cociente de las derivadas del numerador y el denominador, es decir, $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Figura 8.39

Después el límite del cociente de dichas derivadas, (Figura 8.39):

$$\lim_{x\to -8}\frac{2x+7}{1}=\lim_{x\to -8}(2x+7)$$
$$=2(-8)+7$$
$$=-9.$$

Entonces;

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+7x-8}{x+8}=-9.$$

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{\sqrt{x^4+16}-4}$.

Solución:
Tenemos:

$$\lim_{x\to 0}x^4=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x^4+16}-4\right)=0.$$

En el ejemplo 4 de la página 138, multiplicando por el conjugado del denominador obtuvimos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sqrt{x^4+16}-4}=8.$$

Ahora lo calculamos usando la regla de L'Hôpital, es decir, calculamos las derivadas del numerador y denominador y después el límite del cociente de dichas derivadas, (Figura 8.40):

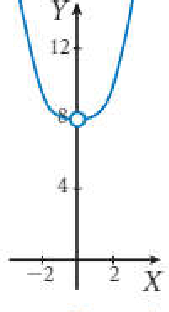


Figura 8.40

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sqrt{x^4+16}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+16}}}$$
$$=\lim_{x\to 0}2\sqrt{x^4+16}$$
$$=2\sqrt{0^4+16}$$
$$=8.$$

3. Calcular $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-x^2-21x+45}{x^3-8x^2+21x-18}$.

Solución:
Tenemos:

$$\lim_{x\to 3}\left(x^3-x^2-21x+45\right)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3}\left(x^3-8x^2+21x-18\right)=0.$$

Utilizamos la regla de L'Hôpital para calcular el límite, es decir, calculamos las derivadas del numerador y denominador y después el límite del cociente de dichas derivadas:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-21x+45}{x^3-8x^2+21x-18}=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-2x-21}{3x^2-16x+21}.$$

Calculamos

$$\lim_{x\to 3}\left(3x^2-2x-21\right)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3}\left(3x^2-16x+21\right)=0.$$

Entonces volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital, (Figura 8.41)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-2x-21}{3x^2-16x+21}&=\lim_{x\to 3}\frac{6x-2}{6x-16}\\&=\frac{6(3)-2}{6(3)-16}\\&=\frac{16}{2}\\&=8.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-21x+45}{x^3-8x^2+21x-18}=8.$$

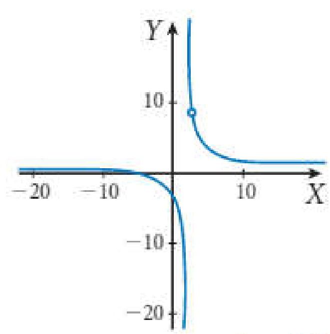


Figura 8.41

4. Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{\tan \pi x}{x^2-1}$.

Solución:
Tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\tan \pi x&=\tan\left(\lim_{x\to 1}\pi x\right)\\&=\tan \pi\\&=0\end{aligned}$$

y

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=1^2-1=0.$$

Calculamos el límite usando la regla de L'Hôpital, es decir, calculamos las derivadas del numerador y denominador y después el límite del cociente de dichas derivadas

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\tan \pi x}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{\pi \sec^2 \pi x}{2x}\\&=\frac{\pi \sec^2 \pi(1)}{2(1)}\\&=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 1}\frac{\tan \pi x}{x^2-1}=\frac{\pi}{2}$, (Figura 8.42).

TIP

La regla de L'Hôpital puede usarse de forma consecutiva, mientras se presente una indeterminación.

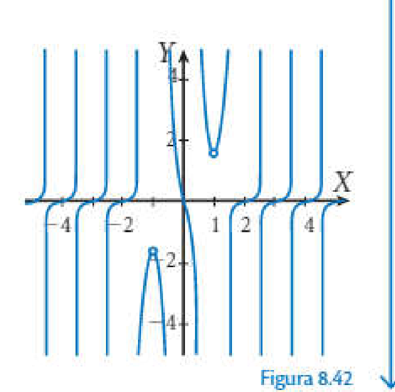


Figura 8.42

5. Calcular $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+2x-7}{4x^2-10x+9}$.

Solución:

Tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} 6x^2+2x-7 &= \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{6x^2+2x-7}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x^2\left(6+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}\right)\\ &= \infty\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} 4x^2-10x+9 &= \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{4x^2-10x+9}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x^2\left(4-\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2}\right)\\ &= \infty.\end{aligned}$$

Calculamos el límite usando la regla de L'Hôpital, es decir, calculamos las derivadas del numerador y denominador y después el límite del cociente de dichas derivadas

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+2x-7}{4x^2-10x+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{12x+2}{8x-10}.$$

Como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} 12x+2 &= \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{12x+2}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x\left(12+\frac{2}{x}\right)\\ &= \infty\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} 8x-10 &= \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{8x-10}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x\left(8-\frac{10}{x}\right)\\ &= \infty,\end{aligned}$$

entonces volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{12x+2}{8x-10} &= \lim_{x\to\infty} \frac{12}{8}\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+2x-7}{4x^2-10x+9}=\dfrac{3}{2}$, (Figura 8.43).

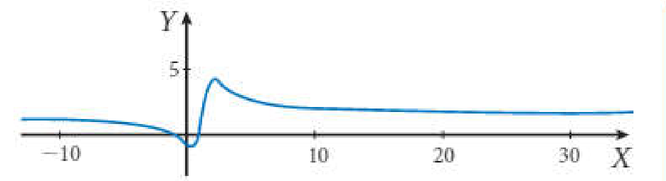


Figura 8.43

6. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} x\,\text{sen}\dfrac{1}{x}$.

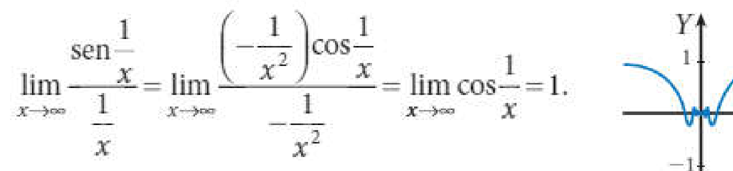
Solución:
Escribimos

$$\lim_{x\to\infty} x\,\text{sen}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\text{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Observamos que:

$$\lim_{x\to\infty}\text{sen}\frac{1}{x}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Calculamos el límite usando la regla de L'Hôpital, es decir, calculamos las derivadas del numerador y denominador y después el límite del cociente de dichas derivadas:



$$\lim_{x\to\infty}\frac{\text{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=1.$$

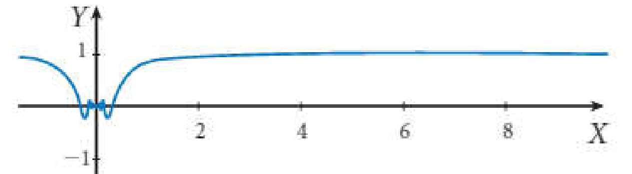


Figura 8.44

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to\infty} x\,\text{sen}\dfrac{1}{x}=1$, (Figura 8.44).

7. Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}\right)$.

Como

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}=\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\infty,$$

se presenta una indeterminación del tipo $\infty-\infty$.
Observamos que:

$$\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos x}-1\right). \qquad (8.2)$$

Como

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2=0 \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0.$$



Para calcular el límite de un cociente ¿siempre podemos utilizar la regla de L'Hôpital?

Pensamiento crítico

¿Cuánto debe valer a para que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cot\frac{x}{2} - a\,\mathrm{sen}\,x}{x-\frac{\pi}{2}} = -1$?

Podemos calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos x}$ usando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-\mathrm{sen}\,x} = 0.$$

Así,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos x} - 1\right) = -1.$$

De (8.2) obtenemos:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos x} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos x} - 1\right) = -\infty,$$

lo cual se puede observar en la Figura 8.45.

Figura 8.45

Ejemplos

Ejercicios

Calcular los siguientes límites utilizando la Regla de L'Hôpital.

1. $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x^2-4x-21}{x-7}$
2. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{4x^3-12x^2-3x+9}{x-3}$
3. $\lim\limits_{x\to -8} \frac{x^2+11x+24}{x^2-64}$
4. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{3x^2-13x-10}{x^2-25}$
5. $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x^2-81}{10\sqrt{x-9}}$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{5x^3-19x^2+16x+4}{x^3-7x^2+16x-12}$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{7x^2-12x+3}{9x^2+x-27}$
8. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{8x^3+9x^2-x}{2x^3-5x^2-6}$
9. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{30x^2+6x-12}{x^4+x^3-19x^2+x-20}$
10. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{-x^3+5x^2+2x}{-6x+11}$
11. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-x^7-12x-19}{-7x^5-16x^3-21}$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x-\cos 5x}{x^2}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\,8x}{\mathrm{sen}\,6x}$
14. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\mathrm{sen}\,3x-\mathrm{sen}\,6x}{x}$
15. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\tan\frac{x}{4}+\cos x}{x-\pi}$
16. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan 11x}{7x}$
17. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{-\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x}{x+\frac{\pi}{2}}$
18. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{4+x}-2}{x-4}$
19. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{4\left(\sqrt[4]{x^3+54}-3\right)}$
20. $\lim\limits_{x\to 60} \frac{12\left(\sqrt[3]{x+4}-4\right)}{\sqrt{x+4}-8}$

Mundo virtual

En esta sección te invitamos a visitar varios sitios que contienen material relacionado con los conceptos de *Límites infinitos*. Algo de ese material está desarrollado por los autores de este libro, pero mucho más ha sido desarrollado por personas de todo el mundo que tienen interés en las matemáticas. En muchos sitios, el material de límites infinitos, es decir, límite cuando la variable tiende a $+\infty$ o $-\infty$, o bien límites cuyo valor es $\pm\infty$ cuando la variable tiende a un punto, suele estar dentro de las secciones de límites usuales, así que puede costar un poco de trabajo encontrarlo.

- http://atenea.matem.unam.mx Éste es un sitio del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en el cual los investigadores del Instituto están creando material para cursos en línea. Puedes entrar como invitado sin necesidad de registrarte. Una vez dentro del sitio, elige la categoría "Cálculo diferencial e integral", dentro de ella, el curso "Cálculo I" y entra a las lecciones de la sección "Límites Infinitos."
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web Sitio del Ministerio de Educación, Salud y Deporte del Gobierno español que contiene unidades didácticas y recursos interactivos desarrollados con la herramienta Descartes. Estos materiales fueron elaborados por profesores de enseñanza media. Selecciona "Aplicaciones", y luego "Análisis". Dentro de "Límites y continuidad de funciones" hay una sección de límites en infinito.
- http://es.wikipedia.org La enciclopedia en línea Wikipedia es uno de los sitios de referencia para encontrar información relacionada con la ciencia y la cultura. En el buscador escribe: Límites al infinito. Esto te lleva a una sección de Asíntotas muy interesante. Es importante tener presente que habla de asíntotas de curvas en el plano, que no necesariamente son gráficas de funciones.
- http://www.wolframalpha.com Esta página es, posiblemente, una de las mejores páginas de matemáticas en la red. Tiene la desventaja de que está escrita en inglés. Además de tener explicaciones sobre muchos temas, tiene interactivos desarrollados con Mathematica, que es un programa de cálculo simbólico muy poderoso. En el buscador escribe "Limit" para ir a la sección correspondiente. En muchos de los ejemplos que tiene de sucesiones $\{a_n\}$ puedes sustituir n por la variable x que toma todos los valores reales.
- http://newton.matem.unam.mx/geolab En este sitio puedes descargar el programa Geolab y el curso para aprender a utilizarlo. En las secciones de Mundo virtual te guiaremos para realizar algunas construcciones relacionadas con los temas de este libro.

Construcciones con Geolab

En las unidades anteriores aprendiste a introducir fórmulas en Geolab para dibujar gráficas de funciones, y también a introducir dos funciones una de ellas con dominio (a,c) y la otra con dominio (c,b). Si las gráficas de las dos funciones se pegan bien, significa que la función combinada tiene límite en c.

Construye ahora funciones racionales como las siguientes y observa su comportamiento para valores de t muy grandes. Recuerda introducir la fórmula usando $t_$ en lugar de t. En la pantalla para introducir la función da valores negativos grandes para a, y valores grandes positivos para b. Seguramente también tendrás que aumentar el número de pasos para que dibuje mejor la curva.

1. $f(t)=\dfrac{2t^2-2t+6}{3t^2-t+1}$ Observa el comportamiento cuando el grado del numerador es igual al del denominador.

2. $f(t)=\dfrac{-t^3-4t+1}{t^2+7}$ Observa el comportamiento cuando el grado del numerador es mayor que el del denominador.

3. $f(t)=\dfrac{t^2-20t+7}{t^3+1}$ Observa el comportamiento cuando el grado del numerador es menor que el del denominador.

4. $f(t)=\cos t$. ¿Tiene límite en ∞?

Construye funciones racionales que no estén definidas en un punto a y observa el comportamiento de la función cuando t se aproxima a dicho punto por la izquierda y por la derecha. Observa, por ejemplo, que las siguientes funciones se comportan diferente cerca de -1.

1. $f(t)=\dfrac{t-1}{t+1}$

2. $f(t)=\dfrac{t-1}{|t+1|}$. Nota. para escribir el valor absoluto utiliza la función $abs()$, así el denominador de esta función se escribe: $abs(t_+1)$

Resumen de la unidad

1. Si $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}=0$ y $f(x)>0$ a la izquierda de c, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$.

2. Si $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}=0$ y $f(x)<0$ a la izquierda de c, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)=-\infty$.

3. La recta $x=c$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si se cumple una de las siguientes igualdades:

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to c^+} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to c} f(x)=\infty \text{ o } \lim_{x\to c} f(x)=-\infty.$$

4. La recta $y=L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si se cumple una de las siguientes igualdades:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \text{ o } \lim_{x\to-\infty} f(x)=L.$$

5. $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ si y solo si $\lim_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)=L.$

6. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ si y solo si $\lim_{t\to 0^-} f\left(\frac{1}{t}\right)=L.$

7. Si n es un número natural, entonces $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$ y $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0.$

8. Una recta $y=mx+b$ con $m\neq 0$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f en ∞ o $-\infty$ si,

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(mx+b)\right)=0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(mx+b)\right)=0$$

respectivamente.

Las funciones racionales, es decir cocientes de polinomios tienen asíntotas oblicuas sólo si el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

9. Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=L$, con L número real, entonces:

   a. $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=\infty.$

   b. $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)=\begin{cases}\infty & \text{si } L>0.\\ -\infty & \text{si } L<0.\end{cases}$

   c. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0.$

   d. $\lim_{x\to\infty} f^n(x)=\infty$ si $n\geq 1.$

10. Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=L$, con L número real, entonces:

   a. $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=-\infty.$

   b. $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)=\begin{cases}-\infty & \text{si } L>0.\\ \infty & \text{si } L<0.\end{cases}$

   c. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0.$

   d. $\lim_{x\to\infty} f^n(x)=\begin{cases}\infty & \text{si } n\geq 1 \text{ es par}.\\ -\infty & \text{si } n\geq 1 \text{ es impar}.\end{cases}$

11. Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ entonces:

   a. $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=\infty.$

   b. $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)=\infty.$

12. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ entonces:

a. $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)+g(x)\big) = -\infty$.

b. $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)g(x)\big) = \infty$.

13. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to\infty}\sqrt{f(x)} = \infty$.

14. Si f' y g' existen y $g'(x) \neq 0$ en un intervalo que contiene a c, excepto quizás en c, $\lim_{x\to c} f(x) = 0$, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ y si $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe o es $\pm\infty$, entonces $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

15. Si f' y g' existen y $g'(x) \neq 0$ en un intervalo que contiene a c, excepto quizás en c, $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$, y si $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe o es $\pm\infty$, entonces $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejercicios de repaso

Determina en cada caso las asíntotas de la gráfica de la función dada.

1. $f(x) = \dfrac{5x^2+3}{x^2+4}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2+5x-5}{x-6}$

3. $f(x) = \dfrac{x-5}{x+5}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2+4x}{x+3}$

5. $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+3)^2}$

6. $f(x) = \dfrac{-3x^3-1}{(x+2)(x^2-2x+4)}$

7. $f(x) = \dfrac{15x-8}{(x-1)(x^2+6)}$

8. $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+x}{x^2-4}$

9. $f(x) = \dfrac{2x^5+x-6}{-(x-1)(x^4+x+1)}$

10. $f(x) = \dfrac{30x^2+6x-12}{(x+5)(x-4)(x^2+1)}$

11. $f(x) = \dfrac{x^5+1}{(x-3)(x+3)(x^2+1)}$

12. $f(x) = \dfrac{-x^4+x^2+20}{(x+3)(x^2+8)}$

Calcula los siguientes límites.

13. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-1}{x}$

14. $\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}\pi x}{1-\sqrt{x}}$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{50+50\cos x}-10}{x}$

16. $\lim_{x\to 0}\frac{8-8\sqrt{\sec x}}{x^2}$

17. $\lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\frac{5}{x}$

18. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)-2\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+1}{x^2}$

19. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\operatorname{sen}x}$

20. $\lim_{x\to 0}\frac{25-25\sqrt{\cos x}}{x^2}$

21. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1}{x^2}$

22. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-2}{x-3}$

23. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-4x^4+x^3+x}{x^4+6x^2+x^3+5x+5}$

24. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[7]{x}-1}$

25. $\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2+x}-4\sqrt{2-x}}{x}$

26. $\lim_{x\to 0}\frac{6\sqrt[5]{1+x}-6}{x}$

27. $\lim_{x\to 12}\frac{1-\sqrt{13-x}}{5-\sqrt{x+13}}$

28. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7-7x^5-6x^2+8}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2+1\right)}$

29. $\lim_{x\to 0}\frac{10\arctan\frac{x}{1+x^2}}{\operatorname{sen}x}$

30. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+6}-\sqrt{6x^2-1}\right)$

Autoevaluación

1. El $\lim\limits_{x\to 6^+} \dfrac{-x^2-11x-28}{x^2-x-30}$ es:

a. -1 **b.** $-\infty$ **c.** ∞ **d.** -130

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 249.

2. El $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{5x^2-7x-6}{x^2+25}$ es:

a. $-\infty$ **b.** $\dfrac{77}{25}$ **c.** 154 **d.** ∞

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 249.

3. El $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{9x^3-x^2+11}{2x^3+3x}$ es:

a. $-\infty$ **b.** ∞ **c.** 0 **d.** $\dfrac{9}{2}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 257.

4. El $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-x^3+8x^2-23}{x^4-2x^2+7x}$ es:

a. 0 **b.** -1 **c.** ∞ **d.** $-\infty$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 257.

5. El $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{16x^4+x^3-x^2}}{12x^2+x-6}$ es:

a. ∞ **b.** $\dfrac{1}{4}$ **c.** $\dfrac{1}{3}$ **d.** $-\infty$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 257.

6. La ecuación de la asíntota oblicua de

$$f(x)=\frac{8x^4+2x^3-2x^2-6x+10}{3x^3+x^2-5}\text{ es:}$$

a. No tiene asíntota oblicua

b. $\dfrac{8}{3}x-\dfrac{2}{9}$

c. $-\dfrac{8}{3}x$

d. $\dfrac{3}{8}x+\dfrac{13}{24}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 266 y 267.

7. El $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2}{2-x}-\dfrac{x}{2-x}\right)$ es:

a. ∞ **b.** 0 **c.** $-\infty$ **d.** $\dfrac{3}{2}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 268 y 269.

8. El $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{9x^2+6}-3x\right)$ es:

a. ∞ **b.** 0 **c.** $-\infty$ **d.** 3

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 277.

9. El $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec 2x-\sec 3x}{x^2}$ es:

a. $-\dfrac{7}{2}$

b. 0

c. $-\dfrac{5}{2}$

d. ∞

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 281.

10. La ecuación de la asíntota oblicua de

$$f(x)=\frac{4x^5-7x^4+2x^2+9x-12}{3x^6-5x^4-x^3+x}\text{ es:}$$

a. $\dfrac{4}{3}x$

b. $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{12}{7}$

c. No tiene asíntota oblicua

d. $\dfrac{4}{3}x-\dfrac{9}{16}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 266 y 267.

Heteroevaluación

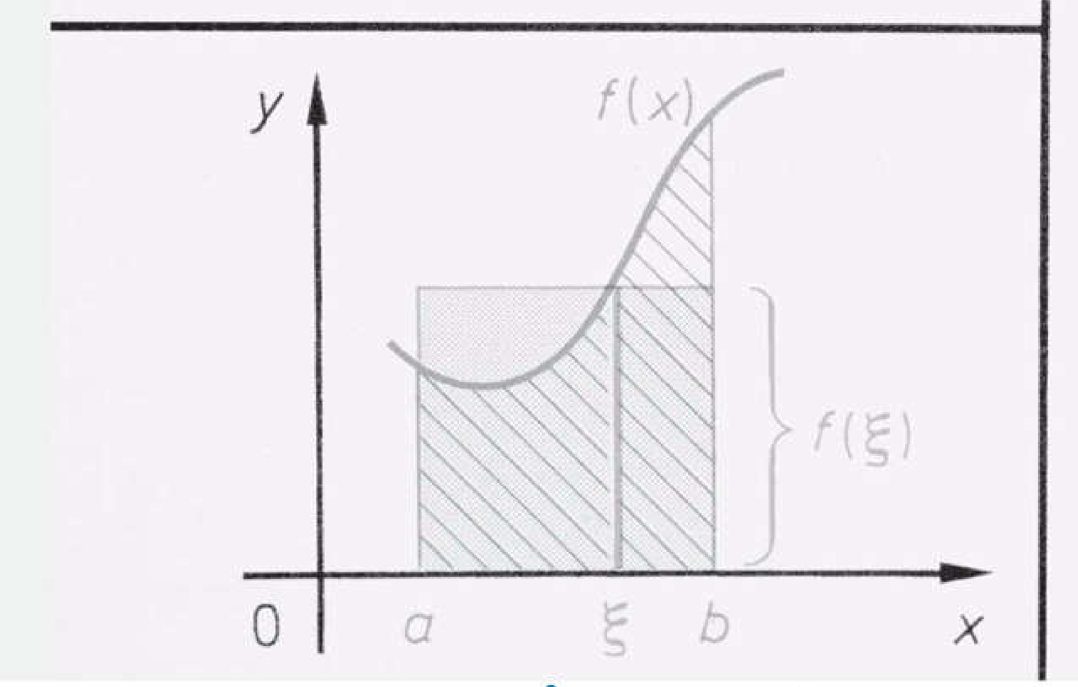
1. Calcula $\lim_{x \to -\frac{9}{2}} \frac{-25x}{(2x+9)^2}$.

2. Calcula $\lim_{x \to 6^+} \left(\frac{3}{x-6} - \frac{8}{x^2-36} \right)$.

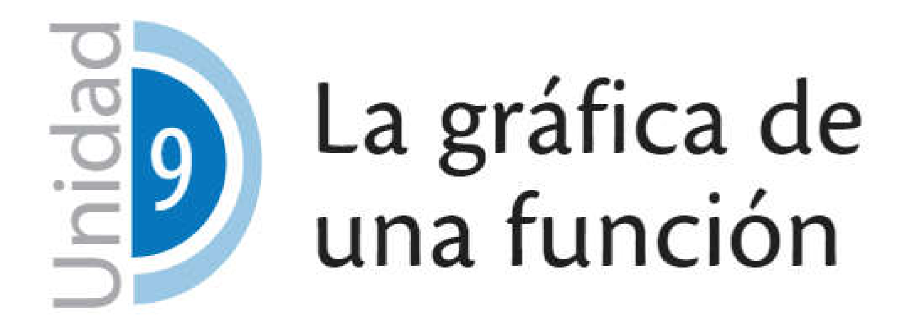
3. Calcula la ecuación de la asíntota oblicua de $f(x) = \frac{6x^3+5x^2-7x+9}{5x^2-x}$.

4. Calcula $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{6x^3}{2x^2-1} - \frac{7x^4}{x^3+3} \right)$.

5. Calcula $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$.



La gráfica de una función f es la representación de los pares ordenados $(x, f(x))$.



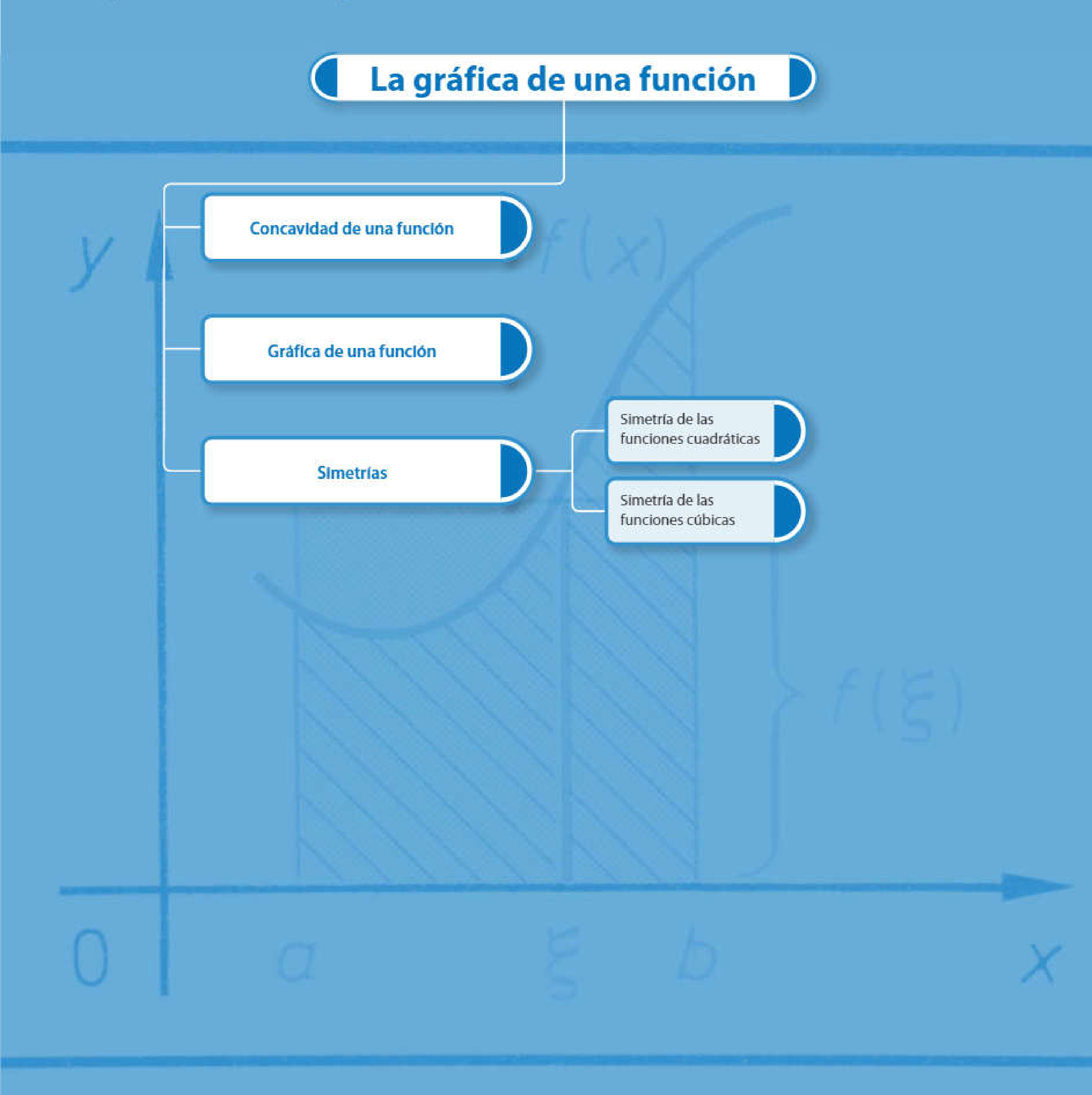
Unidad 9 La gráfica de una función

El sistema rectangular de coordenadas del plano cartesiano, así llamado en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), considerado el inventor de la *geometría analítica*, nos permite asociar a cada pareja ordenada de números reales un punto del plano. En particular, podemos localizar las parejas $(x, f(x))$, donde f es una función. La colección de todos los puntos asociados a estas parejas es llamada la gráfica de f.

La manera más sencilla de entender el comportamiento de una función es mediante la observación de su gráfica. Es mucho más fácil ver una gráfica que ver una tabla de valores o una expresión algebraica.

Para poder dibujar la gráfica de una función f podemos seguir dos caminos: evaluar la función en muchos números x localizar los puntos $(x, f(x))$, y unirlos mediante una curva; o bien, seleccionar números importantes, como aquellos en donde la función no es continua o no es derivable, los puntos donde alcanza sus máximos o sus mínimos locales, los puntos donde cambia de concavidad y a partir de estos puntos, saber en qué intervalos la función es creciente o decreciente, cóncava hacia arriba o hacia abajo. Con esta información podemos marcar unos cuantos puntos y unirlos mediante curvas suaves en los intervalos donde la función es derivable.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.



Concavidad de una función

TIP

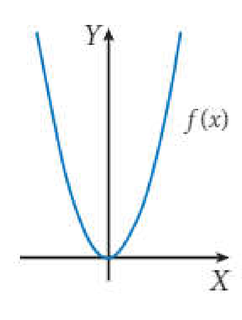
Si f es cóncava hacia arriba en (a,b), entonces $f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}$ si $x, y \in (a,b)$.

De manera intuitiva, la gráfica de una función es cóncava hacia arriba (ver Figura 9.1) si tiene la forma de una taza y es cóncava hacia abajo si tiene la forma de una taza volteada hacia abajo (ver Figura 9.2).

Una manera de determinar la concavidad de una función es usando la derivada.

La gráfica de una función derivable f en un intervalo abierto (a,b), donde a es un número real o $-\infty$ y b es un número real o ∞, es:

- *Cóncava hacia arriba* en (a,b) si $f'(x)$ es estrictamente creciente en (a,b).
- *Cóncava hacia abajo* en (a,b) si $f'(x)$ es estrictamente decreciente en (a,b).



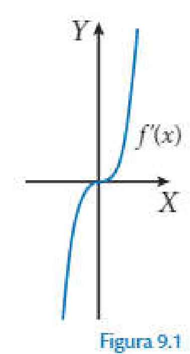
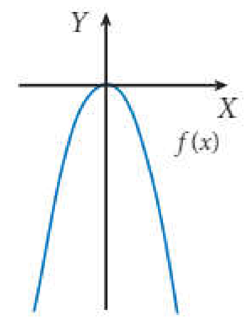


Figura 9.1



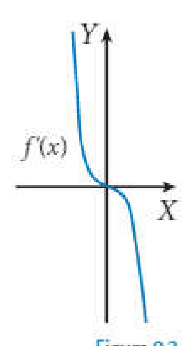


Figura 9.2

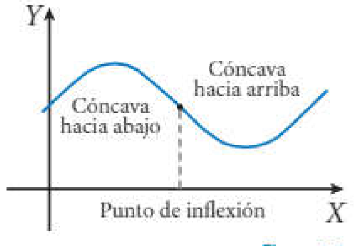


Figura 9.3

Un *punto de inflexión* de una función f es un punto $P(x, f(x))$ tal que f es continua en x y la gráfica cambia de concavidad en P, Figura 9.3.

Un criterio para determinar la concavidad de una función con segunda derivada es el siguiente:

> Supongamos que f tiene segunda derivada en (a, b):
> **i.** Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).
> **ii.** Si $f''(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Los resultados anteriores se deben a:

- Si $f''(x)>0$ para toda $x \in (a,b)$, entonces $f'(x)$ es estrictamente creciente y por tanto, f es cóncava hacia arriba en (a,b).
- Si $f''(x)<0$ para toda $x \in (a,b)$, entonces $f'(x)$ es estrictamente decreciente y por tanto, f es cóncava hacia abajo en (a,b).

Un caso especial del criterio anterior es el siguiente resultado:

> Si f es una función cuya segunda derivada $f''(x)$ es **distinta de cero** para toda $x \in (a, b)$ y
> **i.** Si $f''(c) > 0$ en algún punto $c \in (a, b)$, entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).
> **ii.** Si $f''(c) < 0$ en algún punto $c \in (a, b)$, entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b). (9.1)

Un criterio para determinar si un punto es de inflexión es el siguiente:

Primer criterio para puntos de inflexión

Supongamos que f tiene segunda derivada en (a, b) y $c \in (a, b)$:

i. Si $f''(x) > 0$ en (a, c) y $f''(x) < 0$ en (c, b), entonces f tiene un punto de inflexión en c.

ii. Si $f''(x) < 0$ en (a, c) y $f''(x) > 0$ en (c, b), entonces f tiene un punto de inflexión en c.

Observación:

La validez de i se debe a que f es continua en c por ser f derivable y a que la condición sobre $f''(x)$ implica que f es cóncava hacia arriba en (a,c) y cóncava hacia abajo en (c,b). De modo similar se justifica ii.

TIP

Las funciones lineales $f(x) = ax + b$ no son cóncavas hacia arriba ni hacia abajo en ningún intervalo, ya que su derivada $f'(x) = a$ es constante y por tanto, f' no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente en ningún intervalo.

Ejemplos

1. Analizar la concavidad de la función $f(x) = x^3$ y encontrar los puntos de inflexión.

Solución:

Calculamos las primeras dos derivadas de la función:

$$f'(x) = 3x^2 \qquad f''(x) = 6x.$$

Ahora analizamos el signo de la segunda derivada:

$$f''(x) = 6x > 0 \quad \text{si} \quad x > 0,$$

así, entonces f es cóncava hacia arriba si en $(0, \infty)$.

Análogamente

$$f''(x) = 6x < 0 \quad \text{si} \quad x < 0,$$

entonces f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$.

	$-\infty$		0		∞
f''		$-$	0	$+$	
Concavidad		$\frown$		$\smile$	

Por el Primer criterio para puntos de inflexión, en $x = 0$ hay un punto de inflexión: $(0, f(0)) = (0,0)$, ver Figura 9.4.

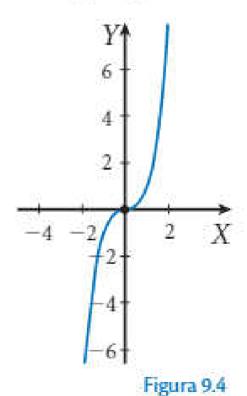


Figura 9.4

TIP

Un punto de inflexión de una función f es un punto $P(c, f(c))$ tal que f es continua en c y la gráfica cambia de concavidad en P.



Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) = 0$, entonces ¿f tiene un punto de inflexión en c?

TIP

Supongamos que f tiene segunda derivada en (a,b) y $c \in (a,b)$. Si $f''(x) < 0$ en (a,c) y $f''(x) > 0$ en (c,b), entonces f tiene un punto de inflexión en c.

2. Analizar la concavidad de la función $f(x) = x^4 - 6x^2$ y encontrar los puntos de inflexión.

Solución:

Calculamos las primeras dos derivadas de la función:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x \qquad f''(x) = 12x^2 - 12.$$

Ahora analizamos el signo de la segunda derivada:

- $f''(x) = 12x^2 - 12 > 0$ si:

$$12x^2 - 12 > 0$$
$$12x^2 > 12$$
$$x^2 > 1$$
$$|x| > 1,$$

es decir,

$$x > 1 \quad \text{o} \quad x < -1,$$

entonces f es cóncava hacia arriba en los intervalos abiertos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$.

- Análogamente $f''(x) = 12x^2 - 12 < 0$ si:

$$12x^2 - 12 < 0$$
$$12x^2 < 12$$
$$x^2 < 1$$
$$|x| < 1,$$

es decir,

$$-1 < x < 1,$$

entonces f es cóncava hacia abajo en $(-1,1)$.

	$-\infty$		-1		1		∞
f''		+	0	−	0	+	
Cóncava hacia		⌣		⌢		⌣	

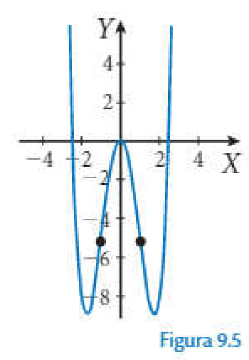


Figura 9.5

Por el Primer criterio para puntos de inflexión, en $x = -1$ hay un punto de inflexión: $(-1, f(-1)) = (-1, -5)$.

- Dado que, f es cóncava hacia abajo en $(-1,1)$, cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$ y f es continua en $x = 1$, entonces para este valor hay un punto de inflexión: $(1, f(1)) = (1, -5)$. (Figura 9.5).

3. Analizar la concavidad de la función $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3$ y encontrar los puntos de inflexión.

Solución:

Calculamos las derivadas de la función:

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \qquad f''(x) = x^3 - 4x.$$

En este caso no es inmediato determinar el signo de la segunda derivada, así que primero encontramos los puntos en los que vale cero:

$$x^3 - 4x = 0$$
$$x\left(x^2 - 4\right) = 0$$
$$x(x-2)(x+2) = 0,$$

es decir

$$x = 0, \quad x = 2 \quad \text{y} \quad x = -2.$$

Estos tres puntos determinan los intervalos abiertos:

$$(-\infty,-2), \quad (-2,0), \quad (0,2) \ \text{ y } \ (2,\infty).$$

Así, la segunda derivada no se anula en dichos intervalos. Podemos aplicar lo dicho en el recuadro 9.1 para ver qué signo tiene f'' en cada uno de estos intervalos.

Elegimos un punto en cada intervalo y evaluamos en él la segunda derivada:

- $-3 \in (-\infty,-2)$:
$$f''(-3) = (-3)^3 - 4(-3) = -15 < 0,$$
entonces f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty,-2)$.
- $-1 \in (-2,0)$:
$$f''(-1) = (-1)^3 - 4(-1) = 3 > 0,$$
entonces f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-2,0)$.
- $1 \in (0,2)$:
$$f'(1) = (1)^3 - 4(1) = -3 < 0,$$
entonces f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(0,2)$.
- $3 \in (2,\infty)$:
$$f''(3) = (3)^3 - 4(3) = 15 > 0,$$
entonces f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(2,\infty)$.

	$-\infty$		-2		0		2		∞
f		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Concavidad		⌢		⌣		⌢		⌣	

Hay puntos de inflexión en: $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$ y dichos puntos son, (Figura 9.6):

$$\left(-2, f(-2)\right) = \left(-2, \frac{56}{15}\right)$$
$$\left(0, f(0)\right) = (0,0)$$
$$\left(2, f(2)\right) = \left(2, -\frac{56}{15}\right).$$

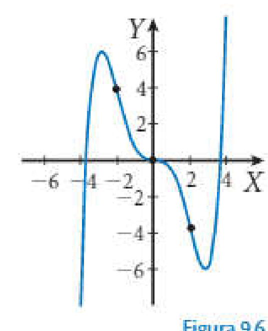


Figura 9.6

Ejemplos

TIP

A una función cóncava hacia arriba también se le llama convexa. Cuando así se hace, a una cóncava hacia abajo simplemente se le llama cóncava.

Un criterio que puede ser útil para determinar si un punto es de inflexión para una función con tercera derivada es el siguiente:

Segundo criterio para puntos de inflexión

> Supongamos que f tiene tercera derivada en $c \in (a, b)$:
> Si $f''(c)=0$ y $f'''(c) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en c.

Observación:

El siguiente argumento justifica el criterio anterior cuando $f'''(c)>0$. Como f tiene tercera derivada en (a,b), entonces es derivable en ese intervalo y por tanto f es continua en c.

Por la definición de derivada, $f'''(c)>0$ significa que

$$\lim_{x\to c}\frac{f''(x)-f''(c)}{x-c}>0,$$

de aquí se puede concluir que:

$$\frac{f''(x)-f''(c)}{x-c}>0 \qquad (9.2)$$

para x cercanos a c.

Si x está a la derecha de c, es decir, $c<x$, entonces $x-c>0$, de donde, por (9.2),

$$f''(x)-f''(c)>0$$

y como $f''(c)=0$, entonces $f''(x)>0$.

Si x está a la izquierda de c, es decir, $c>x$ entonces $x-c<0$, de donde, por (9.2),

$$f''(x)-f''(c)<0$$

y como $f''(c)=0$, entonces $f''(x)<0$.

Por el Primer criterio para puntos de inflexión (página 297), f tiene un punto de inflexión en c.

Análogamente puede justificarse el caso en que $f'''(c)<0$.



- Determinar los puntos de inflexión de la función $f(x)=\operatorname{sen}(3x)+5x$ que se obtienen a partir del Segundo criterio para puntos de inflexión.

Solución:

Calculamos las primeras tres derivadas de f

$$f'(x)=3\cos(3x)+5.$$
$$f''(x)=-9\operatorname{sen}(3x)$$
$$f'''(x)=-27\cos(3x)$$

Determinamos los puntos donde se cumple que $f''(x)=0$; o sea,

$$-9\operatorname{sen}(3x)=0$$
$$\operatorname{sen}(3x)=0,$$

Como $\operatorname{sen}u=0$ cuando $u=n\pi$ donde n es cualquier número entero, entonces $\operatorname{sen}(3x)=0$ cuando $3x=n\pi$, o lo que es lo mismo si $x=\frac{n\pi}{3}$, donde n es cualquier número entero.

TIP

Supongamos que f tiene tercera derivada en $c\in(a,b)$: Si $f''(c)=0$ y $f'''(c)\neq 0$, entonces f tiene un punto inflexión en c.

Ejemplo

Finalmente

$$f'''\left(\frac{n\pi}{3}\right)=-27\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Esta derivada no es 0, debido a que el coseno solo se anula en los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, y $\frac{n\pi}{3}$ no es de esa forma, pues si lo fuera

$$\frac{n\pi}{3}=(2m+1)\frac{\pi}{2}$$

para números enteros n y m. Entonces

$$2n=3(2m+1)$$

lo cual es imposible, ya que el lado izquierdo es par y el derecho impar Entonces, por el Segundo criterio para puntos de inflexión, cada punto $\frac{n\pi}{3}$ es un punto de inflexión de $f(x)=\operatorname{sen}(3x)+5x$.

Pensamiento crítico

Si una función f continua es cóncava hacia abajo en el intervalo (a,c) y cóncava hacia arriba en (c,b), ¿qué podemos decir del punto c?

Ejercicios

Analiza en cada caso la concavidad de la función y encuentra los puntos de inflexión.

1. $f(x)=-4x^3+12x^2-8x$
2. $f(x)=-x^3+2x^2+x-2$
3. $f(x)=x^3+4x^2+4x$
4. $f(x)=-x^4+6x^2-3$
5. $f(x)=5x^4-12x^3+6x^2$
6. $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$
7. $f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{8}{3}x^3+6x^2-9$
8. $f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{3}{5}x^4-\frac{6}{5}x^3-2x^2+\frac{21}{5}x-\frac{9}{5}$
9. $f(x)=x^4+4x^3-4x^2-16x$
10. $f(x)=x^5-4x^3+4x$

Gráfica de una función

Para hacer el análisis completo de una función y dibujar su gráfica debemos seguir los pasos que se presentan en la siguiente lista:

a. Determinar el dominio de la función.
b. Encontrar los puntos de intersección de la gráfica de la función con los ejes coordenados.
c. Analizar la continuidad de la función.
d. Calcular la primera derivada.
e. Determinar los puntos críticos.
f. Determinar los intervalos de monotonía.
g. Encontrar los máximos y mínimos de la función.
h. Calcular la segunda derivada.
i. Analizar la concavidad de la función.
j. Encontrar los puntos de inflexión (cambio de concavidad en puntos de continuidad).

TIP

La palabra asíntota proviene del griego *ἀσύμπτωτος*, que significa *no coincide*.

k. Si el dominio de la función es una unión de intervalos, calcular los límites laterales en los extremos de dichos intervalos, lo que nos servirá más adelante para determinar las asíntotas verticales.

l. En su caso, calcular los límites cuando la variable tiende a infinito o a menos infinito.

m. Encontrar las asíntotas.

n. Dibujar la gráfica.

Ejemplos

1. Analizar la siguiente función y dibujar su gráfica $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4}$.

Solución:

a. Dominio de la función.

Como el denominador nunca se hace cero y la función es un cociente de funciones polinomiales, entonces el dominio natural son todos los números reales. Así, $Domf=\mathbb{R}$.

b. Intersecciones con los ejes.

- Con el eje X. Resolvemos $f(x)=0$.

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2+4}=0$$
$$x^2+4x+4=0$$
$$(x+2)^2=0$$
$$x+2=0$$
$$x=-2,$$

así que el punto $(-2,0)$ es el punto de la gráfica que se encuentra sobre el eje X.

- Con el eje Y. Hacemos $x=0$.

$$f(0)=\frac{(0)^2+4(0)+4}{(0)^2+4}$$
$$=\frac{4}{4}$$
$$=1,$$

de donde el punto $(0,1)$ es el punto de la gráfica que se encuentra sobre el eje Y.

c. Continuidad.

Como la función es un cociente de funciones continuas en $\mathbb{R}$ y su denominador x^2+4 no se anula en $\mathbb{R}$, entonces la función f es continua en $\mathbb{R}$.

- Primera derivada de $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4}$.

Pensamiento crítico

¿Cuánto deben valer a y b para que la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{ax+b}$ corte al eje Y en el punto de coordenadas $(0,1)$ y tenga como asíntota vertical a la recta $x=-\dfrac{1}{3}$?

$$f'(x)=\frac{(2x+4)(x^2+4)-2x(x^2+4x+4)}{(x^2+4)^2}$$
$$=\frac{2x^3+8x+4x^2+16-2x^3-8x^2-8x}{(x^2+4)^2}$$
$$=\frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2},$$

por lo tanto, $f'(x)=\dfrac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$ para toda $x\in\mathbb{R}$.

d. Puntos críticos.
Como la derivada está definida en todo $\mathbb{R}$ entonces los únicos puntos críticos son aquellos en los que la primera derivada vale cero. Resolvemos $f'(x)=0$.

$$\frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}=0$$
$$-4x^2+16=0$$
$$x^2=4,$$

es decir, los puntos críticos son

$$x=-2 \quad \text{y} \quad x=2.$$

e. Intervalos de monotonía
Los intervalos donde la derivada no cambia de signo quedan determinados por los puntos en los que ella se anula:

$$(-\infty,-2], \quad [-2,2] \quad \text{y} \quad [2,\infty).$$

En cada uno de los correspondientes intervalos abiertos elegimos un punto y evaluamos la derivada para saber si es positiva o negativa

- $-3\in(-\infty,-2)$ y $f'(-3)=\dfrac{-4(-3)^2+16}{((-3)^2+4)^2}=\dfrac{-20}{169}<0.$

  Así, $f'(x)\leq 0$ para $x\in(-\infty,-2]$ y entonces la función es decreciente en $(-\infty,-2)$.

- $0\in(-2,2)$ y $f'(0)=\dfrac{-4(0)^2+16}{((0)^2+4)^2}=1>0.$

  Así, $f'(x)\geq 0$ para $x\in[-2,2]$ y entonces la función es creciente en $[-2,2]$.

- $4\in(2,\infty)$ y $f'(4)=\dfrac{-4(4)^2+16}{((4)^2+4)^2}=-\dfrac{48}{289}<0.$

  Así, $f'(x)<0$ para $x\in[2,\infty)$ y entonces la función es decreciente en $(2,\infty)$.

- Resumen de crecimiento:

	$-\infty$		-2		2		∞
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	0	↗	2	↘	

f. Máximos y mínimos.
Los puntos críticos son -2 y 2.

- A la izquierda de $x=-2$ la derivada es negativa (\ ) y a la derecha es positiva (/), entonces f tiene un mínimo en $x=-2$.
- A la izquierda de $x=2$ la derivada es positiva (/) y a la derecha es negativa (\ ), entonces f tiene un máximo en $x=2$.
  Máximo en: $x=2$, mínimo en: $x=-2$.

g. Segunda derivada.
La primera derivada de f es $f'(x)=\dfrac{-4x^2+16}{\left(x^2+4\right)^2}$. Entonces la segunda derivada es:

$$\begin{aligned}
f''(x)&=\frac{-8x\left(x^2+4\right)^2-2\left(x^2+4\right)2x\left(-4x^2+16\right)}{\left(x^2+4\right)^4}\\
&=\frac{\left(x^2+4\right)\left(-8x\left(x^2+4\right)-2(2x)\left(-4x^2+16\right)\right)}{\left(x^2+4\right)^4}\\
&=\frac{-8x\left(x^2+4\right)-4x\left(-4x^2+16\right)}{\left(x^2+4\right)^3}\\
&=\frac{-8x^3-32x+16x^3-64x}{\left(x^2+4\right)^3}\\
&=\frac{8x^3-96x}{\left(x^2+4\right)^3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f''(x)=\dfrac{8x^3-96x}{\left(x^2+4\right)^3}$ para toda $x\in\mathbb{R}$.

h. Concavidad.
Igualamos la segunda derivada a cero:

$$\begin{aligned}
\frac{8x^3-96x}{\left(x^2+4\right)^3}&=0\\
8x^3-96x&=0\\
8x\left(x^2-12\right)&=0\\
8x\left(x-\sqrt{12}\right)\left(x+\sqrt{12}\right)&=0,
\end{aligned}$$

de donde

$$x=0, \qquad x-\sqrt{12}=0, \qquad x+\sqrt{12}=0,$$

es decir

$$x=0, \qquad x=\sqrt{12}, \qquad x=-\sqrt{12}.$$

Los intervalos abiertos donde la segunda derivada mantiene el mismo signo quedan determinados por los puntos donde la segunda derivada vale cero:

$$\left(-\infty,-\sqrt{12}\right), \quad \left(-\sqrt{12},0\right), \quad \left(0,\sqrt{12}\right) \quad \text{y} \quad \left(\sqrt{12},\infty\right).$$

En cada intervalo elegimos un punto y evaluamos la segunda derivada para ver si es positiva o negativa

- $-4\in\left(-\infty,-\sqrt{12}\right)$ y

$$f''(-4)=\frac{8(-4)^3-96(-4)}{\left((-4)^2+4\right)^3}=\frac{-128}{20^3}<0.$$

Entonces por el criterio 9.1 la función f es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,-\sqrt{12}\right)$.

- $-1\in\left(-\sqrt{12},0\right)$ y

$$f''(-1)=\frac{8(-1)^3-96(-1)}{\left((-1)^2+4\right)^3}=\frac{88}{5^3}>0.$$

Entonces por el criterio 9.1 la función f es cóncava hacia arriba en $\left(-\sqrt{12},0\right)$.

- $1\in\left(0,\sqrt{12}\right)$ y

$$f''(1)=\frac{8(1)^3-96(1)}{\left((1)^2+4\right)^3}=\frac{-88}{5^3}<0.$$

Entonces por el criterio 9.1 la función f es cóncava hacia abajo en $\left(0,\sqrt{12}\right)$.

- $5\in\left(\sqrt{12},\infty\right)$ y

$$f''(5)=\frac{8(5)^3-96(5)}{\left(5^2+1\right)^3}=\frac{520}{26^3}>0.$$

Entonces por el criterio 9.1 la función f es cóncava hacia arriba en $\left(\sqrt{12},\infty\right)$.

- Resumen de concavidad:

	$-\infty$		$-\sqrt{12}$		0		$\sqrt{12}$		∞
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Concavidad		$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

i. Puntos de inflexión.

De la tabla del punto anterior, observamos que la función tiene tres puntos de inflexión, para los valores $x=-\sqrt{12}$, $x=0$ y $x=\sqrt{12}$.

Hay puntos de inflexión para: $x=-\sqrt{12}$, $x=0$ y $x=\sqrt{12}$ y estos son:

$\left(-\sqrt{12}, 1-\frac{\sqrt{12}}{4}\right)$; $(0,1)$ y $\left(\sqrt{12}, 1+\frac{\sqrt{12}}{4}\right)$.

j. Límites laterales.

Como el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$ entonces no hay que calcular límites laterales.

k. Límites cuando la variable tiende a ∞ o $-\infty$.

- x tiende a ∞.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}$$

$$=1.$$

- x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+4}{x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}$$

$$=1.$$

l. Asíntotas.

- Como los grados del numerador y el denominador son iguales entonces no hay asíntotas oblicuas.
- No hay asíntotas verticales porque la función está definida en todo $\mathbb{R}$.
- Como $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4}{x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+4}{x^2+4}=1$ entonces la recta $y=1$ es una asíntota horizontal en ∞ y $-\infty$.

  Asíntota horizontal: $y=1$. Asíntota vertical: no tiene.

m. Gráfica; (Figura 9.7)

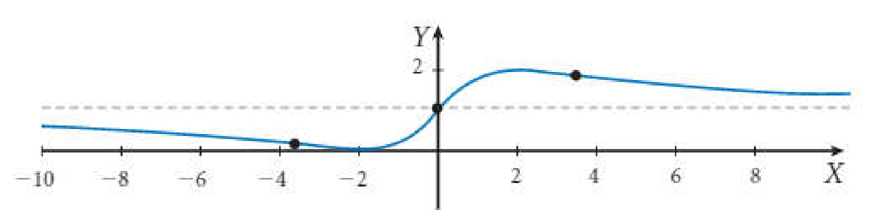


Figura 9.7

2. Analizar la siguiente función y dibujar su gráfica. $f(x)=\dfrac{25x-5}{(x+2)^2}$.

Solución:

a. Dominio de la función.
El denominador se hace cero si

$$(x+2)^2=0$$
$$x=-2.$$

Como la función es un cociente de funciones polinomiales, el dominio es $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b. Intersecciones con los ejes.

- Con el eje X. Resolvemos $f(x)=0$.

$$\frac{25x-5}{(x+2)^2}=0$$
$$25x-5=0$$
$$x=\frac{1}{5},$$

de donde el punto $\left(\frac{1}{5},0\right)$ es el punto de la gráfica que se encuentra sobre el eje X.

- Con el eje Y. Hacemos $x=0$.

$$f(0)=\frac{25(0)-5}{(0+2)^2}=\frac{-5}{4},$$

de donde el punto $\left(0,-\frac{5}{4}\right)$ es el punto de la gráfica que se encuentra sobre el eje Y.

c. Continuidad.
Como la función es un cociente de funciones continuas en $\mathbb{R}$ y su dominio es $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ entonces la función f es continua en $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

TIP
La primera calculadora gráfica fue fabricada por Casio en 1985 y era el modelo Casio fx-7000G.

Pensamiento crítico
¿Cuáles deben ser los valores de a,b y c para que la gráfica de la función $f(x)=ax^2+bx+c$ corte a los ejes coordenados en los puntos de coordenadas $(1,0)$ y $(0,5)$ y tenga un mínimo absoluto en $x=3$?

d. Primera derivada de $f(x)=\dfrac{25x-5}{(x+2)^2}$.

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{(25)(x+2)^2-2(x+2)(25x-5)}{(x+2)^4}\\
&=\frac{(x+2)\big(25(x+2)-2(25x-5)\big)}{(x+2)^4}\\
&=\frac{25(x+2)-2(25x-5)}{(x+2)^3}\\
&=\frac{25x+50-50x+10}{(x+2)^3}\\
&=\frac{-25x+60}{(x+2)^3}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $f'(x)=\dfrac{-25x+60}{(x+2)^3}$ para todo $x\neq-2$.

e. Puntos críticos.

Como la derivada está definida en todo el dominio de f entonces los puntos críticos son los puntos del dominio $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ en los que la derivada vale cero. Resolvemos $f'(x)=0$.

$$
\begin{aligned}
\frac{-25x+60}{(x+2)^3}&=0\\
-25x+60&=0\\
-25x&=-60\\
x&=\frac{12}{5}.
\end{aligned}
$$

Así, existe un solo punto crítico, $x=\dfrac{12}{5}$.

f. Intervalos de monotonía

Como la función no está definida en $x=-2$, entonces los intervalos de crecimiento o decrecimiento quedan determinados por el punto crítico y el punto donde no está definida f:

$$(-\infty,-2),\quad \left(-2,\frac{12}{5}\right],\quad \left[\frac{12}{5},\infty\right).$$

En cada uno de los correspondientes intervalos abiertos elegimos un punto y evaluamos la derivada para saber cuál es el signo de ésta en el intervalo.

- $-3\in(-\infty,-2)$ y $f'(-3)=\dfrac{-25(-3)+60}{(-3+2)^3}=\dfrac{135}{-1}<0$.

  Así, $f'(x)\leq0$ para $x\in(-\infty,-2)$ y entonces, la función es decreciente en $(-\infty,-2)$.

- $0 \in \left(-2, \frac{12}{5}\right)$ y $f'(0) = \frac{-25(0)+60}{(0+2)^3} = \frac{60}{2^3} > 0.$

  Así, $f'(x) \leq 0$ para $x \in \left(-2, \frac{12}{5}\right]$ y entonces, la función es creciente en $\left(-2, \frac{12}{5}\right]$.

- $4 \in \left(\frac{12}{5}, \infty\right)$ y $f'(4) = \frac{-25(4)+60}{(4+2)^3} = \frac{-40}{6^3} < 0.$

  Así, $f'(x) \leq 0$ para $x \in \left[\frac{12}{5}, \infty\right)$ y entonces, la función es decreciente en $\left[\frac{12}{5}, \infty\right)$.

- Resumen de crecimiento:

	$-\infty$		-2		$\frac{12}{5}$		∞
f'		$-$	■	$+$	0	$-$	
f		↘	■	↘	$\frac{125}{44}$	↘	

g. Máximos y mínimos.

Como a la izquierda de $x = \frac{12}{5}$ la derivada es positiva (/) y a la derecha es negativa (\ ), entonces f tiene un máximo en $x = \frac{12}{5}$.

h. Segunda derivada.

La primera derivada es $f'(x) = \frac{-25x+60}{(x+2)^3}$ entonces la segunda derivada es:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-25(x+2)^3 - 3(x+2)^2(-25x+60)}{(x+2)^6} \\
&= \frac{(x+2)^2(-25(x+2) - 3(-25x+60))}{(x+2)^6} \\
&= \frac{-25(x+2) - 3(-25x+60)}{(x+2)^4} \\
&= \frac{-25x - 50 + 75x - 180}{(x+2)^4} \\
&= \frac{50x - 230}{(x+2)^4}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $f''(x) = \frac{50x-230}{(x+2)^4}$ para toda $x \neq -2$.

i. Concavidad.

Igualamos la segunda derivada a cero.

$$\frac{50x-230}{(x+2)^4}=0$$
$$50x-230=0$$
$$50x=230$$
$$x=\frac{23}{5}.$$

Los intervalos abiertos donde la segunda derivada mantiene el mismo signo están determinados por el punto $x=-2$, los puntos donde no está definida y donde ella vale cero son:

$$(-\infty,-2),\quad \left(-2,\frac{23}{5}\right) \text{ y } \left(\frac{23}{5},\infty\right).$$

En cada intervalo elegimos un punto y evaluamos la segunda derivada para ver si es positiva o negativa

- $-3\in(-\infty,-2)$ y

$$f''(-3)=\frac{50(-3)-230}{(-3+2)^4}=\frac{-380}{1}<0.$$

Entonces por el criterio 9.1 la función f es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-2)$.

- $0\in\left(-2,\frac{23}{5}\right)$ y

$$f''(0)=\frac{50(0)-230}{(0+2)^4}=\frac{-230}{2^4}<0.$$

Entonces por el criterio 9.1 la función f es cóncava hacia abajo en $\left(-2,\frac{23}{5}\right)$.

- $5\in\left(\frac{23}{5},\infty\right)$ y

$$f''(5)=\frac{50(5)-230}{(5+2)^4}=\frac{20}{7^4}>0.$$

Entonces por el criterio 9.1 la función f es cóncava hacia arriba en $\left(\frac{23}{5},\infty\right)$.

- Resumen de concavidad:

	$-\infty$		-2		$\frac{23}{5}$		∞
f''		$-$	■	$-$	0	$+$	
Concavidad		⌢	■	⌢		⌣	

j. Puntos de inflexión.
De la tabla del punto anterior y por ser f continua en $x=\frac{23}{5}$, observamos que la función tiene un punto de inflexión, para ese punto.
Hay un punto de inflexión para: $x=\frac{23}{5}$ y éste es $\left(\frac{23}{5},\frac{205}{363}\right)$.

k. Límites laterales.
Como la función está definida en $(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$, entonces hay que calcular los límites laterales en $x=-2$.

- $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{25x-5}{(x+2)^2}$.

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{25x-5}{(x+2)^2}=\lim_{x\to-2^+}\left((25x-5)\frac{1}{(x+2)^2}\right)$$

Como

$$\lim_{x\to-2^+}(25x-5)=-55$$

y

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{1}{(x+2)^2}=\infty,$$

entonces

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{25x-5}{(x+2)^2}=-\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{25x-5}{(x+2)^2}$.
De la misma manera:

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{25x-5}{(x+2)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{25x-5}{(x+2)^2}=-\infty$$

l. Límites cuando la variable tiende a ∞ o $-\infty$.

- x tiende a ∞.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{25x-5}{(x+2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{25x-5}{x^2+4x+4}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(25-\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\left(\frac{25-\frac{5}{x}}{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)\right)$$

$$=0.$$

- x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{25x-5}{(x+2)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{25x-5}{x^2+4x+4}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(25-\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\left(\frac{25-\frac{5}{x}}{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)\right)$$

$$=0.$$

m. Asíntotas.

- Como el grado del numerador es menor que el del denominador entonces f no tiene asíntotas oblicuas.
- Como $\lim_{x\to-2^+}\frac{25x-5}{(x+2)^2}=-\infty$ y $\lim_{x\to-2}\frac{25x-5}{(x+2)^2}=-\infty$ entonces $x=-2$ es una asíntota vertical de f.
- Como $\lim_{x\to\infty}\frac{25x-5}{(x+2)^2}=0$ y $\lim_{x\to-\infty}\frac{25x-5}{(x+2)^2}=0$ entonces la recta $y=0$ es una asíntota horizontal de f.

  Asíntota vertical: $x=-2$. Asíntota horizontal: $y=0$.

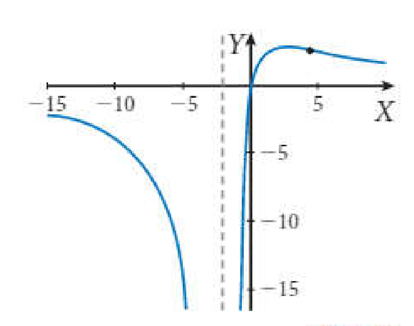


Figura 9.8

n. Gráfica, (Figura 9.8).

3. Analizar la siguiente función y dibujar su gráfica. $f(x)=\frac{x^2+2x-15}{x-4}$.

Solución:

a. Dominio de la función.

El denominador se hace cero si

$$x-4=0$$
$$x=4.$$

Como la función es un cociente de funciones polinomiales, el dominio es $\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

b. Intersecciones con los ejes.

- Con el eje X. Resolvemos $f(x)=0$.

$$\frac{x^2+2x-15}{x-4}=0$$
$$x^2+2x-15=0$$
$$(x-3)(x+5)=0,$$

de donde

$$x=3 \quad \text{o} \quad x=-5.$$

Así, los puntos $(3,0)$ y $(-5,0)$ son los puntos de la gráfica que se encuentran sobre el eje X.

- Con el eje Y. Hacemos $x=0$.

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{(0)^2+2(0)-15}{0-4} \\ &= \frac{-15}{-4} \\ &= \frac{15}{4}, \end{aligned}$$

de donde el punto $\left(0, \frac{15}{4}\right)$ es el punto de la gráfica que se encuentra sobre el eje Y.

c. Continuidad.
Como la función es un cociente de funciones continuas en $\mathbb{R}$ y su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ entonces la función f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

d. Primera derivada de $f(x)=\frac{x^2+2x-15}{x-4}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x-4)-\left(x^2+2x-15\right)}{(x-4)^2} \\ &= \frac{2x^2-8x+2x-8-x^2-2x+15}{(x-4)^2} \\ &= \frac{x^2-8x+7}{(x-4)^2}, \end{aligned}$$

por lo tanto, $f'(x)=\frac{x^2-8x+7}{(x-4)^2}$ para toda $x \neq 4$.

e. Puntos críticos.
Como la derivada está definida en todo $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ entonces sus únicos puntos críticos son donde la derivada vale cero. Resolvemos $f'(x)=0$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2-8x+7}{(x-4)^2} &= 0 \\ x^2-8x+7 &= 0 \\ (x-1)(x-7) &= 0, \end{aligned}$$

de donde $x=1$ o $x=7$. Así, hay dos puntos críticos: $x=1$ y $x=7$.

f. Crecimiento y decrecimiento de la función.

Como la función no está definida en $x=4$, entonces los intervalos de crecimiento o decrecimiento quedan determinados por los puntos críticos, 1 y 7, y el punto $x=4$, donde f no está definida:

$$(-\infty,1], \quad [1,4), \quad (4,7] \quad \text{y} \quad [7,\infty).$$

En cada uno de los correspondientes intervalos abiertos elegimos un punto y evaluamos la derivada para conocer cuál es el signo de ésta en el intervalo.

- $0\in(-\infty,1)$ y $f'(0)=\dfrac{(0)^2-8(0)+7}{(0-4)^2}=\dfrac{7}{4^2}>0.$

  Así, $f'(x)\geq 0$ para $x\in(-\infty,1]$ y entonces, la función es creciente en $(-\infty,1]$.

- $2\in(1,4)$ y $f'(2)=\dfrac{(2)^2-8(2)+7}{(2-4)^2}=\dfrac{-5}{(-2)^2}<0.$

  Así, $f'(x)\leq 0$ para $x\in[1,4)$ y entonces, la función es decreciente en $[1,4)$.

- $5\in(4,7)$ y $f'(5)=\dfrac{(5)^2-8(5)+7}{(5-4)^2}=\dfrac{-8}{1}<0.$

  Así, $f'(x)\leq 0$ para $x\in(4,7]$ y entonces, la función es decreciente en $(4,7)$.

- $8\in(7,\infty)$ y $f'(8)=\dfrac{(8)^2-8(8)+7}{(8-4)^2}=\dfrac{7}{4^2}>0.$

  Así, $f'(x)\geq 0$ para $x\in[7,\infty)$ y entonces, la función es creciente en $[7,\infty)$.

- Resumen de crecimiento:

	$-\infty$		1		4		7		∞
f'		+	0	−	■	−	0	+	
f		↗	4	↘	■	↘	16	↗	

g. Máximos y mínimos.

- Como a la izquierda de $x=1$ la derivada es positiva (/) y a la derecha es negativa (\ ), entonces f tiene un máximo en $x=1$.
- Como a la izquierda de $x=7$ la derivada es negativa (\ ) y a la derecha es positiva (/), entonces f tiene un mínimo en $x=7$.

  Así, hay un máximo en: $x=1$ y un mínimo en: $x=7$.

h. Segunda derivada.

La primera derivada de f es $f'(x)=\dfrac{x^2-8x+7}{(x-4)^2}$ entonces la segunda derivada es:

$$f''(x)=\frac{(2x-8)(x-4)^2-2(x-4)\left(x^2-8x+7\right)}{(x-4)^4}$$

$$=\frac{(x-\mathbf{4})\left((2x-8)(x-4)-2\left(x^2-8x+7\right)\right)}{(x-4)^4}$$

$$=\frac{(2x-8)(x-\mathbf{4})-2\left(x^2-8x+7\right)}{(x-4)^3}$$

$$=\frac{2x^2-8x-8x+32-2x^2+16x-\mathbf{14}}{(x-4)^3}$$

$$=\frac{18}{(x-4)^3},$$

por lo tanto, $f''(x)=\dfrac{18}{(x-4)^3}$ para toda $x\neq 4$.

i. Concavidad.

Igualamos la segunda derivada a cero.

$$\frac{18}{(x-4)^3}=0$$

Como la segunda derivada nunca es cero, entonces los intervalos donde la segunda derivada f'' mantiene el mismo signo quedan determinados por el punto $x=4$, donde f no está definida

$$(-\infty,4),\qquad (4,\infty).$$

En cada intervalo abierto elegimos un punto y evaluamos la segunda derivada para ver si es positiva o negativa.

- $0\in(-\infty,4)$:

$$f''(0)=\frac{18}{(0-4)^3}=\frac{18}{(-4)^3}<0.$$

Entonces por el criterio 9.1 la función f es cóncava hacia abajo en $(-\infty,4)$.

- $5\in(4,\infty)$:

$$f''(5)=\frac{18}{(5-4)^3}=\frac{18}{1^3}>0.$$

Entonces por el criterio 9.1 la función f es cóncava hacia arriba en $(4,\infty)$.

- Resumen de concavidad:

	$-\infty$		4		∞
f''		$-$	■	$+$	
Concavidad		$\frown$	■	$\smile$	

j. Puntos de inflexión.
Como f no está definida en 4 la función no puede ser continua en ese punto y en ningún otro hay cambio de concavidad; de tal forma que la función no tiene puntos de inflexión.

k. Límites laterales.
Como la función $f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{x-4}$ no está definida en $x=4$, en dicho punto hay que calcular los límites laterales.

- $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2+2x-15}{x-4}$.

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2+2x-15}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{x-4}\left(x^2+2x-15\right)\right).$$

Como

$$\lim_{x\to 4^+}\left(x^2+2x-15\right)=9$$

$$\lim_{x\to 4^+}(x-4)=0$$

y $x-4>0$ cuando $x>4$, entonces

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{1}{x-4}=\infty.$$

De donde

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2+2x-15}{x-4}=\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2+2x-15}{x-4}$.

De la misma manera:

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2+2x-15}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{x-4}\left(x^2+2x-15\right)\right).$$

Como

$$\lim_{x\to 4^-}\left(x^2+2x-15\right)=9$$

$$\lim_{x\to 4^-}(x-4)=0$$

y $x-4<0$ cuando $x<4$, entonces

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{x-4}=-\infty.$$

De donde

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2+2x-15}{x-4} = -\infty.$$

l. Límites cuando la variable tiende a ∞ o $-\infty$.

- x tiende a ∞.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-15}{x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(x\left(\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{1-\frac{4}{x}}\right)\right)$$

$$= \infty.$$

- x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-15}{x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x\left(\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{1-\frac{4}{x}}\right)\right)$$

$$= -\infty.$$

m. Asíntotas.

- Como el grado del numerador es mayor que el del denominador entonces hay asíntotas oblicuas. Para encontrarlas realizamos la división $\frac{x^2+2x-15}{x-4}$:

$$\begin{array}{r|l} & x+6 \\ \hline x-4 & x^2+2x-15 \\ & \underline{-x^2+4x} \\ & \quad 6x-15 \\ & \quad \underline{-6x+24} \\ & \qquad 9 \end{array}$$

La recta con ecuación $y = x+6$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función.

- Como $\lim_{x\to 4^+} \frac{x^2+2x-15}{x-4} = \infty$ y $\lim_{x\to 4} \frac{x^2+2x-15}{x-4} = -\infty$ entonces $x = 4$ es una asíntota vertical.

Figura 9.9

- Como $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-15}{x-4}=\infty$ y $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-15}{x-4}=-\infty$ entonces no tiene asíntotas horizontales.
  Asíntota oblicua: $y=x+6$. Asíntota vertical: $x=4$.

n. Gráfica, (Figura 9.9)

4. Analizar la siguiente función y dibujar su gráfica. $f(x)=2\sqrt[3]{x^2}$.

Solución:

a. Dominio de la función.
Como la raíz cúbica está definida para todos los reales, entonces el dominio natural son todos los reales. Así, $Dom\, f=\mathbb{R}$.

b. Intersecciones con los ejes.

- Con el eje X. Resolvemos $f(x)=0$.

$$\begin{aligned}2\sqrt[3]{x^2}&=0\\ x^2&=0\\ x&=0,\end{aligned}$$

el punto $(0,0)$ es el punto de la gráfica que se encuentra sobre el eje X.

- Con el eje Y. Hacemos $x=0$.

$$f(0)=2\sqrt[3]{0^2}=0,$$

de donde el punto $(0,0)$ es el punto de la gráfica que se encuentra sobre el eje Y.

c. Continuidad.
La función $f(x)=2\sqrt[3]{x^2}$ es el producto de la constante 2 y la composición de las funciones x^2 y $\sqrt[3]{y}$. Como todas estas funciones son continuas en $\mathbb{R}$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$.

d. Primera derivada de $f(x)=2\sqrt[3]{x^2}$.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(2x^{\frac{2}{3}}\right)'\\ &=2\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)\\ &=\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}\end{aligned}$$

por lo tanto, $f'(x)=\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}$ para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

e. Puntos críticos.
Los puntos críticos son aquellos del dominio de la función en los que la derivada no está definida o bien vale cero.

Como el numerador de la derivada nunca es cero, entonces $f'(x)\neq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Así el único punto crítico es el punto del dominio en el que la derivada no está definida, es decir, $x=0$.

f. Intervalos de monotonía
Los intervalos donde la derivada no cambia de signo quedan determinados por los puntos críticos.

$$(-\infty,0] \quad \text{y} \quad [0,\infty).$$

En cada uno de los correspondientes intervalos abiertos elegimos un punto y evaluamos la derivada para saber si la derivada es positiva o negativa.

- $-1\in(-\infty,0)$ y

$$f'(-1)=\frac{4}{3\sqrt[3]{-1}}=-\frac{4}{3}<0.$$

Así, la función f es decreciente en $(-\infty,0)$ y como f es continua en 0, entonces f es decreciente en $(-\infty,0]$.

- $1\in(0,\infty)$ y

$$f'(1)=\frac{4}{3\sqrt[3]{1}}=\frac{4}{3}>0,$$

así, la función f es creciente en $(-\infty,0)$ y como f es continua en 0, entonces la función es creciente en $[0,\infty)$.

- Resumen de crecimiento:

	$-\infty$		0		∞
f'		$-$	■	$+$	
f		↘	0	↗	

g. Máximos y mínimos.
Como a la izquierda de $x=0$ la derivada es negativa (\ ) y a la derecha es positiva (/), entonces f tiene un mínimo en $x=0$.

h. Segunda derivada.
La primera derivada es $f'(x)=\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x}}$ entonces la segunda derivada es:

$$f''(x)=\left(\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)'=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}=\frac{-4}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

Por lo tanto, $f''(x)=-\dfrac{4}{9\sqrt[3]{x^4}}$ para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

i. Concavidad.
La segunda derivada nunca es igual a cero, ya que el numerador es constante.

Los intervalos abiertos donde la segunda derivada mantiene el mismo signo quedan determinados por los puntos donde ella no está definida, es decir, $x = 0$:

$$(-\infty, 0) \quad \text{y} \quad (0, \infty).$$

Como $f''(x) = -\dfrac{4}{9\sqrt[3]{x^4}} < 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces en ambos intervalos, la función es cóncava hacia abajo.

- Resumen de concavidad:

	$-\infty$		0		∞
f''		$-$	▮	$-$	
Concavidad		$\frown$	▮	$\frown$	

j. Puntos de inflexión.
De la tabla del punto anterior, observamos que la función no cambia de concavidad, entonces, no tiene puntos de inflexión.

k. Límites laterales.
Como el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$ entonces no hay que calcular límites laterales.

l. Límites cuando la variable tiende a ∞ o $-\infty$.

- x tiende a ∞.

$$\lim_{x \to \infty} 2\sqrt[3]{x^2} = \infty.$$

- x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} 2\sqrt[3]{x^2} = \infty.$$

m. Asíntotas.

- Como la función no es racional, no hacemos un análisis de asíntotas oblicuas.
- Como el dominio de la función es $\mathbb{R}$, entonces no tiene asíntotas verticales.
- Como $\lim\limits_{x \to \infty} 2\sqrt[3]{x^2} = \infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} 2\sqrt[3]{x^2} = \infty$, entonces no tiene asíntotas horizontales.

n. Gráfica, (Figura 9.10).

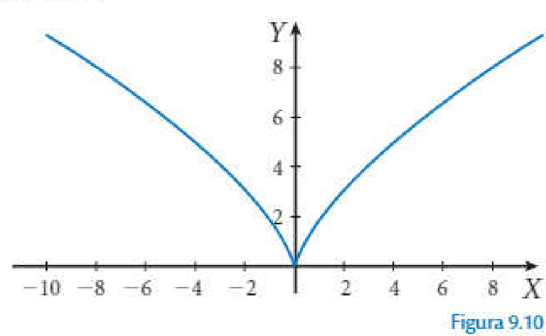


Figura 9.10

Ejemplos

Ejercicios

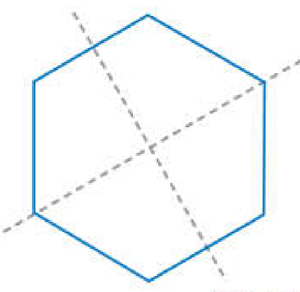
Dibuja en cada caso la gráfica de la función haciendo un análisis completo.

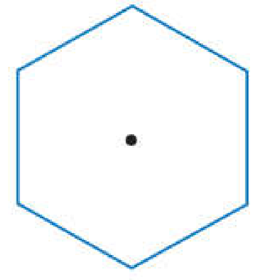
1. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{2}x$
2. $f(x)=\left(\frac{x^2}{4}-4\right)^2$
3. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-3x^2$
4. $f(x)=\frac{7x-21}{(x-2)^2}$
5. $f(x)=\frac{x^2}{x-4}$
6. $f(x)=\frac{x^2-16}{x+1}$
7. $f(x)=\frac{x^3}{7x+35}$
8. $f(x)=\frac{x^2-6}{x^2-4}$
9. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-2}$
10. $f(x)=\frac{2x^2+3x-20}{(x-3)^2}$
11. $f(x)=x\sqrt{x+5}$
12. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$

Simetrías

Recordemos que una figura geométrica puede tener:

- *Ejes de simetría.* Una recta es un eje de simetría de una figura si al reflejarla respecto a ella, la imagen reflejada coincide con la figura original. El hexágono tiene dos tipos de ejes de simetría (Figura 9.11). Los que pasan por dos vértices opuestos y los que pasan por los puntos medios de lados opuestos.
- *Centros de simetría.* Un punto es un centro de simetría de una figura si al girarla un cierto ángulo, la imagen girada coincide con la figura original. El centro del hexágono es un centro de simetría de él, ya que al girar la figura 60°, 120°, 180° la imagen girada coincide con el hexágono original, (Figura 9.12).


Figura 9.11


Figura 9.12

Algunas gráficas de funciones tienen ejes o centros de simetría. Es importante saber si la gráfica de una función tiene ejes o centros de simetría, ya que esta información nos facilita dibujar su gráfica.

Por ejemplo, las funciones pares y las funciones impares:

Decimos que una función es *par* si para todo x en su dominio, $-x$ también está en él y

$$f(-x)=f(x).$$

Decimos que una función es *impar* si para todo x en su dominio, $-x$ también está en él y

$$f(-x)=-f(x).$$

Nota: La única función que es a la vez par e impar es la función cero.

Ejemplos

1. Determinar si la función $f(x)=x^4-10x^2+1$ es par o impar (Figura 9.13).

Solución:
Evaluamos la función en $-x$;

$$\begin{aligned} f(-x)&=(-x)^4-10(-x)^2+1\\ &=x^4-10x^2+1\\ &=f(x), \end{aligned}$$

por lo tanto, la función es par.

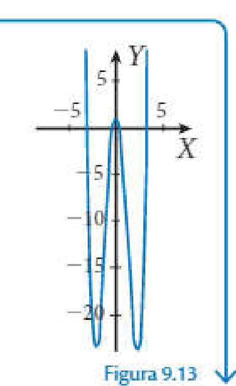


Figura 9.13

TIP

Si f es una función definida en un intervalo con centro en 0 entonces la función $g(x)=f(x)+f(-x)$ es par.

El eje Y es un eje de simetría de esta función, observa que la parte de la gráfica que está al lado izquierdo del eje Y es la imagen en espejo de la parte que está del lado derecho, y viceversa.

2. Determinar si la función $f(x)=\cos x$ es par o impar (Figura 9.14).

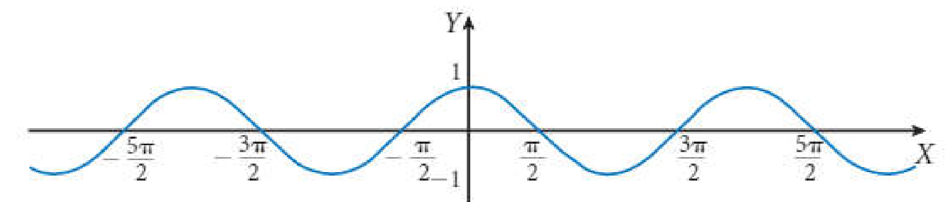


Figura 9.14

Solución:

Evaluamos la función en $-x$;

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) \\ &= \cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

TIP

Las funciones trigonométricas satisfacen las siguientes igualdades para cualquier real x:

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$

Por lo tanto, la función es par.

El eje Y, y todas las rectas verticales de la forma $x=n\pi$, con n entero son ejes de simetría de la función coseno.

Observa también que si giras la gráfica 180° alrededor de cualquier punto donde la gráfica corta al eje X, obtienes nuevamente la misma gráfica, así que estos puntos $\left(\frac{\pi}{2}+n\pi, 0\right)$ son centros de simetría.

3. Determinar si la función $f(x)=x^3-6x$ es par o impar (Figura 9.15).

Solución:

Evaluamos la función en $-x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3-6(-x) \\ &= -x^3+6x \\ &= -\left(x^3-6x\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

por lo tanto, la función es impar.

Si se gira la gráfica 180° alrededor del origen se obtiene nuevamente la misma gráfica, así que el 0 es un centro de simetría de la función.

TIP

Toda función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se puede escribir como la suma de una función par $\left(\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right)$ y una impar $\left(\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right)$.

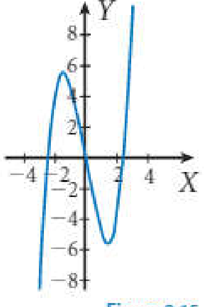


Figura 9.15

4. Determinar si la función $f(x)=x+1$ es par o impar, (Figura 9.16).

Solución:
Evaluamos la función en $-x$

$$f(-x)=-x+1$$

que es distinto de

$$f(x)=x+1,$$

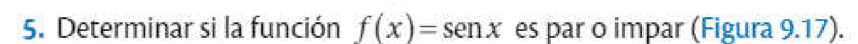
siempre que $x\neq 0$. Por lo que f no es par.

También $f(-x)$ es distinto de

$$-f(x)=-x-1,$$

para cualquier x. Así que f no es impar.

Figura 9.16



5. Determinar si la función $f(x)=\operatorname{sen} x$ es par o impar (Figura 9.17).

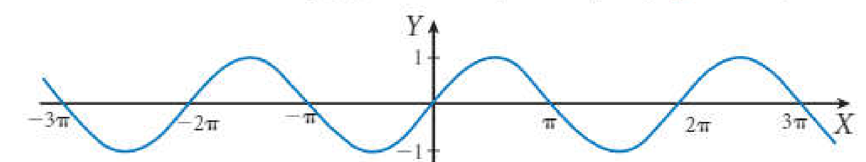


Figura 9.17

Solución:
Evaluamos la función en $-x$

$$f(-x)=\operatorname{sen}(-x)$$
$$=-\operatorname{sen} x$$
$$=-f(x),$$

por lo tanto, la función es impar.

Si se gira la gráfica 180° alrededor del origen (o alrededor de cualquier punto donde la gráfica corta al eje X) se obtiene nuevamente la misma gráfica, así que los puntos de la forma $(n\pi,0)$ son centros de simetría de la función. La función seno también tiene ejes de simetría: todas las rectas verticales de la forma $y=\frac{\pi}{2}+n\pi$ con n entero.

Todas las funciones pares tienen al eje Y como eje de simetría. Justamente, al indicar que $f(-x)=f(x)$ estamos diciendo que el reflejado del punto $(-x,f(-x))$ es $(x,f(x))$.

Todas las funciones impares tienen al origen como centro de simetría, correspondiente a una rotación de 180°. Justamente, al indicar que $f(-x)=-f(x)$ estamos diciendo que la imagen del punto $(x,f(x))$ bajo la rotación es $(-x,f(-x))$.



TIP

Si f es una función definida en un intervalo con centro en 0 entonces la función $h(x)=f(x)-f(-x)$ es impar.

Ejemplos

Simetría de las funciones cuadráticas

En la sección anterior vimos que toda función par tiene como eje de simetría al eje Y. Así, la función $f(x)=x^2$ tiene al eje Y como eje de simetría. (Figura 9.18).

Pero, ¿qué se puede decir de una función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ respecto a la simetría?

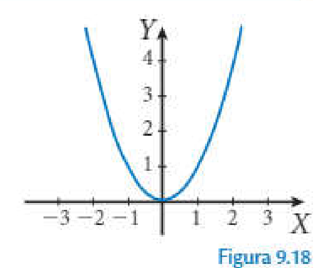


Figura 9.18

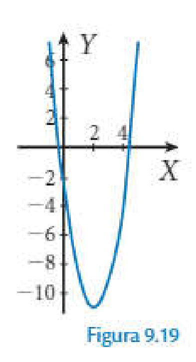


Figura 9.19

Por ejemplo, la función;

$$y = f(x) = 2x^2 - 8x - 3.$$

no es par, y como puede apreciarse en la Figura 9.19, el eje Y no es eje de simetría de su gráfica. Sin embargo, si hacemos una traslación de los ejes para colocar el nuevo origen de coordenadas en el punto mínimo de la gráfica, podemos encontrar algo interesante.

Para encontrar el punto mínimo, procedemos como en la unidad 6. Encontramos el valor de x para el cual la derivada de la función vale cero.

$$f'(x) = 4x - 8.$$

Igualamos a cero

$$4x - 8 = 0$$
$$x = 2.$$

Para ver si en $x = 2$ la función tiene un máximo o mínimo, calculamos la segunda derivada y observamos que

$$f''(x) = 4 > 0$$

para todo x, así que en $x = 2$ se alcanza un mínimo que vale

$$\begin{aligned} f(2) &= 2(2)^2 - 8(2) - 3 \\ &= -11, \end{aligned}$$

es decir, el punto $(2,-11)$ es el punto mínimo de la función.

Hacemos ahora la traslación de ejes

$$x' = x - 2$$
$$y' = y + 11$$

para llevar el origen al punto $(2,-11)$.

Sustituimos

$$x = x' + 2$$
$$y = y' - 11$$

en la fórmula de la función

$$\begin{aligned} y' - 11 &= 2(x' + 2)^2 - 8(x' + 2) - 3 \\ y' - 11 &= 2\left((x')^2 + 4x' + 4\right) - 8x' - 16 - 3 \\ y' - 11 &= 2(x')^2 + 8x' + 8 - 8x' - 19 \\ y' - 11 &= 2(x')^2 - 11 \\ y' &= 2(x')^2 \end{aligned}$$

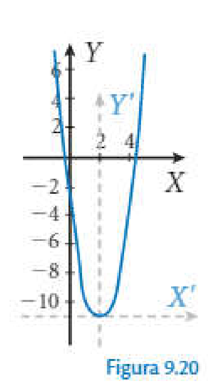


Figura 9.20


y vemos claramente que esta función es par, por lo que el nuevo eje Y' es su eje de simetría, (Figura 9.20).

Lo que hicimos en este ejemplo puede hacerse en general, y se prueba que la recta vertical que pasa por el punto crítico de la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, que es vértice de una parábola, es un eje de simetría de dicha función.

Simetría de las funciones cúbicas

En la sección de simetrías vimos que la función $f(x)=x^3-6x$ es una función impar, y esto significa que si se gira la gráfica $180°$ alrededor del origen, se obtiene la misma figura. Esto es, el origen es el centro de simetría bajo la rotación de $180°$.

Recordamos que si $f''(a)=0$ y $f'''(a)\neq 0$, entonces a es un punto de inflexión de f. En el caso de las funciones cúbicas, tales puntos son sus únicos puntos de inflexión.

Calculamos

$$f'(x)=3x^2-6$$
$$f''(x)=6x$$
$$f'''(x)=6,$$

resolvemos $f''(x)=0$

$$6x=0$$
$$x=0,$$

así que existe un punto de inflexión para $x=0$ y es el único punto de inflexión de $f(x)=x^3-6x$. Entonces el centro de simetría de la función coincide con su único punto de inflexión.

¿Qué podemos decir en general de una función cúbica $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ respecto a la simetría?

Tenemos que $a\neq 0$. Calculamos

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$f''(x)=6ax+2b$$
$$f'''(x)=6a\neq 0$$

Además, la ecuación $f''(x)=0$ siempre tiene una única solución: $x=-\dfrac{b}{3a}$. Entonces, f tiene un punto de inflexión para $x=-\dfrac{b}{3a}$ y es el único punto de inflexión de $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Con relación a los puntos de simetría veamos qué podemos decir sobre las funciones cúbicas, mediante el siguiente ejemplo:

$$f(x)=x^3-6x^2+4x+5.$$

Esta función no es impar, ya que tiene términos cuadráticos. En efecto,

$$f(1)=4$$
$$f(-1)=-6,$$

así que no se cumple que

$$f(-x)=-f(x)$$

para todo x en su dominio.

Veremos que la gráfica de f es simétrica respecto de su punto de inflexión. Es decir, su punto de inflexión es un centro de simetría bajo una rotación de $180°$.

Para encontrar su punto de inflexión, calculamos

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 4$$
$$f''(x) = 6x - 12$$

y resolvemos $f''(x) = 0$

$$6x - 12 = 0$$
$$6x = 12$$
$$x = 2,$$

así que para $x = 2$ hay un punto (único) de inflexión de f.

Evaluamos

$$f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 4(2) + 5 = -3$$

entonces, el punto $(2, -3)$ es el punto de inflexión de la gráfica.

Ahora trasladamos los ejes de coordenadas a fin de que el nuevo origen sea el punto $(2, -3)$. O sea, efectuamos la traslación de ejes.

$$x' = x - 2$$
$$y' = y + 3.$$

Sustituimos

$$x = x' + 2$$
$$y = y' - 3$$

en la curva

$$y = x^3 - 6x^2 + 4x + 5$$

y obtenemos

$$y' - 3 = (x' + 2)^3 - 6(x' + 2)^2 + 4(x' + 2) + 5$$
$$y' - 3 = (x')^3 - 8x' - 3$$
$$y' = (x')^3 - 8x'$$

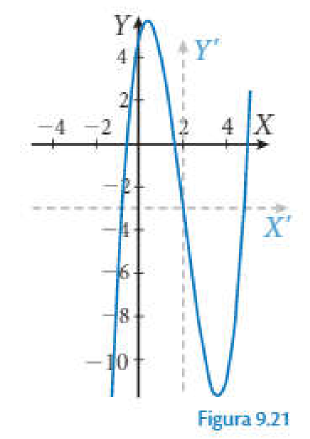


Figura 9.21

que es una función impar y por lo tanto, el origen es el centro de simetría de una rotación de 180° (Figura 9.21).

Lo que hicimos en este ejemplo puede hacerse en general, y de esta forma se prueba que el punto de inflexión de una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, es el punto de simetría de la gráfica, para una rotación de $180°$.

Mundo virtual

En esta sección te invitamos a visitar varios sitios que contienen material relacionado con el concepto de gráfica de una función. De hecho, esta unidad es una especie de culminación de las unidades anteriores, por lo que todas las sugerencias mencionadas en dichas unidades son válidas para ésta. Algo de ese material está desarrollado por los autores de este libro, pero mucho más ha sido desarrollado por personas de todo el mundo que tienen interés en las matemáticas.

- http://atenea.matem.unam.mx Éste es un sitio del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en el cual los investigadores del Instituto están creando material para cursos en línea. Puedes entrar como invitado sin necesidad de registrarte. Una vez dentro del sitio, elige la categoría "Cálculo diferencial e integral", dentro de ella, el curso "Cálculo I" y entra a las lecciones de la sección "Gráficas de funciones."
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web Sitio del Ministerio de Educación, Salud y Deporte del Gobierno español que contiene unidades didácticas y recursos interactivos desarrollados con la herramienta Descartes. Estos materiales fueron elaborados por profesores de enseñanza media. Selecciona "Aplicaciones", y luego "Análisis". Dentro de "Representación gráfica de funciones" hay muchas unidades interactivas relacionadas con el tema de esta unidad.
- http://es.wikipedia.org La enciclopedia en línea Wikipedia es uno de los sitios de referencia para encontrar información relacionada con la ciencia y la cultura. En el buscador escribe: Gráfica de una función. Esto te lleva a una sección bastante completa sobre el concepto de gráfica de una función. Al final hay ligas a otras secciones relacionadas, en particular es interesante la de Concavidad.
- http://www.wolframalpha.com. Esta página es, posiblemente, una de las mejores páginas de matemáticas en la red. Tiene la desventaja de que está en inglés. Además de tener explicaciones sobre muchos temas, tiene interactivos desarrollados con Mathematica, que es un programa de cálculo simbólico muy poderoso. En el buscador escribe cualquier fórmula, por ejemplo "sin(x)" y te va a decir todo lo que querías saber acerca de esta función pero temías preguntar y muchas más que ni te imaginabas.
- http://newton.matem.unam.mx/geolab En este sitio puedes descargar el programa Geolab y el curso para aprender a utilizarlo. En las secciones de Mundo virtual te guiaremos para realizar algunas construcciones relacionadas con los temas de este libro.

Construcciones con Geolab

En las unidades anteriores aprendiste a introducir fórmulas en Geolab para dibujar gráficas de funciones, y también a introducir dos funciones, una de ellas con dominio (a,c) y la otra con dominio (c,b). Si las gráficas de las dos funciones se pegan bien, significa que la función combinada tiene límite en c.

En la siguiente práctica te mostramos cómo colocar un punto en el eje X y el punto correspondiente en la gráfica de una función, de manera que cuando muevas el punto en el eje X también se mueva el otro y te indique sus coordenadas. En la pantalla para introducir la función da valores negativos grandes para a, y valores grandes positivos para b. Seguramente también tendrás que aumentar el número de pasos para que dibuje mejor la curva.

1. Construye la recta $y=0$. Utiliza el constructor de recta calculada y da los valores

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 1 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

esta recta queda colocada sobre el eje X y sirve para que el punto móvil se mueva sobre ella.

2. Construye un punto A en recta y selecciona la recta anterior. Mueve el punto y observa que solo se puede mover en el eje X.
3. Construye una función, por ejemplo, $f(t) = \text{sen}(t)$. Recuerda que debes escribir $t_$ como nombre de la variable.
4. Construye un punto calculado cuya primera coordenada sea la misma que la de A y su segunda coordenada sea el valor de la función en la primera coordenada de A. Llena la ventana de la siguiente manera:

$$x = \quad A.x$$
$$y = \quad \text{sen}(A.x)$$

Observa que debes poner en $y =$ la misma función que hayas puesto en el paso 3.

5. Mueve el punto A y ve que el otro punto se mueve sobre la gráfica de f.
6. Ahora cambia la etiqueta de este punto. Selecciona el icono de Datos analíticos y cuando te muestre la ventana con la lista de todos los objetos construidos, selecciona el renglón del último punto que construiste. En la parte media de la ventana hay unos selectores que dicen: "Invisible, Nombre, Ecuación, Descripción". Selecciona Ecuación. Regresa a la ventana gráfica y ve cómo ahora junto al punto de la gráfica están los valores de sus coordenadas.
7. Construye otras funciones y observa su comportamiento de la gráfica. Recuerda introducir la fórmula usando $t_$ en lugar de t. También recuerda que debes poner la misma fórmula en el paso 3 y en el paso 4. Observa los intervalos donde la función es creciente o decreciente. Sus máximos y sus mínimos.

Resumen de la unidad

1. Si f'' es distinta de cero en (a,b) y si $f''>0$ en algún punto de (a,b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a,b).
2. Si f'' es distinta de cero en (a,b) y si $f''<0$ en algún punto de (a,b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a,b).
3. Pasos a seguir para dibujar la gráfica de una función:
   - Dominio de la función.
   - Intersecciones con los ejes; $(x_0,0)$ y $(0,y_0)$.
   - Continuidad de la función.
   - Primera derivada.
   - Puntos críticos. ($f'(x_0)=0$, o bien la derivada no existe).
   - Intervalos de monotonía. (Signo de f').
   - Máximos y mínimos. (Cambio de signo de f', o bien análisis con f'').
   - Segunda derivada.
   - Concavidad. (Signo de f'').

- Puntos de inflexión (cambio de concavidad en puntos de continuidad).
- Límites laterales.
- Límites en el infinito y menos infinito.
- Asíntotas.
- Gráfica.

Ejercicios de repaso

Dibuja en cada caso la gráfica de la función haciendo un análisis completo.

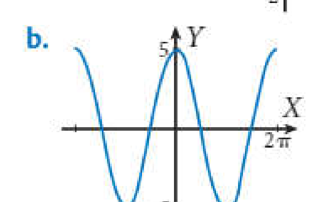
1. $f(x)=(x-3)x^3$
2. $f(x)=\left(x^2-1\right)\left(4-x^2\right)$
3. $f(x)=(x+2)x^5$
4. $f(x)=\dfrac{3}{1+x^2}$
5. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$
6. $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{9}{4}x^2$
7. $f(x)=\dfrac{x^2-6}{\sqrt{9-x^2}}$
8. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$
9. $f(x)=\dfrac{-x^2+x+10}{x-3}$
10. $f(x)=2\sqrt[5]{(x+6)^2}$
11. $f(x)=x\sqrt{16-x^2}$
12. $f(x)=4\sqrt[3]{x^2}-3x^3$
13. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4x}$
14. $f(x)=\sqrt[3]{3x-x^2}$
15. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{x}{2}$

Autoevaluación

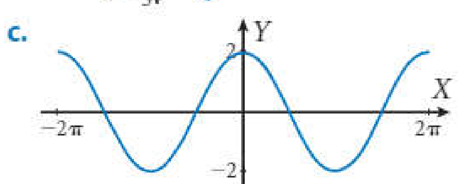
1. La gráfica de $5\cos 2x$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ es:

a.

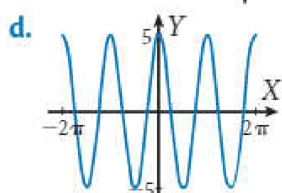
b.



c.



d.



En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 301 y 302.

2. La gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ es cóncava hacia abajo en:

a. $(-\infty, -1)$

b. $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

c. $(-\infty, 1)$

d. $(1, \infty)$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 296.

3. Una asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{5x^2 + 3x - 4}{x^2 + 6}$ es:

a. $y = 5$

b. $y = -1$

c. $x = -\sqrt{6}$

d. $x = \sqrt{6}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 256.

4. La gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 25}$ es creciente en:

a. $(-5, 5)$

b. $(0, 5) \cup (5, \infty)$

c. $(-\infty, 0)$

d. $(-\infty, -5) \cup (-5, 0)$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 209, 210 y 211.

5. Una asíntota oblicua de $f(x) = \dfrac{4x^2 + 36x - 2}{2x + 6}$ es:

a. $y = 2x$.

b. $y = 2x + 12$

c. No tiene asíntota oblicua

d. $y = -2x - 12$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 266.

6. Las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x - 6}{x^2 - 2x - 8}$ son:

a. No tiene asíntotas verticales

b. $y = 2, \; y = -4$

c. $x = -4$

d. $x = -2, \; x = 4$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 249.

7. Las intersecciones de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 24x}{x^2 + 4x - 5}$ con los ejes coordenados son:

a. $(0,0), (-6,0), (4,0)$

b. No hay intersecciones con los ejes

c. $(0,0)$

d. $(0,-6), (0,4)$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 302.

8. La función $f(x) = \dfrac{(x-3)(x-2)}{x^2 + 1}$ tiene:

a. Solo tiene un máximo en $x = \sqrt{2} - 1$

b. Máximo en $x = 1 - \sqrt{2}$ y mínimo en $x = \sqrt{2} + 1$

c. No tiene ni máximo ni mínimo

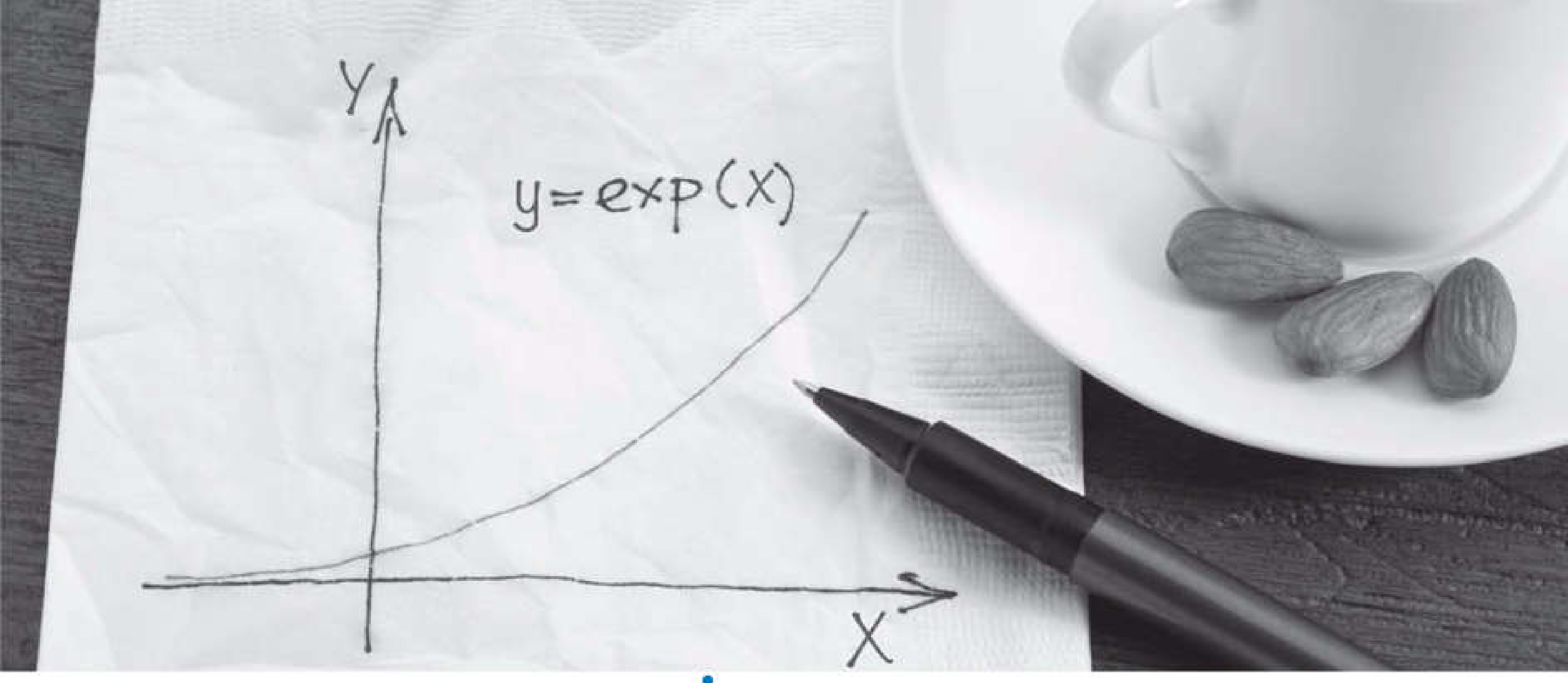
d. Solo tiene un mínimo en $x = \sqrt{2} + 1$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 215, 217, 220.

Heteroevaluación

1. Determinar la concavidad de $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+2}$ y los puntos de inflexión.

2. Determinar los intervalos de monotonía, los máximos y los mínimos de la función $f(x)=\frac{x^2+3x-6}{x^2-1}$.



La integral de la función exponencial es siempre la misma función exponencial.



Unidad 10 Logaritmos y exponenciales

En la naturaleza, las ciencias y la economía, ocurren fenómenos de crecimiento o decrecimiento como los siguientes:

- En cierto lapso, el precio de una acción crece a razón constante de 3% anual.
- La concentración de un medicamento en la sangre disminuye a la mitad cada 3 horas.
- La vida media del Yodo 131 es de 8 días, esto es, un material que tiene cierta cantidad de Yodo 131, después de 8 días tiene la mitad del que tenía al inicio.
- En un cultivo de bacterias, durante cierto lapso, la población se duplica cada 12 horas.

Para poder explicar estos fenómenos es necesario introducir la función exponencial y su inversa, la función logaritmo. Estas funciones son un poco más complicadas que las funciones racionales y por eso hemos retrasado su estudio hasta este momento, en el que ya tenemos muchas herramientas para describirlas.

Antes de la existencia de las calculadoras de bolsillo, era muy laborioso efectuar multiplicaciones, divisiones, exponenciaciones o extracciones de raíces. La propiedad logarítmica, $\log(ab)=\log(a)+\log(b)$ resultaba muy útil para simplificar estas operaciones, ya que permitía cambiar una multiplicación por una suma y una división por una resta. En la actualidad, esta aplicación del logaritmo ya no es tan importante, ya que las operaciones complicadas se hacen con ayuda de la tecnología. Sin embargo, las funciones logaritmo y exponencial continúan siendo importantes en la descripción de fenómenos de crecimiento y decrecimiento como los que mencionamos al principio.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.

Logaritmos y exponenciales

- El logaritmo natural y el número e
  - Propiedades
- Función exponencial
  - Propiedades de la función exponencial
- Límites con logaritmos y exponenciales
- La función exponencial con base a: a^x con $a > 0$ y x un número real cualquiera
  - Leyes de los exponentes
- La función potencia $f(x) = x^b$, con b irracional
- Funciones logarítmicas
- Ecuaciones logarítmicas y exponenciales
- Aplicaciones
  - El interés compuesto
  - Comportamiento exponencial
- La exponencial a^x *vs.* la potencia x^a, con $a > 1$

El logaritmo natural y el número e

La función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ tiene una propiedad interesante, que veremos a continuación en la Figura10.1 y que nos servirá para definir la función logaritmo.

Sobre un intervalo $[a,b]$ del semieje positivo X construyamos dos rectángulos, uno por abajo y otro por arriba de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Hagamos lo mismo sobre el intervalo $[ta,tb]$, donde $t>0$. Veamos que las áreas de los rectángulos por abajo coinciden entre sí, y que lo mismo sucede con los de arriba.

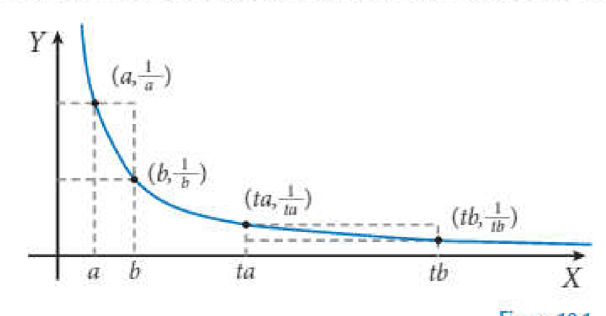


Figura 10.1

Solución:

Las áreas de los rectángulos construidos sobre $[a,b]$ son

$$I=(b-a)\frac{1}{b}\ \text{(por abajo)} \quad \text{y} \quad E=(b-a)\frac{1}{a}\ \text{(por arriba)}$$

En tanto que las áreas de los rectángulos con base en $[ta,tb]$ son

$$I_t=(tb-ta)\frac{1}{tb} \quad \text{y} \quad E_t=(tb-ta)\frac{1}{ta}$$

Podemos simplificar I_t y E_t

$$I_t=(tb-ta)\frac{1}{tb}=(b-a)\frac{1}{b}=I \quad \text{y} \quad E_t=(tb-ta)\frac{1}{ta}=(b-a)\frac{1}{a}=E$$

Se puede probar también que:

$$A_{[a,b]}=A_{[ta,tb]} \qquad \text{si } t>0 \tag{10.1}$$

donde $A_{[a,b]}$ y $A_{[ta,tb]}$ son las áreas de las regiones sombreadas en la Figura 10.2:

Definimos la función $\ln:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, llamada *logaritmo natural*, como:

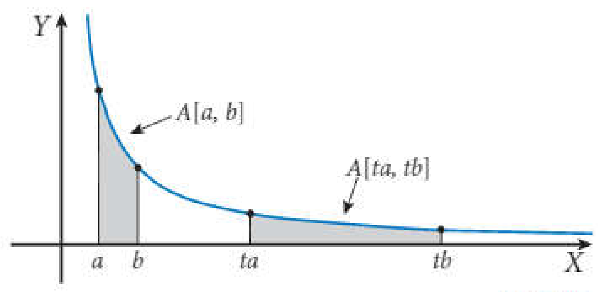


Figura 10.2

$$\ln(x)=\begin{cases} A_{[1,x]} & \text{si } x\geq 1 \\ -A_{[x,1]} & \text{si } x<1 \end{cases} \tag{10.2}$$

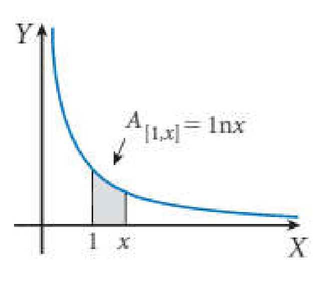
esto es, para $x\geq 1$, $\ln(x)$ es el área bajo la gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en el intervalo $[1,x]$ y para $x<1$, es menos el área bajo dicha gráfica en el intervalo $[x,1]$, (ver Figura 10.3).

Por ejemplo, $\ln(1) = A_{[1,1]}$ y esta área es 0 pues la región es un segmento. Así,

$$\ln(1) = 0$$

Esta igualdad debe recordarse cuando se trabaja con la función logaritmo.

La función $\ln(x)$ satisface la siguiente igualdad:



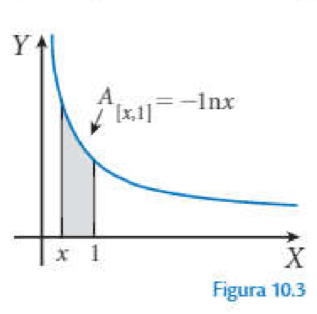


Figura 10.3

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{para } x \text{ y } y \text{ positivos.} \tag{10.3}$$

Que se conoce como la *propiedad logarítmica*.

Comprobaremos la propiedad logarítmica para el caso en que x y y son mayores que 1. En los demás casos se comprueba de manera similar.

En la Figura 10.4 observamos que si x y y son números mayores que 1, entonces el área bajo la curva desde 1 hasta xy es igual al área bajo la curva desde 1 hasta x, más el área bajo la curva desde x hasta xy; es decir,

$$A_{[1,xy]} = A_{[1,x]} + A_{[x,xy]} \tag{10.4}$$

Aplicamos la fórmula (10.1) con $a = 1, b = y$ y $t = x$ y obtenemos:

$$A_{[1,y]} = A_{[x,xy]}$$

Al sustituir $A_{[x,xy]}$ por $A_{[1,y]}$ en (10.4) obtenemos:

$$A_{[1,xy]} = A_{[1,x]} + A_{[1,y]} \tag{10.5}$$

Que en términos de la definición de $\ln$ significa

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{para } x, y > 0.$$

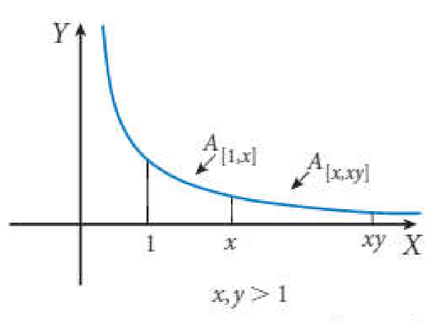


Figura 10.4

Propiedades

De la propiedad logarítmica se sigue que para todo $x > 0$, la función $\ln$ satisface:

$$\begin{array}{lllllll}
\ln(x^2) & = & \ln(xx) & = & \ln(x)+\ln(x) & = & 2\ln(x) \\
\ln(x^3) & = & \ln(x^2\mathbf{x}) & = & \ln(x^2)+\ln(x) = 2\ln(x)+\ln(x) & = & 3\ln(x) \\
\ln(x^4) & = & \ln(x^3x) & = & \ln(x^3)+\ln(x) = 3\ln(x)+\ln(x) & = & 4\ln(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

O sea,

$$\ln\big(\overbrace{x^n}^{x\cdot x\cdots x}\big) = \overbrace{n\ln(x)}^{\ln(x)+\ln(x)+\ldots+\ln(x)} \quad \text{para todo } x > 0 \text{ y } n \in \mathbb{N}. \tag{10.6}$$

Usando el teorema fundamental del cálculo, que veremos en la unidad 12 en la página 412, podemos probar que la función $\ln x$ es derivable para todo $x > 0$ y su derivada vale:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{para todo } x > 0.$$

A continuación enunciamos las propiedades más importantes de la función logaritmo. Las demostraciones de algunas de ellas aparecen en el Apéndice D.

- $\ln 1 = 0$, ya que el área debajo de la gráfica de la función $\frac{1}{x}$ sobre el intervalo $[1,1]$, es cero.
- **Logaritmo del inverso multiplicativo**: Si $x > 0$, entonces:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x.$$

Para comprobar esta igualdad observamos que

$$0 = \ln 1 = \ln\left(x\frac{1}{x}\right)$$

Usamos ahora la propiedad logarítmica (10.3)

$$0 = \ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Al despejar $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ obtenemos el resultado deseado:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

- **Propiedad logarítmica del cociente**: Si $x, y > 0$, entonces:

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y. \qquad (10.7)$$

Escribimos

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\frac{1}{y}\right)$$

Aplicamos la propiedad logarítmica (10.3)

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$$

Usamos la propiedad del logaritmo del inverso:

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

- **Propiedad del exponente**: Si $x > 0$ y r es un número racional, entonces:

$$\ln x^r = r\ln x. \qquad (10.8)$$

TIP

John Napier (o Neper) (1550-1617) Matemático y teólogo escocés quien, simultáneamente con John Briggs (1561-1631), introdujo y usó los logaritmos como un poderoso dispositivo matemático práctico y teórico con el cual se simplifican los cálculos de las multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces, muy necesarios en los estudios astronómicos. Los logaritmos fueron la base de la regla de cálculo desarrollada por el año 1630.

Gráfica de la función logaritmo natural

- La función $\ln x$ es una función continua y estrictamente creciente: Como $\ln x$, es derivable en $(0,\infty)$ entonces es continua.

Además, $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ si $x > 0$. Recordemos que si la derivada de una función es positiva en un intervalo, entonces la función es estrictamente creciente en ese intervalo. Así,

$$0 < x < y \quad \text{si y solo si} \quad \ln(x) < \ln(y) \tag{10.9}$$

Por lo tanto, para $x, y > 0$ tenemos que

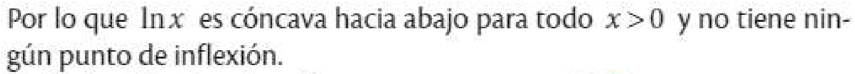
$$\boxed{\ln x = \ln y \ \text{ si y solo si } \ x = y.} \tag{10.10}$$

O sea, *para que dos números positivos sean iguales basta que sus logaritmos sean iguales.*

TIP
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ para $x > 0$.
Dos números positivos x y y son iguales si y solo si $\ln x = \ln y$.

- La función $\ln x$ no tiene puntos críticos, ya que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ es distinta de cero para todo $x > 0$, así que tampoco tiene máximos ni mínimos.
- **Concavidad**: Calculamos la segunda derivada de $\ln x$:

$$(\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$= -\frac{1}{x^2} < 0 \ \text{ para todo } x > 0.$$



Por lo que $\ln x$ es cóncava hacia abajo para todo $x > 0$ y no tiene ningún punto de inflexión.

La función tiene la gráfica que se muestra en la Figura 10.5.

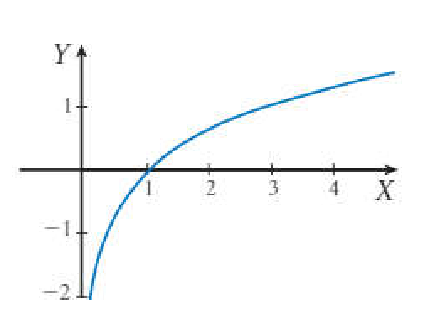


Figura 10.5



- **Límite en ∞.**

Conociendo este pedazo de la gráfica, no queda claro si $\ln x$ crece indefinidamente, o si será asintótica a una recta horizontal cuando x crece. Para ver que la primera de estas opciones es la correcta dibujamos la gráfica para valores grandes de x. En la Figura 10.6 vemos que $\ln x$ crece muy lentamente, pero no parece que esté acotada. De hecho, a continuación comprobaremos que

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} (\ln x) = \infty.}$$

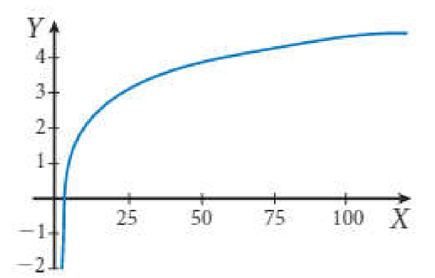


Figura 10.6

Veremos que dado cualquier número natural n podemos encontrar un número x suficientemente grande tal que $\ln x > n$.

Dado un número natural n no importa qué tan grande sea, tomemos $x > 3^n$. Como $\ln$ es creciente, entonces:

$$\ln x > \ln 3^n$$

Ahora usamos la propiedad (10.6)

$$\ln x > n \ln 3$$

Se puede probar, ver D.3 de la página 518 que, $\ln 3 > 1$, de hecho, $\ln 3 = 1.0986$, como podemos verificarlo con una calculadora, así que

$$\ln x > n \ln 3 > n$$

que es lo que queríamos probar. Esto, y el hecho de que $\ln x$ es creciente, muestra que:

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x)=\infty.$$



- **Límite en 0**.

Conociendo este pedazo de la gráfica, no queda claro si $\ln x$ es asintótica al eje Y. (Ver Figura 10.7). Para ver que esto es así, veremos que

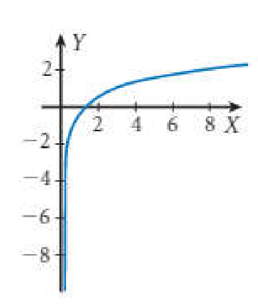


Figura 10.7

$$\lim_{x\to 0}(\ln x)=-\infty.$$

Hacemos un cambio de variable

$$t=\frac{1}{x}$$

Tenemos que si x tiende a 0, siendo $x>0$ entonces t tiende a ∞, de donde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\ln x)&=\lim_{t\to\infty}\left(\ln\frac{1}{t}\right)\\&=\lim_{t\to\infty}(-\ln t)\\&=-\infty\end{aligned}$$

Así que;

$$\lim_{x\to 0}(\ln x)=-\infty.$$

Por lo tanto, el eje Y, que tiene ecuación $x=0$, es una asíntota vertical.

- La función logaritmo natural es una función definida en $(0,\infty)$ que es estrictamente creciente, por tanto uno a uno, y cuya imagen es $\mathbb{R}$.

En la Figura 10.8 de $\ln x$ se puede ver que la recta horizontal $y=1$ corta a la gráfica de $\ln x$, esto quiere decir que hay un número, denotado con e, tal que $\ln(e)=1$.

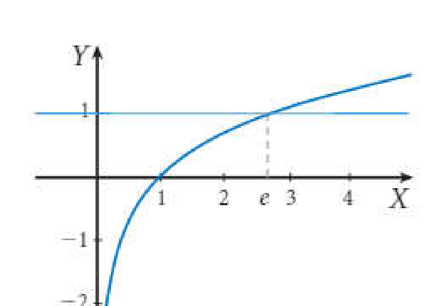


Figura 10.8

En el Apéndice D aparecen las fórmulas D.1 y D.3 que muestran que

$$\ln(2)<\overbrace{1}^{\ln(e)}<\ln(3)$$

Así, por (10.9) tenemos las siguientes estimaciones para e:

$$2<e<3 \tag{10.11}$$

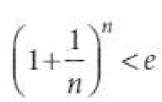
Para obtener mejores estimaciones de e se utiliza la fórmula D.1:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1,\ \text{para todo } n=1,2,\ldots$$

Como $\ln e=1$, sustituimos

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\ln e$$

Por 10.9,



$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$$

TIP

La función $f(x)=\ln x$ es estrictamente creciente, por lo tanto, es uno a uno; su imagen es $\mathbb{R}$, es cóncava hacia abajo y el eje Y es una asíntota vertical.

Evaluamos la expresión del lado izquierdo con n tan grandes como queramos, así, con $n = 2$ obtenemos

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

Con $n = 100$:

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2.7048 < e$$

A medida que aumentamos el valor de n en la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, el valor obtenido es cada vez más cercano a e, cuyo valor hasta la tercera cifra decimal es 2.718. En los cálculos este valor de 2.718 es el que usualmente se asigna a e, pero siempre debemos tener presente que se trata tan solo de una aproximación.

Ahora veremos unos ejemplos de derivadas de funciones en las que interviene el logaritmo natural.

TIP

El número e tiene la propiedad de que $\ln e = 1$.

Ejemplos

1. Encontrar la derivada de la función $h(x) = \ln(3x^2 - 2x + 1)$.

Solución:

Hacemos $y = 3x^2 - 2x + 1$ y $g(y) = \ln y$, entonces $h = g(y)$ de donde:

$$\begin{aligned} h' &= g'(y)y' \\ &= \frac{1}{y}(6x-2) \\ &= \frac{6x-2}{3x^2-2x+1} \end{aligned}$$

2. Encontrar la derivada de la función $h(y) = (\ln x)^3$.

Solución:

Hacemos $y = \ln x$ y $g(y) = y^3$, entonces $h = g(y)$ de donde:

$$\begin{aligned} h' &= g'(y)y' \\ &= 3y^2\frac{1}{x} \\ &= \frac{3(\ln x)^2}{x} \end{aligned}$$

3. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Solución:

a. Dominio de la función.

Como $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces el dominio natural son todos los números reales. Así, $Dom f = \mathbb{R}$.

b. Intersecciones con los ejes.

- Con el eje X. Resolvemos $f(x)=0$.

$$\begin{aligned}\ln\left(x^2+1\right)&=0\\ x^2+1&=1\\ x^2&=0\\ x&=0\end{aligned}$$

Así que el punto $(0,0)$ es el punto de la gráfica que se encuentra sobre el eje X.

- Con el eje Y. Hacemos $x=0$.

$$\begin{aligned}f(0)&=\ln(0+1)\\ &=0\end{aligned}$$

De donde el punto $(0,0)$ es el punto de la gráfica que se encuentra sobre el eje Y.

c. Continuidad.

Como x^2+1 es continua en $\mathbb{R}$, $x^2+1>0$ y la función logaritmo natural es continua en $(0,\infty)$, entonces la función f es continua en $\mathbb{R}$.

- Primera derivada de $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{x^2+1}(2x)\\ &=\frac{2x}{x^2+1}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

d. Puntos críticos.

Como la derivada está definida en todo $\mathbb{R}$ entonces los únicos puntos críticos son aquellos en los que la primera derivada vale cero. Resolvemos $f(x)=0$.

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x^2+1}&=0\\ 2x&=0\\ x&=0\end{aligned}$$

Punto crítico: $x=0$.

e. Intervalos de monotonía

Los intervalos donde la derivada no cambia de signo quedan determinados por los puntos en los que ella se anula:

$$(-\infty,0] \quad \text{y} \quad [0,\infty).$$

En cada uno de los correspondientes intervalos abiertos elegimos un punto y evaluamos la derivada para saber si es positiva o negativa.

- $-1 \in (-\infty, 0)$ y

$$f'(-1) = \frac{2(-1)}{\left((-1)^2+1\right)^2} = -\frac{2}{4} < 0.$$

Así, $f'(x) \leq 0$ para $x \in (-\infty, 0]$ y entonces la función es decreciente en $(-\infty, 0)$.

- $1 \in (0, \infty)$ y

$$f'(1) = \frac{2(1)}{\left((1)^2+1\right)^2} = \frac{2}{4} > 0.$$

Así, $f'(x) \geq 0$ para $x \in [0, \infty)$ y entonces la función es creciente en $(0, \infty)$.

- Resumen de crecimiento:

	$-\infty$		0		∞
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	

f. Máximos y mínimos.
El punto crítico es 0.

- A la izquierda de $x=0$ la derivada es negativa (\ ) y a la derecha es positiva (/), entonces f tiene un mínimo en $x=0$.

g. Segunda derivada.
La primera derivada de f es $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Entonces la segunda derivada es:

$$f''(x) = \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$= \frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$= \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Por lo tanto, $f''(x) = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

h. Concavidad.

Igualamos la segunda derivada a cero:

$$\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=0$$

$$-2x^2+2=0$$

$$x^2=1$$

de donde

$$x=-1 \quad \text{y} \quad x=1$$

Los intervalos abiertos donde la segunda derivada mantiene el mismo signo quedan determinados por los puntos donde la segunda derivada vale cero:

$$(-\infty,-1), \quad (-1,1) \quad \text{y} \quad (1,\infty).$$

En cada intervalo elegimos un punto y evaluamos la segunda derivada para ver si es positiva o negativa.

- $-2\in(-\infty,-1)$ y

$$f''(-2)=\frac{-2(-2)^2+2}{\left((-2)^2+1\right)^2}=\frac{-6}{25}<0.$$

  Entonces por el criterio 9.1 la función f es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1)$.

- $0\in(-1,1)$ y

$$f''(0)=\frac{-2(0)^2+2}{\left((0)^2+1\right)^2}=\frac{2}{1}>0.$$

  Entonces por el criterio 9.1 la función f es cóncava hacia arriba en $(-1,1)$.

- $2\in(1,\infty)$ y

$$f''(2)=\frac{-2(2)^2+2}{\left((2)^2+1\right)^2}=\frac{-6}{25}<0.$$

  Entonces por el criterio 9.1 la función f es cóncava hacia abajo en $(1,\infty)$.

- Resumen de concavidad:

	$-\infty$		-1		1		∞
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
Concavidad		⌢		⌣		⌢	

i. Puntos de inflexión.

De la tabla del punto anterior, observamos que la función tiene dos puntos de inflexión, para los valores $x=-1$ y $x=1$.

Hay puntos de inflexión para: $x=-1$ y $x=1$ y éstos son: $(-1,\ln 2)$ y $(1,\ln 2)$.

j. Límites laterales.
Como el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$ entonces no hay que calcular límites laterales.

k. Límites cuando la variable tiende a ∞ o $-\infty$.

- x tiende a ∞. Hacemos $u = x^2+1$. Entonces $u \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Así

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(x^2+1\right) = \lim_{u\to\infty} \ln(u) = \infty$$

- x tiende a $-\infty$. Hacemos $u = x^2+1$. Entonces $u \to \infty$ cuando $x \to -\infty$. Así

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(x^2+1\right) = \lim_{u\to\infty} \ln(u) = \infty$$

l. Asíntotas.

- Como la función no es racional, no hacemos un análisis de asíntotas oblicuas.
- No hay asíntotas verticales porque la función está definida en todo $\mathbb{R}$.
- Como $\lim_{x\to\infty} \ln\left(x^2+1\right) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(x^2+1\right) = \infty$ entonces no hay asíntotas horizontales.

m. Gráfica, (ver Figura 10.9).

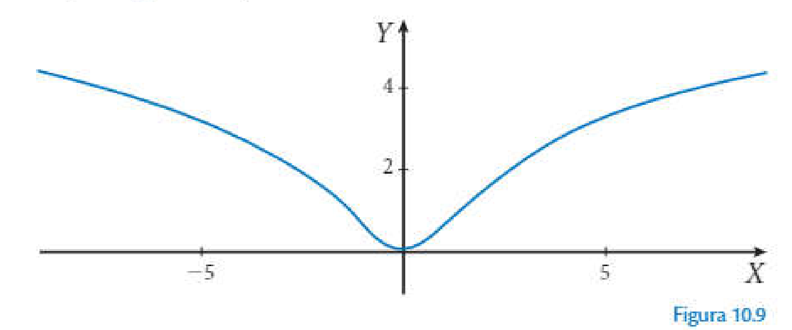


Figura 10.9

Ejemplos

Ejercicios

Calcula las derivadas de las funciones siguientes.

1. $f(x) = \ln\left(x^2+3x\right)$

2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+5}{x-6}\right)$

3. $f(x) = \ln\sqrt{x^3+4x^2}$

4. $f(x) = x\ln x$

5. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

6. $f(x) = \sqrt{\ln x}$

7. $f(x) = \ln^2 x$

8. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$

9. $f(x) = \ln(\sec x)$

10. $f(x) = x^3\ln(x\cos x)$

11. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2+2x+4}$

12. $f(x) = \arctan(\ln x)$

13. $f(x) = \dfrac{x^3+4x^2}{\ln x}$

Dibuja en cada caso la gráfica de la función haciendo un análisis completo.

14. $f(x) = \ln\left(x^2+4x+6\right)$

15. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Función exponencial

En la sección anterior de esta unidad se introdujo de manera geométrica la función logaritmo natural que denotamos mediante $\ln$.

$$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

y vimos que es una función uno a uno y que su imagen es $\mathbb{R}$. Podemos definir entonces una función de $\mathbb{R}$ en $(0,\infty)$ que es su inversa. A esta función la llamaremos *función exponencial*, (ver Figura 10.10)

$$\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$$

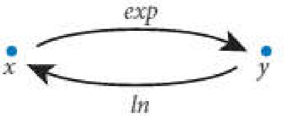


Figura 10.10

Y queda definida como:

$$\exp x = y \quad \text{si } x = \ln y \tag{10.12}$$

Recordamos que el hecho de que las funciones logaritmo y exponencial sean inversas una de la otra, significa que si se aplica una de ellas y luego la otra, se regresa al número original.

$$\boxed{\exp(\ln x) = x \;\text{ y }\; \ln(\exp x) = x.} \tag{10.13}$$

Para obtener la gráfica de la función exponencial, reflejamos la gráfica de la función logaritmo respecto a la recta $y = x$, (ver Figura 10.11), que es el procedimiento general que estudiamos en la página 196 para obtener la gráfica de la inversa de una función.

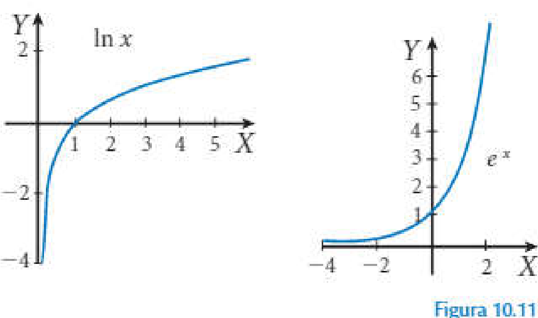


Figura 10.11

Observamos también que es una función estrictamente creciente y que

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0 \;\text{ y }\; \lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$$

El eje X es una asíntota horizontal de $\exp x$.

Recordemos que definimos el número e como el único tal que su logaritmo es 1, (ver página 338)

$$\ln e = 1$$

Usando la propiedad del exponente (10.8), tenemos que si x es un número racional, entonces

$$\ln e^x = x \ln e = x. \tag{10.14}$$

Por (10.13) tenemos que

$$\exp \ln e^x = e^x$$

Y de (10.14) se sigue que

$$e^x = \exp x.$$

Definimos

$$e^x = \exp x \qquad \text{para cualquier número real } x.$$

Con esta notación, podemos escribir (10.12) como:

$$e^x = y \quad \text{si y solo si} \quad x = \ln y \tag{10.15}$$

Y a (10.13) como

$$e^{\ln x} = x \ \text{ y } \ \ln e^x = x. \tag{10.16}$$

TIP

- La función e^x es estrictamente creciente.
- $e^x = y$ si y solo si $x = \ln y$.

Propiedades de la función exponencial

Las demostraciones de las siguientes propiedades se encuentran en el Apéndice D.

Pensamiento crítico

¿Es cierto que dos números reales x y y son iguales si y solo si $e^x = e^y$?

1. **Exponencial de una suma**. Para cualesquiera $x, \ y \in \mathbb{R}$.

$$e^{x+y} = e^x e^y. \tag{10.17}$$

2. **Exponencial de un producto**. Para cualesquiera $x, \ y \in \mathbb{R}$.

$$e^{xy} = \left(e^y\right)^x = \left(e^x\right)^y. \tag{10.18}$$

3. **La función exponencial, evaluada en 0 vale 1.**

$$e^0 = 1$$

4. **La función exponencial es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$ y su derivada es ella misma:**

$$(\exp x)' = \exp x.$$

Con la notación e^x esto se escribe como

$$\left(e^x\right)' = e^x.$$

5. **Si g es derivable,** entonces;

$$\left(e^{g(x)}\right)' = g'(x)e^{g(x)}.$$

Veamos ahora unos ejemplos de derivadas de funciones en las que interviene la función exponencial.



¿Es cierto que $x < y$ si y solo si $e^x < e^y$?

Ejemplos

1. Encontrar la derivada de la función $f(x)=e^{5x^2-x}$.

Solución:

Hacemos $g(x)=5x^2-x$, entonces $f(x)=e^{g(x)}$. Por la propiedad 5 sabemos que $f'(x)=g'(x)e^{g(x)}$.
Como;

$$g'(x)=10x-1$$

Entonces:

$$f'(x)=(10x-1)e^{5x^2-x}$$

2. Encontrar la derivada de la función $f(x)=\tan(e^x)$.

Solución:
Hacemos $y=e^x$ y $g(y)=\tan y$, entonces $f=g(y)$ de donde:

$$\begin{aligned} f' &= g'(y)y' \\ &= (\sec^2 y)e^x \\ &= e^x \sec^2(e^x) \end{aligned}$$

3. Dibujar la gráfica de la función $f(x)=e^{\frac{1}{x^2+1}}$.

Solución:
a. Dominio de la función.

Como $\dfrac{1}{x^2+1}$ está definido para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces el dominio natural de $e^{\frac{1}{x^2+1}}$ son todos los números reales. Así, $Dom f=\mathbb{R}$.

b. Intersecciones con los ejes.

- Con el eje X. Resolvemos $f(x)=0$. Como $e^{\frac{1}{x^2+1}}$ nunca es igual a cero, entonces la gráfica no corta al eje X.
  No hay intersección.
- Con el eje Y. Hacemos $x=0$.

$$\begin{aligned} f(0) &= e^{\frac{1}{0+1}} \\ &= e \end{aligned}$$

De donde el punto $(0,e)$ es el punto de la gráfica que se encuentra sobre el eje Y.

c. Continuidad.

Como $\dfrac{1}{x^2+1}$ es continua en $\mathbb{R}$ y la función exponencial es continua en $\mathbb{R}$, entonces la función f es continua en $\mathbb{R}$.

- Primera derivada de $f(x)=e^{\frac{1}{x^2+1}}$.

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x^2+1}}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}(-2x)$$

$$=\frac{-2xe^{\frac{1}{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Por lo tanto, $f'(x)=\dfrac{-2xe^{\frac{1}{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^2}$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

d. Puntos críticos.
Como la derivada está definida en todo $\mathbb{R}$ entonces los únicos puntos críticos son aquellos en los que la primera derivada vale cero. Resolvemos $f'(x)=0$.

$$\frac{-2xe^{\frac{1}{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^2}=0$$

$$-2xe^{\frac{1}{x^2+1}}=0$$

$$x=0$$

Punto crítico: $x=0$.

e. Intervalos de monotonía.
Los intervalos donde la derivada no cambia de signo quedan determinados por los puntos en los que ella se anula:

$$(-\infty,0] \quad \text{y} \quad [0,\infty).$$

En cada uno de los correspondientes intervalos abiertos elegimos un punto y evaluamos la derivada para saber si es positiva o negativa.

- $-1\in(-\infty,0)$ y

$$f'(-1)=\frac{-2(-1)e^{\frac{1}{(-1)^2+1}}}{\left((-1)^2+1\right)^2}=\frac{2e^{\frac{1}{2}}}{4}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}>0.$$

Así, $f'(x)\geq 0$ para $x\in(-\infty,0]$ y entonces la función es creciente en $(-\infty,0)$.

- $1\in(0,\infty)$ y

$$f'(1)=\frac{-2(1)e^{\frac{1}{(1)^2+1}}}{\left((1)^2+1\right)^2}=\frac{-2e^{\frac{1}{2}}}{4}=\frac{-e^{\frac{1}{2}}}{2}<0.$$

Así, $f'(x)\leq 0$ para $x\in[0,\infty)$ y entonces la función es decreciente en $(0,\infty)$.

- Resumen de crecimiento:

	$-\infty$		0		∞
f'		+	0	–	
f		↗	0	↘	

f. Máximos y mínimos.
El punto crítico es 0.

- A la izquierda de $x=0$ la derivada es positiva (/) y a la derecha es negativa (\ ), entonces f tiene un máximo en $x=0$.

g. Segunda derivada.

La primera derivada de f es $f'(x)=\dfrac{-2xe^{\frac{1}{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^2}$. Entonces la segunda derivada es:

$$f''(x)=\frac{\left(-2e^{\frac{1}{x^2+1}}-2xe^{\frac{1}{x^2+1}}\left(\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)\right)\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2+1\right)(2x)\left(-2xe^{\frac{1}{x^2+1}}\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$=\frac{-2e^{\frac{1}{x^2+1}}\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}\left(\left(1-\frac{2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\right)\left(x^2+1\right)-2\left(2x^2\right)\right)$$

$$=\frac{-2e^{\frac{1}{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^3}\left(x^2+1-\frac{2x^2}{x^2+1}-4x^2\right)$$

$$=\frac{-2e^{\frac{1}{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^3}\left(\frac{\left(x^2+1\right)^2-2x^2-4x^2\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\right)$$

$$=\frac{-2e^{\frac{1}{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^4}\left(x^4+2x^2+1-2x^2-4x^4-4x^2\right)$$

$$=\frac{-2e^{\frac{1}{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^4}\left(-3x^4-4x^2+1\right)$$

$$=\frac{2e^{\frac{1}{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^4}\left(3x^4+4x^2-1\right)$$

Por lo tanto, $f''(x)=\dfrac{2e^{\frac{1}{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^4}\left(3x^4+4x^2-1\right)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

h. Concavidad.
Igualamos la segunda derivada a cero:

$$\frac{2e^{\frac{1}{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^4}\left(3x^4+4x^2-1\right)=0$$

$$3x^4+4x^2-1=0$$

Para resolver esta ecuación hacemos el cambio de variable $z = x^2$, de donde

$$3x^4 + 4x^2 - 1 = 3z^2 + 4z - 1$$

y resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 3z^2 + 4z - 1 &= 0 \\ z &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(-1)}}{2(3)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} \\ &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{6} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

de donde

$$z = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3} \approx -1.55 \quad \text{o} \quad z = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \approx 0.22$$

Como $z = x^2$ y el primer valor es negativo entonces no lo tomamos en cuenta, entonces;

$$x^2 = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$$

de donde

$$x = -\sqrt{\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}} \approx -0.46 \quad \text{o} \quad x = \sqrt{\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}} \approx 0.46$$

Los intervalos abiertos donde la segunda derivada mantiene el mismo signo quedan determinados por los puntos donde la segunda derivada vale cero:

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}, \sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}\right) \text{ y } \left(\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}, \infty\right).$$

En cada intervalo elegimos un punto y evaluamos la segunda derivada para ver si es positiva o negativa.

- $-1 \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}\right)$ y

$$f''(-1) = \frac{2e^{\frac{1}{(-1)^2+1}}}{\left((-1)^2+1\right)^4}\left(3(-1)^4 + 4(-1)^2 - 1\right) = \frac{2e^{\frac{1}{2}}(6)}{2^4} > 0.$$

Entonces por el criterio (9.1) la función f es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}\right)$.

- $0\in\left(-\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}},\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}\right)$ y

$$f''(0)=\frac{2e^{\frac{1}{0+1}}}{(0+1)^4}(3(0)+4(0)-1)=-2e<0.$$

Entonces por el criterio (9.1) la función f es cóncava hacia abajo en $\left(-\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}},\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}\right)$.

- $1\in\left(\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}},\infty\right)$ y

$$f''(1)=\frac{2e^{\frac{1}{(1)^2+1}}}{\left((1)^2+1\right)^4}\left(3(1)^4+4(1)^2-1\right)=\frac{2e^{\frac{1}{2}}(6)}{2^4}>0.$$

Entonces por el criterio (9.1) la función f es cóncava hacia arriba en $\left(\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}},\infty\right)$.

- Resumen de concavidad:

	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}$		$\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}$		∞
f''		+	0	–	0	+	
Concavidad		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

i. Puntos de inflexión.
De la tabla del punto anterior, observamos que la función tiene dos puntos de inflexión, para los valores $x=-\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}$ y $x=\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}$

y éstos son: $\left(-\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}},e^{\frac{3}{1+\sqrt{7}}}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}},e^{\frac{3}{1+\sqrt{7}}}\right)$.

j. Límites laterales.
Como el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$ entonces no hay que calcular límites laterales.

k. Límites cuando la variable tiende a ∞ o $-\infty$.

- x tiende a ∞.

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2+1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}$$
$$= e^0$$
$$= 1$$

- x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x^2+1}} = e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}$$
$$= e^0$$
$$= 1$$

l. Asíntotas.

- Como la función no es racional, no hacemos un análisis de asíntotas oblicuas.
- No hay asíntotas verticales porque la función está definida en todo $\mathbb{R}$.
- Como $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x^2+1}} = 1$ entonces la recta $y=1$ es una asíntota horizontal en ∞ y $-\infty$.

m. Gráfica, (ver Figura 10.12).

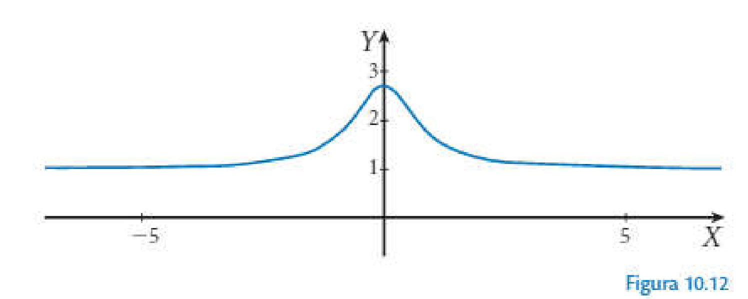


Figura 10.12

Ejemplos

Ejercicios

Calcula las derivadas de las funciones siguientes.

1. $f(x)=e^{3x}$
2. $f(x)=e^{\sqrt{x}}$
3. $f(x)=e^{\cos x}$
4. $f(x)=\operatorname{sen} e^{2x}$
5. $f(x)=\arctan e^{x}$
6. $f(x)=\sqrt{e^{2x}+3x}$
7. $f(x)=e^{6x-8}\ln\left(\sqrt{x+6}\right)$
8. $f(x)=\dfrac{1}{e^x+5}$
9. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
10. $f(x)=\dfrac{50\ln x}{e^x}$
11. $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$
12. $f(x)=\operatorname{arcsen} e^{x}$
13. $f(x)=\arctan e^{\left(x^2-6x+7\right)}$

Dibuja en cada caso la gráfica de la función haciendo un análisis completo.

14. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$
15. $f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$

Límites con logaritmos y exponenciales

Calcular $\lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}$.

Solución:
Tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} -\ln x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Calculamos el límite usando la regla de L'Hôpital, es decir, calculamos las derivadas del numerador y denominador, y después el límite del cociente de dichas derivadas, (ver Figura 10.13).

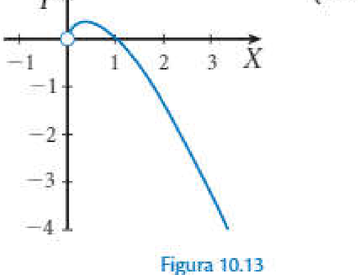


Figura 10.13

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} x \\ &= 0\end{aligned}$$

La regla de L'Hôpital que vimos en la unidad 8, puede aplicarse a cocientes de funciones en los que aparecen las funciones logaritmo o exponencial.

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$.

Solución:
Como

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Entonces aplicando la regla de L'Hôpital tenemos, (ver Figura 10.14):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} \\ &= \lim_{x\to\infty} e^x \\ &= \infty\end{aligned}$$

Figura 10.14

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$.

2. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 3x)}$.

Solución:
Como

$$\lim_{x\to 0} \ln(\cos 5x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \ln(\cos 3x) = 0$$

Entonces aplicando la regla de L'Hôpital tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-5\operatorname{sen}5x}{\cos 5x}}{\frac{-3\operatorname{sen}3x}{\cos 3x}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{5\tan 5x}{3\tan 3x}$$

Como

$$\lim_{x\to 0} 5\tan 5x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} 3\tan 3x = 0$$

Aplicamos nuevamente la regla de L'Hôpital, (ver Figura 10.15):

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 5x}{3\tan 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{25\sec^2 5x}{9\sec^2 3x}$$
$$= \frac{25\sec^2(0)}{9\sec^2(0)}$$
$$= \frac{25}{9}$$

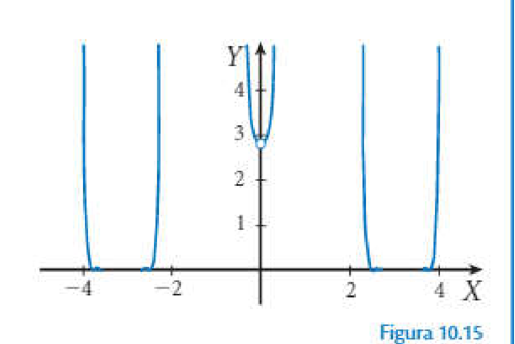


Figura 10.15

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 3x)} = \frac{25}{9}$.

3. Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x}$.

Solución:

Observamos que:

$$\lim_{x\to\infty}\ln^2 x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Calculamos el límite usando la regla de L'Hôpital, es decir, calculamos las derivadas del numerador y denominador, y después el límite del cociente de dichas derivadas:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)}{1}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x}$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} 2\ln x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Entonces volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital, (ver Figura 10.16):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\frac{1}{x}\right)}{1}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}$$
$$= 0$$

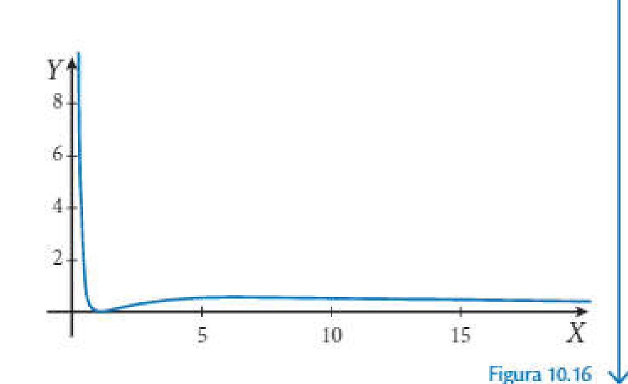


Figura 10.16

Pensamiento crítico

Explica por qué no es útil la regla de L'Hôpital para calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

Ejemplos

4. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3}$.

Solución:

Observamos que:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

Calculamos el límite usando la regla de L'Hôpital, es decir, calculamos las derivadas del numerador y denominador, y después el límite del cociente de dichas derivadas:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2}$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} 3x^2 = \infty$$

Entonces volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x}$$

Nuevamente tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} 6x = \infty$$

de donde;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = \infty$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = \infty$. (Ver Figura 10.17).

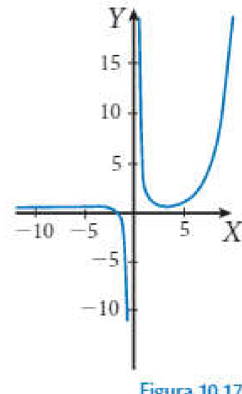


Figura 10.17

Ejercicios

Calcula el límite en cada caso.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \ln\left(\frac{4x^2-6x+3}{-5x^2+7x-1}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{3x}}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\ln(x+1)}{3x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{50e^x - 50}{5x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\ln(\cos^2 x)}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(2x+\sqrt{1-4x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}$
8. $\lim\limits_{x\to -1} e^{(x^2-1)}$
9. $\lim\limits_{x\to \pi} \ln(1+\operatorname{sen} x)$
10. $\lim\limits_{x\to -7} e^{\frac{x^2-6x-7}{x^2+7}}$
11. $\lim\limits_{x\to 2} e^{\frac{x-2}{x^2-4}}$
12. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^3}$
13. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x\ln\left(\frac{x+5}{x}\right)\right)$
14. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^4}$
15. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
16. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{4\ln^2 x}$
17. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^{2x}}$
18. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2x^3}$
19. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{\frac{1}{x}}\right)\right)$
20. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{100\ln^2 x}{x^3}$
21. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{20x^4}$
22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}}}$

La función exponencial con base a: a^x con $a > 0$ y x un número real cualquiera

Ya sabemos que:

- $3^2 = 3 \times 3 = 9$
- $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$
- $16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$
- $8^{2/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

Pero ¿qué querrá decir 2^{π} o $5^{\sqrt{2}}$?

Con ayuda de la función exponencial, definimos la *función exponencial con base* $a > 0$.

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \text{para } x \text{ un número real cualquiera.} \tag{10.19}$$

Observamos que

$$a^0 = e^{0 \ln a} = 1 \quad \text{y} \quad a^1 = e^{\ln a} = a.$$

Por supuesto debemos ver que con esta definición tan complicada, 3^2 sigue siendo 9, y en general, $a^n = a \times a \times \cdots \times a$ (n veces).

Veamos:

$$\begin{aligned} 3^2 &= e^{2 \ln 3} \\ &= e^{\ln 3 + \ln 3} \end{aligned}$$

Por la regla de los exponentes (10.17)

$$e^{\ln 3 + \ln 3} = e^{\ln 3} e^{\ln 3}$$

Y como la exponencial es inversa del logaritmo (10.16)

$$e^{\ln 3} e^{\ln 3} = 3 \times 3 = 9$$

Así que

$$e^{2 \ln 3} = 9$$

como queríamos probar.

De la misma manera se prueba el caso general y se observa que esta definición de a^x coincide con las definiciones de a^n, para n entero y a^r para r racional.

Más aún, aplicando (10.15): $e^x = y$ si y solo si $x = \ln y$, a la expresión (10.19): $e^{x \ln a} = a^x$, obtenemos;

$$x \ln a = \ln a^x$$

Así que la propiedad del exponente (10.8) también es cierta cuando el exponente es cualquier número real.

$$\ln a^x = x \ln a \quad \text{si } a > 0 \text{ y } x \text{ es un número real cualquiera.} \tag{10.20}$$

Derivada de a^x: Para calcular la derivada de la función exponencial a^x, usamos la regla 5 de la página 345: $\left(e^{g(x)}\right)' = g'(x)e^{g(x)}$, con $g(x) = x\ln a$.

$$\begin{aligned}\left(a^x\right)' &= \left(e^{x\ln a}\right)' \\ &= (x\ln a)' e^{x\ln a} \\ &= (\ln a)e^{x\ln a}\end{aligned}$$

Como $a^x = e^{x\ln a}$, obtenemos

$$\boxed{\left(a^x\right)' = a^x \ln a.} \qquad (10.21)$$

Observación:

$$\boxed{\text{si } a > 0 \text{ y } a \neq 1 \text{ entonces } a^x = a^y \text{ si y solo si } x = y.} \qquad (10.22)$$

Si $x = y$, entonces;

$$x\ln a = y\ln a$$

y por consiguiente, la exponencial en estos números son iguales, o sea,

$$e^{x\ln a} = e^{y\ln a}$$

$$a^x = a^y$$

Ahora supongamos que

$$a^x = a^y$$

aplicando logaritmo tenemos

$$\ln a^x = \ln a^y$$

y por (10.20):

$$x\ln a = y\ln a$$

Como $a \neq 1$ entonces $\ln a \neq 0$, cancelando tenemos

$$x = y$$

Notamos que para $a = 1$ la equivalencia anterior no se cumple, ya que $1^x = 1$ para cualquier $x \neq 0$.

Para dibujar la gráfica de a^x observamos que:

1. a^x, con $a > 1$, es una función continua por ser derivable y es estrictamente creciente, ya que su derivada $a^x \ln a$ es positiva en todo su dominio.
2. $a^0 = 1$ y, por lo tanto, la gráfica de a^x corta al eje Y en 1.
3. a^x, con $a > 1$, tiende a ∞ cuando x tiende a ∞ y tiende a 0, cuando x tiende a $-\infty$.

Observación: Como e es mayor que 1, la función e^x tiene todas las propiedades antes mencionadas.

A continuación en la Figura 10.18 aparecen las gráficas de las funciones exponenciales para los valores de la base $a = 2, 4, 6$.

TIP

Si $a > 0$ entonces

$\left(a^x\right)' = a^x \ln a.$

Figura 10.18

Leyes de los exponentes

Las *leyes de los exponentes* que conocemos para potencias enteras se satisfacen también para exponentes reales, es decir, si a y b son dos reales positivos y, x y y son reales arbitrarios, entonces:

1ª $a^{x+y} = a^x a^y.$ 2ª $\left(a^x\right)^y = a^{xy}.$ 3ª $(ab)^x = a^x b^x.$

4ª $a^0 = 1.$ 5ª $a^1 = a.$ 6ª $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}.$

En el Apéndice D están las demostraciones de estas propiedades.

La función potencia $f(x) = x^b$, con b irracional

En la unidad 2 se definió la función potencia;

$$f(x) = x^r$$

donde r es un número racional. Ahora la definiremos para cualquier exponente irracional b:

$$x^b = e^{b \ln x}. \qquad (10.23)$$

Como la función $\ln x$ solo está definida para $x > 0$, el dominio de x^b, con b irracional es el conjunto de números $x > 0$.

Esta definición también se puede aplicar cuando el exponente es racional y coincide con la definición dada anteriormente. Por ejemplo, veamos que con esta definición, $25^{1/2}$ sigue siendo la raíz cuadrada de 25, es decir $25^{1/2} = 5$ y en general que $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

Debemos probar que con la definición (10.23)

$$\left(25^{\frac{1}{2}}\right)\left(25^{\frac{1}{2}}\right) = 25$$

En efecto

$$25^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln 25}$$

Así que

$$\left(25^{\frac{1}{2}}\right)\left(25^{\frac{1}{2}}\right) = e^{\frac{1}{2}\ln 25}e^{\frac{1}{2}\ln 25}$$

Por la propiedad de los exponentes (10.17)

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}\ln 25}e^{\frac{1}{2}\ln 25} &= e^{\frac{1}{2}\ln 25+\frac{1}{2}\ln 25} \\ &= e^{\ln 25} \end{aligned}$$

y como el logaritmo y la exponencial son inversas una de la otra;

$$e^{\ln 25} = 25$$

Así

$$\left(25^{\frac{1}{2}}\right)\left(25^{\frac{1}{2}}\right) = 25$$

es decir

$$\left(25^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{25}$$

En general

$$\begin{aligned} \overbrace{a^{1/n}\cdots a^{1/n}}^{n\text{ veces}} &= \overbrace{e^{\frac{1}{n}\ln a}\cdots e^{\frac{1}{n}\ln a}}^{n\text{ veces}} \\ &= e^{\frac{1}{n}\ln a+\cdots+\frac{1}{n}\ln a} \\ &= e^{\ln a} \\ &= a \end{aligned}$$

así que

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

La derivada de x^b

Para calcular la derivada x^b, usamos la regla 5 de la página 345: $\left(e^{g(x)}\right)' = g'(x)e^{g(x)}$, con $g(x) = b\ln x$:

$$\begin{aligned} \left(x^b\right)' &= \left(e^{b\ln x}\right)' \\ &= (b\ln x)'e^{b\ln x} \\ &= \left(\frac{b}{x}\right)e^{b\ln x} \end{aligned}$$

Como $x^b = e^{b\ln x}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left(x^b\right)' &= \frac{bx^b}{x} \\ &= bx^{b-1} \end{aligned}$$

Que como era de esperarse, es la misma fórmula que teníamos cuando el exponente es racional.

Como x^b es derivable, entonces es continua.

El signo de la derivada de x^b depende del signo de b, así que x^b es creciente cuando $b>0$ y es decreciente cuando $b<0$, (ver Figura 10.19).

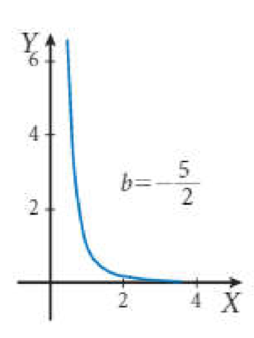


Figura 10.19

Veamos ahora algunos ejemplos de derivadas de funciones en las que intervienen funciones exponenciales del tipo a^x.

Ejemplos

1. Encontrar la derivada de la función $f(x)=2^{4x^2-1}$.
   Hacemos $y=4x^2-1$ y $g(y)=2^y$, entonces $f=g(y)$ y aplicamos la regla de la cadena. Para calcular la derivada de 2^y utilizamos la fórmula (10.21): $\left(a^y\right)'=a^y\ln a$.

$$\begin{aligned} f' &= g'(y)y' \\ &= \left(2^y\ln 2\right)8x \\ &= \left(2^{4x^2-1}\ln 2\right)(8x) \end{aligned}$$

2. Encontrar la derivada de la función $f(x)=\cos\left(3^x\right)$.
   Hacemos $y=3^x$ y $g(y)=\cos(y)$, entonces $f=g(y)$. Por la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} f' &= g'(y)y' \\ &= -\operatorname{sen}(y)3^x\ln 3 \\ &= -\operatorname{sen}\left(3^x\right)3^x\ln 3 \\ &= -\left(3^x\right)(\ln 3)\operatorname{sen}\left(3^x\right) \end{aligned}$$

Funciones logarítmicas

¿Cuál es el número y que satisface la ecuación $10^y=100$?

Solución:
La respuesta, $y=2$, es muy fácil de obtener y podemos encontrarla por tanteo, en cambio la pregunta ¿cuál es el número y que satisface la ecuación $10^y=3$? no tiene una respuesta tan fácil.

TIP
En 1624 se publicó la primera gran tabla de logaritmos decimales (de base 10). Su autor fue el matemático inglés Henry Briggs (1561-1630). Los logaritmos decimales son también llamados de Briggs o comunes.

Para resolver esta ecuación aplicamos la función logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$$\ln 10^y = \ln 3$$

y aplicamos la propiedad (10.8)

$$y \ln 10 = \ln 3$$

Finalmente despejamos y

$$y = \frac{\ln 3}{\ln 10}$$

Al número

$$\frac{\ln 3}{\ln 10}$$

le llamamos *logaritmo base* 10 de 3 y escribimos

$$\log_{10} 3 = \frac{\ln 3}{\ln 10}$$

En general, para cualquier número $x > 0$, el *logaritmo base 10 o logaritmo decimal* de x es:

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Y por la discusión anterior, $y = \log_{10} x$ es la solución de la ecuación

$$10^y = x$$

Es decir, $\log_{10} x$ es el número al que hay que elevar 10 para obtener x:

$$10^y = x \quad \text{si y solo si} \quad y = \log_{10} x. \tag{10.24}$$

Observamos que

$$\log_{10} 10 = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$$

y

$$x = y \quad \text{si y solo si} \quad \log_{10} x = \log_{10} y. \tag{10.25}$$

Ejemplos

1. Probar que la función $\log_{10}$ tiene la propiedad logarítmica; es decir,

$$\log_{10}(xy) = \log_{10}(x) + \log_{10}(y) \text{ si } x, y \text{ son números reales positivos}$$

Solución:
Escribimos

$$\log_{10}(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln 10}$$

Como sabemos que la función logaritmo natural satisface la propiedad logarítmica, ver (10.5) entonces

$$\begin{aligned}\log_{10}(xy) &= \frac{\ln x + \ln y}{\ln 10} \\ &= \frac{\ln x}{\ln 10} + \frac{\ln y}{\ln 10} \\ &= \log_{10} \boldsymbol{x} + \log_{10} y\end{aligned}$$

2. ¿Cuál es la solución de la ecuación $10^x = 300$?

Solución:
Aplicamos $\log_{10}$ a ambos lados de la ecuación

$$\log_{10} 10^x = \log_{10} 300$$

De donde:

$$x = \log_{10} 300.$$



Los logaritmos decimales fueron sumamente importantes para los cálculos numéricos por tener la propiedad (10.24). Esto duró hasta finales del siglo XX cuando se inventaron las calculadoras de bolsillo. Lo que había entonces eran tablas de logaritmos en base 10 para números entre 1 y 10.

Con relación al ejemplo anterior, si solo conociéramos los logaritmos decimales de números positivos menores que 10, procederíamos como sigue:

$$\log_{10} 300 = \log_{10}\left(3\times 10^2\right)$$

y aplicando las propiedades del logaritmo tenemos:

$$\begin{aligned}\log_{10} 300 &= \log_{10}\left(3\times 10^2\right) \\ &= \log_{10}(3) + \log_{10}\left(10^2\right) \\ &= \log_{10}(3) + 2\end{aligned}$$

Es decir, podemos calcular $\log_{10}300$, buscando el logaritmo de 3 en una tabla y sumándole 2 a ese valor.

Para multiplicar $234\times 6\,954$ usando los logaritmos decimales, se procedía de la siguiente manera:

1. Se escribía

$$234 = 2.34\times 10^2 \quad \text{y} \quad 6\,954 = 6.954\times 10^3.$$

2. Se buscaba el logaritmo de 2.34 y de 6.954:

$$\begin{aligned}\log_{10} 2.34 &= 0.36922 \\ \log_{10} 6.954 &= 0.84223\end{aligned}$$

3. Entonces

$$\log_{10} 234 = \log_{10}\left(10^2\times 2.34\right) = 2 + 0.36922$$

$$\log_{10} 6\,954 = \log_{10}\left(10^3\times 6.954\right) = 3 + 0.84223$$

4. Usando la propiedad logarítmica

$$\begin{aligned}\log_{10}(234\times 6\,954) &= \log_{10}234+\log_{10}6\,954\\ &=2+0.36922+3+0.84223\\ &=6.2115\\ &=6+0.2115\end{aligned}$$

5. Se buscaba en la tabla de logaritmos qué número entre 1 y 10 tenía como logaritmo a 0.2115,

$$0.2115=\log_{10}1.6274$$

Así que

$$\log_{10}\left(1.6274\times 10^{6}\right)=6+0.2115$$

6. Como

$$\begin{aligned}\log_{10}(234\times 6\,954) &= 6+0.2115\\ &=\log_{10}\left(1.6274\times 10^{6}\right)\end{aligned}$$

Entonces, por (10.25), el producto de 234×6954 es igual a

$$1.6274\times 10^{6}=1\,627\,400$$

La precisión de la respuesta dependía del número de decimales que se utilizaba para calcular los logaritmos. Obviamente ya no multiplicamos así, sino que utilizamos calculadoras.

Así como definimos el logaritmo base 10, podemos definir funciones logarítmicas para cualquier base $a>0$, distinta de 1.

Resolvemos

$$a^{y}=x$$

entonces aplicando ln:

$$\begin{aligned}\ln a^{y} &= \ln x\\ y\ln a &= \ln x\\ y &= \frac{\ln x}{\ln a}\end{aligned}$$

Y a este cociente le llamamos *logaritmo base a de x*.

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a} \tag{10.26}$$

y el logaritmo $\log_a$ tiene la propiedad

$$\log_a x=y \quad \text{si y solo si} \quad x=a^{y}, \tag{10.27}$$

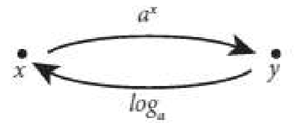


Figura 10.20

es decir, $\log_a$ y la función exponencial a^{x} con base a son inversas una de la otra y $\log_a x$ es el número al que hay que elevar a para obtener x, (ver Figura 10.20).

El hecho que a^{x} y $\log_a$ sean inversas una de la otra significa que si se aplica una de ellas y después la otra, se regresa al mismo valor.

$$a^{\log_a x}=x \quad \text{y} \quad \log_a a^{x}=x. \tag{10.28}$$

Derivada de la función $\log_a(x)$:

Para calcular la derivada de $\log_a(x)$ se utiliza la definición (10.26)

$$\begin{aligned}(\log_a(x))' &= \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' \\ &= \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x\ln a}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln a}. \qquad (10.29)$$

TIP

Si $a > 0$ entonces $\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln a}$ para $x > 0$.

Propiedades de las funciones logarítmicas

Usando las propiedades análogas de la función logaritmo natural, se obtienen las siguientes propiedades de las funciones logarítmicas. Sus demostraciones están en el Apéndice D.

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, si $x, y > 0$.
2. $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$, si $x > 0$ y r es un real arbitrario.
3. $\log_a(1) = 0$.
4. $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$, si $x > 0$.
5. $\log_a(a) = 1$.
6. $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es uno a uno y su imagen es $\mathbb{R}$.

Para dibujar las gráficas de $\log_a x$ observamos que:

1. $\log_a(x)$, con $a > 1$, es una función continua por ser derivable y es estrictamente creciente, ya que su derivada $\frac{1}{x\ln a}$ es positiva en todo su dominio.
2. $\log_a(1) = 0$ y, por tanto, la gráfica de $\log_a(x)$ corta al eje X en 1.
3. $\log_a(x)$, con $a > 1$, tiende a ∞ cuando x tiende a ∞ y tiende a $-\infty$ cuando x tiende a 0.

Pensamiento crítico

¿Si $1 < a < b$ y $x > 1$, cuál número es más grande $\log_a(x)$ o $\log_b(x)$?

En la Figura 10.21 aparecen las gráficas de las funciones logarítmicas para los valores de la base $a = 2,\ 4,\ 6$.

Observación: Como e es mayor que 1, la función $\log_e(x)$ tiene todas las propiedades antes mencionadas. Más aún,

$$\begin{aligned}\log_e(x) &= \frac{\ln x}{\ln e} \\ &= \ln x,\end{aligned}$$

así que el logaritmo de base e es el logaritmo natural.

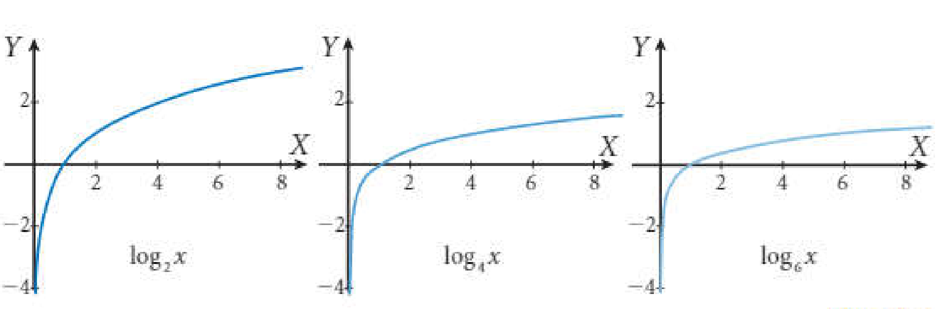


Figura 10.21

Ejemplos

1. En ocasiones, es necesario calcular el logaritmo base a de cierto número, pero la calculadora que tenemos únicamente nos permite calcular logaritmos naturales, así que es necesario convertir el $\log_a$ en $\ln$. Escribir la expresión $\log_5(30)$ en términos del logaritmo natural $\ln$.

   Solución:
   Recordamos la definición (10.26) de $\log_a$

   $$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

   entonces

   $$\log_5(30) = \frac{\ln 30}{\ln 5}$$

   Si nuestra calculadora tiene la tecla $\ln$, podemos evaluar

   $$\frac{\ln 30}{\ln 5} \approx \frac{3.4012}{1.6094} = 2.1133$$

   entonces

   $$\log_5(30) \approx 2.1133.$$

2. Encontrar el dominio natural de la función $f(x) = \log_4(5x-2)$.

   Solución:
   La función $\log_4$ está definida únicamente en los números reales positivos, así que para que un número x esté en el dominio de $\log_4(5x-2)$, se necesita que;

   $$5x-2>0.$$

   Resolvemos dicha desigualdad

   $$\begin{aligned} 5x-2 &> 0 \\ 5x &> 2 \\ x &> \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

   Así que el dominio de $\log_4(5x-2)$ es el intervalo $\left(\frac{2}{5}, \infty\right)$.

Utilizando las propiedades de las funciones logarítmicas y recordando que éstas son las inversas de las funciones exponenciales, podemos calcular algunos logaritmos sin necesidad de recurrir a una calculadora o a una tabla de logaritmos.



1. Expresar $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ usando potencias de 3 y evaluar dicho logaritmo.

   Solución:
   Notamos que $81 = 3^4$, así que

   $$\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^4}\right) = \log_3\left(3^{-4}\right)$$

y ahora utilizamos (10.28)

$$\log_3\left(3^{-4}\right)=-4$$

así que

$$\log_3\left(\frac{1}{81}\right)=-4.$$

2. Calcular $\log_2(256)$.

Solución:
Como estamos tratando de evaluar un logaritmo base 2, expresamos 256 como una potencia de 2

$$256=2^8$$

entonces

$$\log_2(256)=\log_2\left(2^8\right)$$

y por (10.28)

$$\log_2\left(2^8\right)=8,$$

así que

$$\log_2(256)=8.$$

Ejemplos

Ejercicios

Calcula los valores de los siguientes logaritmos.

1. $\log_2(64)$

2. $\log_3(81)$

3. $\log_9(9)$

4. $\log_7(343)$

5. $\log_5(625)$

6. $\log_a(a)$

7. $\log_e(1)$

8. $\log_{10}(100\,000)$

9. $\log_{\sqrt{2}}(2)$

10. $\log_4(64)$

11. $\log_{\frac{1}{3}}(27)$

12. $\log_6(7776)$

Escribe una expresión equivalente a $\log_a(x)=b$, en términos de una potencia de a en cada caso.

13. $\log_2(256)=8$

14. $\log_4(1024)=5$

15. $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)=-3$

16. $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)=-4$

17. $\log_{\frac{1}{4}}(64)=-3$

18. $\log_{\frac{e}{\sqrt{2}}}\left(\frac{e^2}{2}\right)=2$

Encuentra el dominio natural de cada función.

19. $f(x)=\ln(10+x)$

20. $f(x)=\log_8(5-2x)$

21. $f(x)=\log_4 x^3$

22. $f(x)=\log_5\left(x^2-16\right)$

23. $f(x)=\log_{10}((x-8)(x-1))$.

24. $f(x)=\ln((x+4)(x-6))$

Ejercicios

Escribe los siguientes logaritmos en términos de ln. Simplifica usando las propiedades de logaritmo natural.

25. $\log_6(42)$

26. $\log_{12}(30)$

27. $\log_7(24)$

28. $\log_{\frac{1}{3}}(65)$

29. $\log_{\frac{1}{7}}(e)$

30. $\log_{\frac{\pi}{2}}(2\pi)$

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Resolver las ecuaciones:

- $\log_5(3x+4)=2.$
- $2^{x^2+x+1}=2^{-x}.$

Solución:

- Sabemos, por la definición de $\log_5$, que

$$3x+4=5^2$$
$$3x+4=25.$$

Al despejar obtenemos;

$$x=7.$$

Comprobación:

$$\begin{aligned}\log_5(3(7)+4)&=\log_5(25)\\&=\log_5 5^2\\&=2\log_5 5\\&=2.\end{aligned}$$

- Recordamos que $a^x=a^y$, con $a>0$ y $a\neq 1$, implica que $x=y$ (observación de la página 356).

  Así, $2^{x^2+x+1}=2^{-x}$ es lo mismo que decir

$$x^2+x+1=-x,$$

o sea,

$$x^2+2x+1=0$$
$$(x+1)^2=0.$$

que tiene por única solución $x=-1$.

Comprobación:

$$2^{x^2+x+1}=2^{(-1)^2-1+1}=2$$

y

$$2^{-x}=2^{-(-1)}=2.$$

Los anteriores son ejemplos de las llamadas ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Para resolverlas deben tenerse presentes las propiedades de $\log_a$ que aparecen en la página 363 y las de a^r que están en la página 357.

Ejemplos

1. Resolver $\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{x-1}-\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{x}=-1.$

Solución:
Sabemos que

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y.$$

Así, la ecuación propuesta se transforma en;

$$\log_{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}=-1$$

$$\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x-1}{x}}=-1.$$

Como

$$\log_a z^r=r\log_a z,$$

obtenemos

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}\frac{x-1}{x}=-1.$$

Entonces, debemos resolver

$$\log_{\frac{3}{2}}\frac{x-1}{x}=-2$$

es decir,

$$\frac{x-1}{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$$

$$\frac{x-1}{x}=\frac{4}{9}.$$

Al despejar, tenemos:

$$5x-9=0$$

La solución es $x=\frac{9}{5}.$

2. Resolver la ecuación $\pi^{1-x}=e^x.$

Solución:
Aplicando logaritmo natural a ambos miembros

$$\ln\left(\pi^{1-x}\right)=x$$

$$(1-x)\ln\pi=x.$$

Al despejar, tenemos:

$$(1-x)\ln\pi=x$$

$$\ln\pi-x\ln\pi=x$$

$$\ln\pi=x+x\ln\pi$$

$$\ln\pi=x(1+\ln\pi)$$

$$x=\frac{\ln\pi}{1+\ln\pi}.$$

Pensamiento crítico

¿Cuál debe ser la base a del logaritmo para que la ecuación $\log_a(2x-1)=3$ tenga como solución $x=172$?

Ejemplos

3. Resolver la ecuación $3e^{2x}-e^{x}-2=0$.

Solución:

Escribimos $u=e^x$, entonces la ecuación es

$$3u^2-u-2=0$$

factorizamos:

$$(3u+2)(u-1)=0.$$

De donde

$$\begin{aligned} 3u+2 &= 0 \\ u &= -\frac{2}{3} \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} u-1 &= 0 \\ u &= 1. \end{aligned}$$

Si $u=-\frac{2}{3}$, entonces

$$e^x=-\frac{2}{3},$$

Como la exponencial es siempre positiva, no existe x que satisfaga esta ecuación.

Si $u=1$, entonces

$$\begin{aligned} e^x &= 1 \\ x &= \ln 1 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

La solución de la ecuación es $x=0$.

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones.

1. $\log_5(10x-3)=-1$
2. $\log_7\left(x^2-32\right)=2$
3. $\log_9\left(x^2-4x-44\right)=0$
4. $\log_2\left(x^2-13x+52\right)=4$
5. $\log_4\left(x^2+7\right)=2$
6. $\log_{10}\left(x^2+4x-4\right)=2\log_{10}(x)$
7. $6^{x+1}=2^{x-1}$
8. $2e^{\frac{1}{3}x}=3$
9. $\log_5(x-4)+\log_5 x=1$
10. $6^{5x-9}=216$
11. $\log_2\left(\sqrt{9x-11}\right)=2$
12. $\log_4(8)-3\log_4(x-6)+3=0$
13. $\log_{10}(3x+7)^{\frac{1}{3}}=1$
14. $\log_2(x+5)^2=4$
15. $\left(\frac{8}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$
16. $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}=\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1}$
17. $16^{5x-1}-64=0$
18. $\log_2(x)+\log_{\sqrt{2}}(x)-2=0$

Aplicaciones

El interés compuesto

Una persona invierte $10 000.00 con una tasa de interés anual de 20%. ¿Cuánto recibirá al término de 1 año, si el interés es simple? ¿Cuánto recibirá en el mismo periodo, si el interés se compone trimestralmente?

Solución:
Escribimos el interés en forma decimal, esto es, el interés es 0.20.

En el primer caso, el inversionista recibirá su inversión, $10 000.00, más el interés devengado I cuyo monto es

$$I = 10\,000 \times 0.20 = 2\,000.$$

El total será $12 000.00.

En el segundo caso, el interés que se genera al término de cada trimestre $\left(\text{a razón de } \frac{0.20}{4}\right)$ se agrega al capital para, sobre la nueva cantidad así obtenida, determinar el interés correspondiente al siguiente periodo; o sea, se paga interés sobre interés. Siguiendo este proceso hacemos la siguiente Tabla para calcular lo que recibirá el inversionista al final de 1 año.

Trim.	Capital al final del trimestre	Trim.	Interés del trimestre
	$C_0 = 10\,000$ capital inicial	1o.	$\frac{10000 \times 0.20}{4} = 500$
1o.	$C_1 = 10\,000 + 500 = 10\,500$	2o.	$\frac{10500 \times 0.20}{4} = 525$
2o.	$C_2 = 10\,500 + 525 = 11\,025$	3o.	$\frac{11025 \times 0.20}{4} = 551.25$
3o.	$C_3 = 11\,025 + 551.25 = 11\,576.25$	4o.	$\frac{11576.25 \times 0.20}{4} = 578.81$
4o.	$C_4 = 11\,576.25 + 578.81 = 12\,155.06$		

Por lo tanto, el inversionista recibirá $12 155.00.

En el ejemplo, C_0 es el capital inicial. En tanto que C_1, C_2, C_3 y C_4, son capitales cuyo valor se obtiene del anterior, al agregarle el interés generado en el periodo previo. Tenemos entonces que:

$$C_1 = C_0 + \frac{0.20 \times C_0}{4} = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)$$

$$C_2 = C_1 + \frac{0.20 \times C_1}{4} = C_1\left(1 + \frac{0.20}{4}\right) = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)\left(1 + \frac{0.20}{4}\right) = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)^2$$

$$C_3 = C_2 + \frac{0.20 \times C_2}{4} = C_2\left(1 + \frac{0.20}{4}\right) = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)^2\left(1 + \frac{0.20}{4}\right) = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)^3$$

$$C_4 = C_3 + \frac{0.20 \times C_3}{4} = C_3\left(1 + \frac{0.20}{4}\right) = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)^3\left(1 + \frac{0.20}{4}\right) = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)^4$$

En general, si un capital C_0 se invierte con una tasa de interés anual i (expresada en forma decimal) y éste se compone n veces a lo largo del año (en nuestro ejemplo, $n=4$), entonces la fórmula que nos da el capital C_n que se recibirá al término de un año es:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^n.$$

En la primera sección de esta unidad señalamos que, a medida que aumentamos el valor de n en la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ésta toma un valor cada vez más cercano a e. Similarmente, se puede probar que $\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$ tiende a e^i cuando n tiende a infinito. Así,

$$C_n \simeq e^i C_0$$

y la aproximación es mejor cuanto mayor sea n.

Comportamiento exponencial

Las sustancias radiactivas, como el radio, se desintegran y, por lo tanto, la cantidad de un material radiactivo disminuye con el tiempo. La cantidad de material $C(t)$ presente en el instante t está dada por la fórmula

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

donde $k>0$ es una constante, que varía de acuerdo con la sustancia de que se trate, y C_o es, por supuesto, la cantidad en el instante $t=0$.

La *vida media* de un material radiactivo es el tiempo que debe transcurrir para que una cantidad de dicho material se reduzca a la mitad.

Ejemplo

1. Encontrar la fórmula para determinar la vida media de un material radiactivo en función de k.

Solución:
La vida media será el tiempo $\bar{t}$ para el cual $C(\bar{t})=\frac{C_0}{2}$. Por lo tanto, debemos resolver

$$\frac{C_0}{2} = C_0 e^{-k\bar{t}}$$

lo que nos lleva a la ecuación exponencial

$$e^{k\bar{t}} = 2.$$

Al aplicar $\ln$ a ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$k\bar{t} = \ln 2$$

Concluimos que la fórmula para determinar la vida media es:

$$\bar{t} = \frac{\ln 2}{k}.$$

El tipo de fórmula:

$$f(t) = f_0 e^{\alpha t} \tag{10.30}$$

donde α es una constante, positiva o negativa, se presenta cuando las observaciones o hipótesis de trabajo permiten suponer que, para todo instante t, se tiene

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \approx kf(t),$$

donde la aproximación será mejor cuanto más próxima esté s de t. Es decir, el cambio promedio de f,

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t},$$

en un intervalo de tiempo pequeño (s,t), es muy parecido al valor de f en t, es decir, la derivada es muy parecida a la función misma, como sucede con la función exponencial.

Tal es el caso del ejemplo considerado, donde experimentalmente se observa que

$$\frac{C(s) - C(t)}{s - t} \approx -kC(t).$$

Si en la fórmula (10.30): $f(t) = f_0 e^{\alpha t}$ se tiene que f_0 es positivo, entonces, cuando $\alpha > 0$ se dice que f *crece exponencialmente*, en tanto que se dice que *decrece exponencialmente* cuando $\alpha < 0$.



1. En un cultivo de bacterias, la población en el tiempo t, $P(t)$, satisface la condición;

$$\frac{P(s) - P(t)}{s - t} \approx kP(t) \tag{10.31}$$

Para valores de s muy próximos a t. Si la población en el instante $t = 0$ es de 100 bacterias, o sea $P(0) = 100$, y 6 horas después hay 400 bacterias, entonces ¿cuántas bacterias habrá al transcurrir 1 día, o sea para $t = 24$ (recordemos 1 día $= 24$ horas)?

Solución:

Como $P(t)$ satisface (10.31) se sigue, por lo dicho después del ejemplo introductorio, que vale la fórmula (10.30), que en este caso escribimos como:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

y como, por hipótesis, $P(0) = 100$, tenemos:

$$\begin{aligned} 100 &= P_0 e^{k0} \\ &= P_0 e^0 \\ &= P_0. \end{aligned}$$

O sea,

$$P(t) = 100e^{kt}.$$

Debemos calcular $P(24)=100e^{k24}$. Así, solo necesitamos conocer k.
De acuerdo con la hipótesis, tenemos $P(6)=400$, o sea,

$$100e^{6k}=400$$

o, lo que es lo mismo

$$e^{6k}=4.$$

Con lo que se plantea una ecuación exponencial. Para resolverla aplicamos $\ln$ a ambos miembros de la ecuación:

$$\ln(e^{6k})=\ln(4)$$
$$6k=\ln(4),$$

de donde

$$k=\frac{\ln(4)}{6}$$
$$=\frac{\ln(2^2)}{6}$$
$$=\frac{2\ln(2)}{6}$$
$$=\frac{\ln(2)}{3}$$

y

$$P(t)=100e^{\frac{\ln(2)}{3}t},$$

entonces

$$P(24)=100e^{\frac{\ln(2)}{3}24}$$
$$=100e^{8\ln(2)},$$

pero

$$e^{8\ln(2)}=e^{\ln(2^8)}=2^8$$

de donde

$$P(24)=2^8\times 100=25\,600.$$

Al transcurrir 1 día habrá $25\,600$ bacterias.

2. Si un material radiactivo tiene una vida media de 3.8 días ¿en cuánto tiempo 15 gramos de esa sustancia se reducirán a 5 gramos?

Solución:
Por lo visto en el ejemplo introductorio, la cantidad de material en el tiempo t está dada por la fórmula:

$$C(t)=C_0e^{-kt}$$

y la vida media es:

$$\bar{t}=\frac{\ln 2}{k}. \qquad (10.32)$$

En el tiempo $t=0$ tenemos 15 g del material, es decir $C(0)=C_0=15$. Por lo que la ecuación anterior se transforma en:

$$C(t)=15e^{-kt}$$

y sabemos que la vida media es de 3.8 días, por lo que de (10.32) obtenemos:

$$3.8=\frac{\ln 2}{k},$$

o, lo que es lo mismo

$$k=\frac{\ln 2}{3.8}.$$

Debemos encontrar el tiempo t para el cual $C(t)=5$. Así, tenemos que resolver la ecuación exponencial:

$$5=15e^{-\frac{\ln 2}{3.8}t}$$

Que al despejar se reduce a

$$e^{\frac{\ln 2}{3.8}t}=3.$$

Aplicamos $\ln$ a ambos miembros y obtenemos:

$$\frac{\ln 2}{3.8}t=\ln 3,$$

de donde

$$t=\frac{\ln 3}{\ln 2}(3.8)\approx 6.02 \text{ días}.$$

Ejemplos

Ejercicios

1. ¿Cuánto tiempo tendrá que invertirse un capital de $30\,000$ pesos para duplicarse, si el interés anual es de 3% y éste se compone anualmente? Si se cambia la cantidad inicial por cualquier otra, ¿cuánto tiempo se requiere?
2. El uranio 238, U^{238} (hay 238 neutrones en su composición), tiene una vida media de 4.5×10^9 años. ¿Cuántos años deberán pasar para que $16\,384$ gramos de uranio 238 se reduzcan a 256 gramos?
3. ¿Cuál de las dos opciones da un mayor rendimiento, al finalizar?
   a. Invertir el capital a una tasa de interés de 12% anual compuesto bimestralmente.
   b. Invertir el capital a una tasa de interés de 12% anual compuesto trimestralmente.
4. El carbono 14 es un elemento radiactivo que se encuentra en los seres vivos y cuya cantidad se mantiene constante gracias a que se renueva de manera continua. Al morir, la cantidad de carbono 14 empieza a disminuir. Si la vida media del carbono 14 es de $5\,730$ años, ¿qué porcentaje de la cantidad de carbono 14 conserva un fósil humano de $22\,920$ años?
5. En el año de 1963, en las escuelas primarias oficiales de la Ciudad de México, los alumnos adquirían timbres con valor de 20 centavos cada uno. Al reunir en una libreta un total de 10 pesos, ésta era canjeada por un “bono del ahorro nacional”, el cual duplicaba su valor a los diez años.

¿Qué porcentaje de interés anual se pagaba, si éste se componía anualmente?

6. El protozoario Glaucoma se reproduce por fisión binaria cada 3 horas. Suponiendo que al inicio haya un solo individuo, ¿cuántos puede haber después de transcurridas 27 horas?
7. El polonio 214 es uno de los elementos que resulta de la desintegración del uranio 238. El polonio 214 tiene una vida media de 16×10^{-5} segundos. ¿Qué tiempo debe pasar para que de $8\,192$ gramos de polonio 214 solo queden 512 gramos?
8. El torio 230 resulta de la desintegración del uranio 238 y tiene una vida media de $80\,000$ años. Se usa para calcular la edad de sedimentos oceánicos tan antiguos que las pruebas de carbono no funcionan o bien solo sirven como complemento. ¿Cuántos años deben pasar para que la cantidad de torio 230 contenida en el sedimento se reduzca a la octava parte?
9. Una colonia de bacterias triplica su población cada dos horas. Si se colocan $5\,200$ bacterias en una charola de cultivo, ¿cuántas bacterias habrá una semana después?
10. En una ampolleta se guarda cierta cantidad de radio, elemento radiactivo cuya vida media es de $1\,620$ años. La ampolleta se pierde y $8\,100$ años después es encontrada. ¿Qué fracción del radio inicial queda en ese momento?
11. El protactinio 231 resultado de la desintegración del uranio 235 y útil en la determinación de la edad de algunos fósiles tiene una vida media de $34\,300$ años. Si hace $205\,800$ años había 100 gramos de protactinio 231, ¿cuántos gramos hay ahora?
12. En 1997, México tenía aproximadamente 94 millones de habitantes. El censo de 2000 indica que para finales de ese año la población mexicana era de alrededor de 98 millones. Suponiendo que el comportamiento es exponencial, ¿cuál debería ser la población para el año 2010? Puedes usar una calculadora para obtener el valor del logaritmo. Compara esta predicción con los datos del censo de 2010.

Ejercicios

La exponencial a^x *vs.* la potencia x^a, con $a>1$

Probar que $0<\ln x<x$ si $x>1$ y, a partir de esta desigualdad, estudiar el comportamiento de la función $\dfrac{x}{\ln x}$ cuando x crece indefinidamente.

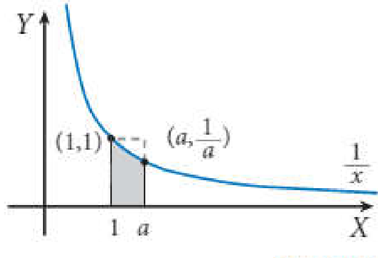


Figura 10.22

Solución:

A partir de la Figura 10.22 concluimos que el área del rectángulo por arriba de la gráfica de $\dfrac{1}{x}$ y con base en el intervalo $[1,a]$ es mayor estrictamente que $\ln(a)$, para todo $a>1$, es decir,

$$\ln a<a-1<a$$

y sabemos que $a>1$ entonces

$$\ln a > \ln(1) = 0.$$

Así,

$$0 < \ln a < a \qquad (10.33)$$

como queríamos probar.

Sabemos que $\sqrt{x}>1$ si $x>1$. Así, tomando $a=\sqrt{x}$ en (10.33) obtenemos:

$$0<\ln\sqrt{x}<\sqrt{x}, \quad \text{si } x>1.$$

Como

$$\ln\sqrt{x}=\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln(x),$$

las desigualdades anteriores se transforman en

$$0<\frac{1}{2}\ln x<\sqrt{x},$$

de donde

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}<\frac{1}{\ln x}, \quad \text{si } x>1$$

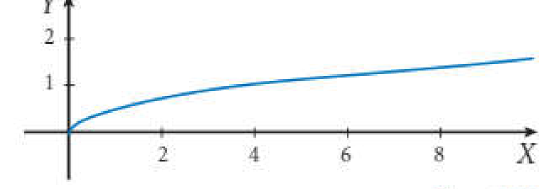


Figura 10.23

y, por lo tanto

$$\frac{x}{2\sqrt{x}}<\frac{x}{\ln x}, \quad \text{si } x>1.$$

Simplificando tenemos:

$$\frac{\sqrt{x}}{2}<\frac{x}{\ln x}, \quad \text{si } x>1. \qquad (10.34)$$

Como $\frac{\sqrt{x}}{2}$ crece indefinidamente cuando x crece $\left(\text{ver la gráfica } \frac{\sqrt{x}}{2} \text{ en la Figura 10.23}\right)$,

y como $\frac{x}{\ln x}$ supera a $\frac{\sqrt{x}}{2}$ se sigue que:

$\frac{x}{\ln x}$ crece indefinidamente cuando x crece indefinidamente.

Así, podemos escribir:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\infty \qquad (10.35)$$

En Figura 10.24 aparecen las gráficas de las funciones $f(x)=x$ y $g(x)=\ln(x)$; ambas son crecientes y tienden a infinito, cuando x tiende a infinito.

El hecho de que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\infty$$

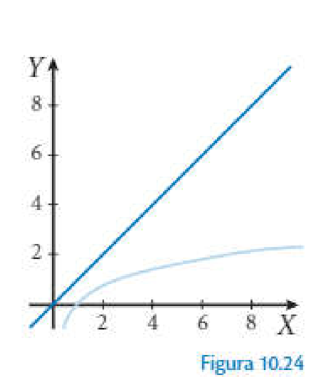
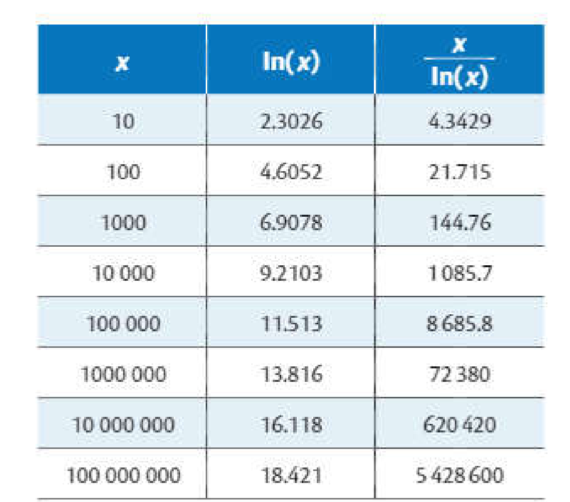


Figura 10.24

Tal y como concluimos en el ejemplo introductorio, indica que $f(x)=x$ crece más rápido de lo que lo hace $g(x)=\ln(x)$ (ver la Tabla siguiente):



x	$\ln(x)$	$\frac{x}{\ln(x)}$
10	2.3026	4.3429
100	4.6052	21.715
1000	6.9078	144.76
10 000	9.2103	1 085.7
100 000	11.513	8 685.8
1000 000	13.816	72 380
10 000 000	16.118	620 420
100 000 000	18.421	5 428 600

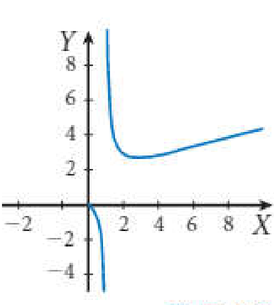


Figura 10.25

La gráfica de la función $\frac{x}{\ln(x)}$ es como la observamos en la Figura 10.25:

El resultado (10.35) puede generalizarse, con lo que obtenemos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\ln(x))^r}=\infty, \quad \text{donde } r \text{ es un real cualquiera.} \qquad (10.36)$$

Así,

> x crece más rápido que $(\ln x)^r$, si $r>1$.

Supongamos que las funciones $g(x)$, $f(x)$ tienden a infinito cuando x tiende a infinito. Si $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty$ o equivalentemente $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, entonces decimos que g crece más rápido que f. Esto sucede, por ejemplo, con $g(x)=x^2$ y $f(x)=x+10$ (ver la tabla siguiente):

x	$x+1\,000$	x^2	$\frac{x+1\,000}{x^2}$
10	1010	100	1.010
10 000	11 000	10^8	0.00011
100 000	101 000	10^{10}	0.0000101
100 000 000	100 001 000	10^{16}	0.00000001

Así, x^2 crece más rápido que $x+10$.

Ejemplos

1. ¿Quién crece más rápido, x o e^x?

Solución:

Sabemos que ambas funciones tienden a infinito cuando x tiende a infinito.

Recordamos que

$$e^x > e^0 > 1, \quad \text{si } x > 0$$

y que

$$\frac{\sqrt{a}}{2} < \frac{a}{\ln a}, \quad \text{si } a > 1$$

según (10.34). Hacemos $a = e^x$ y obtenemos:

$$\frac{\left(e^x\right)^{\frac{1}{2}}}{2} < \frac{e^x}{\ln\left(e^x\right)}, \quad \text{si } x > 0. \qquad (10.37)$$

O sea,

$$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} < \frac{e^x}{x}, \quad \text{si } x > 0.$$

Y como $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$ tiende a infinito cuando x tiende a infinito, (ver Figura 10.26), concluimos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

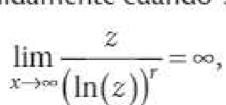
O sea,

$$e^x \text{ crece más rápido que } x.$$

Figura 10.26


2. ¿Quién crece más rápido x^{100} o e^x?

Solución:
Como $z = e^x$ crece indefinidamente cuando x crece, resulta de (10.36):


$$\lim_{x\to\infty} \frac{z}{\left(\ln(z)\right)^r} = \infty,$$

con $r = 100$, que

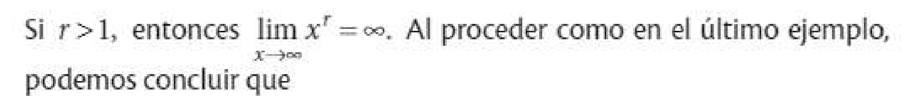
$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{\left(\ln(z)\right)^r} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\left(\ln\left(e^x\right)\right)^{100}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{100}}$$

$$= \infty$$

Es decir, e^x crece más rápido que x^{100} cuando x crece.

Ejemplos


Si $r > 1$, entonces $\lim_{x\to\infty} x^r = \infty$. Al proceder como en el último ejemplo, podemos concluir que

$$e^x \text{ crece más rápido que } x^r$$

A partir de esto se puede probar que;

a^x crece más rápido que x^a para todo $a > 1$.

Mundo virtual

En esta sección te invitamos a visitar varios sitios que contienen material relacionado con el concepto de logaritmo y exponencial. Algo de ese material está desarrollado por los autores de este libro, pero mucho más ha sido desarrollado por personas de todo el mundo que tienen interés en las matemáticas.

- http://atenea.matem.unam.mx Éste es un sitio del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en el cual los investigadores del Instituto están creando material para cursos en línea. Puedes entrar como invitado sin necesidad de registrarte. Una vez dentro del sitio, elige la categoría "Cálculo diferencial e integral", dentro de ella, el curso "Cálculo I" y entra a las lecciones de la sección "Logaritmo y exponencial".
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web Sitio del Ministerio de Educación, Salud y Deporte del Gobierno español que contiene unidades didácticas y recursos interactivos desarrollados con la herramienta Descartes. Estos materiales fueron elaborados por profesores de enseñanza media. Selecciona "Aplicaciones", y luego "Análisis". Dentro de la sección "Funciones elementales" hay varias unidades interactivas relacionadas con el tema de este capítulo.
- http://es.wikipedia.org La enciclopedia en línea Wikipedia es uno de los sitios de referencia para encontrar información relacionada con la ciencia y la cultura. En el buscador escribe: Función logaritmo. Esto te lleva a una sección bastante completa sobre el logaritmo. Escribe también Función exponencial para ir a la sección correspondiente.
- http://www.wolframalpha.com Esta página es, posiblemente una de las mejores páginas de matemáticas en la red. Tiene la desventaja de que está en inglés. Además de tener explicaciones sobre muchos temas, tiene interactivos desarrollados con Mathematica, que es un programa de cálculo simbólico muy poderoso. En el buscador escribe cualquier fórmula, por ejemplo "exp(x)" o "ln(x)" y te va a decir todo lo que querías saber acerca de estas funciones pero temías preguntar y muchas más que ni te imaginabas.
- http://newton.matem.unam.mx/geolab En este sitio puedes descargar el programa Geolab y el curso para aprender a utilizarlo. En las secciones de Mundo virtual te guiaremos para realizar algunas construcciones relacionadas con los temas de este libro.

Construcciones con Geolab

En la unidad de la función inversa aprendiste a hacer la gráfica de una función y de su inversa con Geolab. Para ello, utilizaste el constructor de Curva paramétrica. Repasa este tipo de construcción para dibujar la gráfica de la función exponencial como inversa de la función logaritmo.
Empezamos con la función $f(x)=\ln x$ para $x\in(0,10)$.

1. Elige Curva Paramétrica en el menú Define funciones.
Escribe los siguientes valores en la ventana:

a =	0.001
b =	10
x =	t_
y =	log(t_)
pasos =	100

y acepta la construcción. Observa que en el valor de a pusimos un número ligeramente mayor que 0, ya que en 0 no está definido el logaritmo. Esta construcción dibuja la gráfica de la función $f(t)=\ln t$, porque está dibujando los puntos del plano de la forma $(t,\ln(t))$.

2. Construye otra curva paramétrica invirtiendo los valores que pusiste en x y y.

a =	0.001
b =	10
x =	log(t_)
y =	t_
pasos =	100

3. Observa que se están dibujando los puntos de la forma $(\ln t,t)$. Es decir, esta gráfica es la reflexión de la gráfica de f en la recta $y=x$. Esta gráfica corresponde a la función $g(t)=\exp(t)$.

Ahora vamos a dibujar las gráficas de las funciones $a^t=\exp(t\ln a)$ con la posibilidad de mover el parámetro a.

1. Dibuja la **recta calculada**

A = 0
B = 1
C = 0

la recta debe quedar colocada sobre el eje X.

2. Construye un punto en recta, y colócalo sobre la recta que acabas de construir. Llámalo A. Colócalo en algún lugar en la parte positiva del eje X.

3. Construye una **gráfica de función** con los siguientes valores

a = –10
b = 10
y = exp(log(A.x)*t_)
pasos = 100

4. Arrastra el punto A en la parte positiva del eje X y observa cómo cambia la curva. Si llevas el punto A a la parte negativa del eje, desaparece la gráfica, pues no está definido el logaritmo para valores negativos.

Resumen de la unidad

Propiedades de la función logaritmo natural $\ln x$

1. $\ln 1 = 0$ y $\ln e = 1$.
2. **Propiedad logarítmica del producto**:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

3. **Logaritmo del inverso multiplicativo**: Si $x > 0$ entonces:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x.$$

4. **Propiedad logarítmica del cociente**:

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$$

5. **Propiedad del exponente**: Si x es un número real no negativo y r es un número real;

$$\ln x^r = r \ln x.$$

6. El logaritmo natural es una función definida en $(0, \infty)$ que es uno a uno, así que para x, $y > 0$ se tiene;

$$\ln x = \ln y \quad \text{si y solo si} \quad x = y$$

7. La imagen de la función $\ln$ es $\mathbb{R}$.
8. La función $\ln x$ no tiene puntos críticos, ya que $(\ln x)'$ existe y es distinta de cero para todo $x > 0$, así que tampoco tiene máximos ni mínimos.
9. **Concavidad**: La función logaritmo natural es cóncava hacia abajo en todo su dominio.
10. **Límites en** 0 **y en** ∞:

$$\lim_{x \to \infty} (\ln x) = \infty.$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln x) = -\infty.$$

Propiedades de la función exponencial e^x

1. **Regla de los exponentes**. Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

2. **Regla de los exponentes. Para cualesquiera** $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\left(e^y\right)^x = \left(e^x\right)^y = e^{xy}.$$

3. **La función exponencial, evaluada en 0 vale 1:**

$$e^0 = 1.$$

4. **La función exponencial es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$ y su derivada es ella misma:**

$$(\exp x)' = \exp x.$$

O con la notación e^x:

$$\left(e^x\right)' = e^x.$$

Propiedades de las funciones logarítmicas; $a \neq 1, a, x, y > 0$:

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
2. $\log_a\left(x^r\right) = r\log_a(x)$, r es un real arbitrario.
3. $\log_a(1) = 0$.
4. $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$.
5. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a(y)$.
6. $\log_a(a) = 1$.
7. $\log_a(x) = \log_a(y)$ si y solo si $x = y$.
8. $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es uno a uno y su imagen es $\mathbb{R}$.
9. $\log_e x = \ln x$.
10. $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.
11. $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$.

Propiedades de las funciones exponenciales, $a > 0$:

1. $a^x = e^{x \ln a}$.
2. Si $a > 0$ y $a \neq 1$ entonces $a^x = a^y$ si y solo si $x = y$.
3. $a^{x+y} = a^x a^y$.
4. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$.
5. $(ab)^x = a^x b^x$.
6. $a^0 = 1$.
7. $a^1 = a$.
8. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
9. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.

Ejercicios de repaso

Calcula las derivadas de las funciones siguientes.

1. $f(x)=\ln(\arctan x)$
2. $f(x)=e^{x^2+8x}$
3. $f(x)=\sec\left(e^{7x-9}\right)$
4. $f(x)=\dfrac{e^x \ln x}{x^3+2x^2}$
5. $f(x)=\dfrac{\sec x}{e^{\tan x}}$
6. $f(x)=\dfrac{\ln\left(xe^x\right)}{\sqrt{x}\ln x}$

Calcula el límite en cada caso.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to 3}\ln\left(\dfrac{x^3-2x^2}{x+3}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5}{e^x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right)}{\operatorname{sen} 2x}$
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(e^x+1\right)}{2x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{x\ln(x+1)}}{3x^2+x}$
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(10x^6+4x^2+1\right)}{\ln\left(x^6+x^2\right)}$
14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{x\cos x}-1}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$

Calcula los valores de los siguientes logaritmos.

15. $\log_4\left(\dfrac{1}{16}\right)$
16. $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$
17. $\log_{10}\left(\dfrac{1}{1\,000\,000}\right)$
18. $\log_{\frac{1}{2}}(256)$

Calcula las siguientes operaciones con logaritmos.

19. $\ln(4e)+\log_e\left(e^6\right)-\ln(4)$
20. $\log_5(25x)+\log_5\left(x^4\right)-5\log_5(x)$
21. $\log_3(81)-\log_3\left(\dfrac{1}{27}\right)+3\log_3(3)$
22. $\log_{10}\left(\dfrac{1}{10}\right)^2+\log_{10}(100)-\log_{10}\left(\dfrac{1}{1\,000}\right)$

Encuentra el dominio natural de cada función.

23. $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x+8}\right)$
24. $f(x)=\log_3\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$
25. $f(x)=\log_8\left(\dfrac{x-5}{x-3}\right)$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

26. $\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-11x\right)-\log_{\frac{1}{4}}\left(-x^2+6x\right)=-1$

27. $\ln(x-2)-\ln(3x)=\ln(x+1)-\ln(x)$

28. $-2\log_{12}\left(x+\frac{1}{5}\right)=\log_{12}(25)$

29. $\log_{\frac{1}{3}}\left(2x^2-\frac{5}{3}\right)+\log_{\frac{1}{9}}\left(2x^2-\frac{5}{3}\right)=\frac{3}{2}$

30. $\log_8(x)+\log_4(x-2)-1=0$

31. $\log_3(x)+\log_{27}(x)+\log_9(x)-11=0$

32. $\ln(x-1)^2=\ln(2)+\ln(x-1)$

33. $\log_6(x)+\log_6(x-1)=\log_6(x+35)$

34. $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{x-1}\right)+\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x+1}{x}\right)-\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-1\right)=1$

35. $\log_{\frac{3}{4}}\left(\sqrt{6x-1}\right)+\log_{\frac{3}{4}}(7)-\log_{\frac{3}{4}}\left(\sqrt{\frac{49}{x}}\right)=0$

36. Después de un desastre nuclear, en el aire quedan residuos de un elemento radiactivo cuya vida media es de 25 días. ¿Cuántos días deben pasar para que la cantidad de dicho elemento se reduzca a $\frac{1}{27}$ de la cantidad existente?

37. Un ahorrador depositó en un banco mexicano, el primer día del año de 1972 un capital de $10\,000$ pesos. En el documento correspondiente se estipuló que el interés fijo anual sería de 5% anual y que en caso de no ser retirado, al término de cada año se reinvertirían nuevamente el capital y los intereses al mismo plazo y con la misma tasa de interés. Si el ahorrador decide retirar su dinero el primer día del año 2000, ¿cuánto dinero recibirá? Recuerda que en México, en el año 1993 se le quitaron tres ceros a la moneda, es decir, 1000 pesos se convirtieron en 1 nuevo peso.

38. Un médico administra 100 microgramos de medicamento a un bebé, y sabe que el cuerpo elimina la mitad del medicamento cada 4 horas, ¿qué cantidad de medicamento tiene el cuerpo del bebé 24 horas después de ser ingerido?

39. En una película de ciencia ficción un par de científicos descubren un meteorito que se encuentra a 120 millones de kilómetros de la superficie Tierra, dirigiéndose a la Tierra de tal manera que la distancia se reduce a la mitad, cada 8 horas (o sea, la distancia disminuye exponencialmente). Los científicos calculan que el meteorito es tan grande que, de chocar con la Tierra, ésta desaparecerá. Uno de los científicos afirma que a la Tierra le quedan menos de 9 días de vida, mientras que el otro asegura que el meteorito no destruirá el planeta. ¿A qué distancia está de la Tierra a los 9 días?

Autoevaluación

1. El dominio natural de la función $f(x)=\dfrac{\ln(4-3x)}{\ln(3x-12)}$ es:
   a. $(4,\infty)$
   b. $\varnothing$
   c. $\left(4,\frac{13}{3}\right)\cup\left(\frac{13}{3},\infty\right)$
   d. $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 335.

2. Las soluciones de la ecuación $6^{2x-3}-4^{x+3}=0$ son:
   a. $x=\frac{9}{2}$
   b. $x=3\ln4+3\ln6$
   c. No tiene solución
   d. $x=\dfrac{3\ln6+3\ln4}{2\ln6-\ln4}$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 366.

3. Las soluciones de la ecuación $\log_2 3-\log_2 x=\log_2(12x+5)$ son:
   a. $x=\frac{1}{3}$
   b. $x=-\frac{5}{9}$
   c. $x=-\frac{3}{7}$
   d. $x=\frac{1}{3},\ x=-\frac{3}{4}$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 366.

4. Las soluciones de la ecuación $e^{3x+3}+2e^{x+1}=3e^{2x+2}$ son:
   a. La ecuación no tiene solución.
   b. $x=-1$
   c. $x=-1$ y $x=-1+\ln2$
   d. $x=-1+\ln2$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 368.

5. Si $f(x)=5^{2x-1}$ y $g(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_5 x$, entonces la regla de correspondencia de $(f\circ g)(x)$ es:
   a. $(f\circ g)(x)=5^{2x-1}$
   b. $(f\circ g)(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_5 x$
   c. $(f\circ g)(x)=\frac{5^{2x-1}}{2}+\frac{5^{2x-1}}{2}\log_5 x$
   d. $(f\circ g)(x)=x$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 362.

6. La intersección de la gráfica de $f(x)=2^{x+8}-16$ con el eje X es:
   a. $(-4,0)$
   b. No existe
   c. $(12,0)$
   d. $(0,12)$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 301.

7. La derivada de la función $f(x)=\ln\left(3^{x^2-x+1}\right)$ es:
   a. $\dfrac{1}{3^{x^2-x+1}}$
   b. $\dfrac{2x-1}{3^{x^2-x+1}}$
   c. $(2x-1)\ln3$
   d. $\ln3$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 173, 335 y 356.

8. La función $f(x)=\ln\dfrac{x^2+4x+6}{2x^2+x+4}$ tiene como asíntota vertical a la recta:
   a. $y=-\ln2$
   b. $y=\frac{1}{2}$
   c. $x=\ln\frac{1}{2}$
   d. No tiene asíntota vertical

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 249.

9. La función $f(x)=(x+1)\ln x$ es cóncava hacia arriba en:
   a. $(1,\infty)$
   b. $(-1,\infty)$
   c. $(0,\infty)$
   d. Nunca es cóncava hacia arriba

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 296.

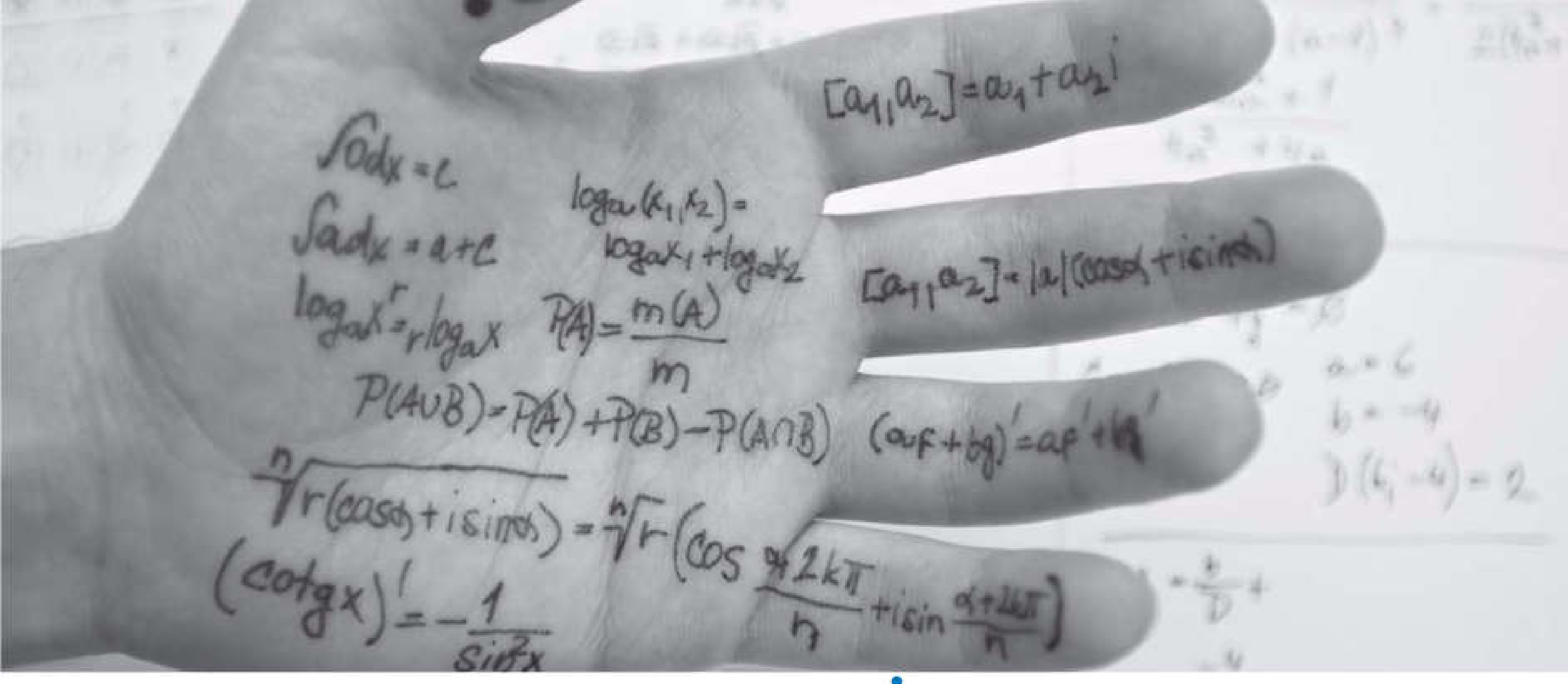
Heteroevaluación

1. Encuentra la derivada de la función $f(x)=\ln\left(5^{\frac{1}{x}}\right)$.

2. Resuelve la ecuación $e^{8x}+4e^{4x}-12=0$.

3. Encuentra las intersecciones de la gráfica de la función $f(x)=\ln(1-3x)+5$ con los ejes coordenados.

4. Si $f(x)=\ln x$ y $g(x)=\dfrac{1-x}{x+5}$, encuentra el dominio de $(f\circ g)(x)$.



La integral es la suma de un número infinito de sumandos.



Integrales de funciones

Los dos temas principales de estudio del *Cálculo Diferencial e Integral* son la derivada y la integral. En la primera parte del libro hemos estudiado la derivada y sus aplicaciones con mucho detenimiento. Lo que resta del libro lo dedicaremos a la integral. Hemos preferido introducir primero la integral indefinida o antiderivada como la operación inversa de la derivación y posteriormente tratar la integral definida.

También se estudiarán integrales que son "casi" inmediatas, es decir, hay que hacer muy poco esfuerzo para reconocer que la función dentro del símbolo de la integral es la derivada de otra función.

Posteriormente se estudia el cambio de variable, que básicamente consiste en identificar la función que queremos integrar como la composición de dos funciones, la segunda de las cuales tiene una integral más sencilla de determinar.

El símbolo de la integral $\int$ fue introducido por Leibniz en el siglo XVII y es como una S alargada, ya que la integral es el límite de una suma.

La integración de funciones es la operación inversa de la derivación. Es decir, integrar una función f significa encontrar una función F cuya derivada es f. En las siguientes unidades veremos lo que significa, cómo se calcula y algunas de sus aplicaciones.

La integración es, junto con la diferenciación, el punto de arranque de otras ramas de las matemáticas, como son; *las ecuaciones diferenciales, la variable compleja, el análisis funcional, y la teoría de la medida,* entre otras.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.



Antiderivadas

En las unidades anteriores hemos estudiado: las funciones derivables, cómo se calcula la derivada de una función y algunas aplicaciones de la derivada.

Así, dada una función derivable f podemos calcular la función f' y para eso nos valemos de las reglas de la derivación.

Ahora nos planteamos el problema inverso: dada una función f, ¿podemos encontrar una función F tal que su derivada sea f? O sea, debemos resolver la ecuación

$$F' = f,$$

donde F es la incógnita.

Otras preguntas relacionadas con la anterior son:

¿Hay solo una función F que resuelva esta ecuación? ¿Hay reglas para encontrar F?

¿De qué nos sirve encontrar dicha función?

Veamos el siguiente ejemplo:

Si $f(x) = 20x$, entonces ¿existe F tal que $F' = f$?

Solución:

De nuestra experiencia con las derivadas y las reglas para derivar sabemos que la función

$$F(x) = 10x^2$$

es tal que

$$F'(x) = 20x$$

TIP

Teorema. Si dos funciones f y g tienen la misma derivada en un intervalo, entonces difieren por una constante. Es decir, $f = g + C$ para alguna constante C.

Ésta no es la única función con esta propiedad, ya que por ejemplo, la derivada de $10x^2 + 3$ también es $20x$, más aún, todas las funciones de la forma $F(x) = 10x^2 + C$, donde C es cualquier constante satisfacen $F'(x) = 10x^2$. Por otro lado, éstas son las únicas funciones cuya derivada es $20x$.

Decimos que una función F es una *antiderivada* o una *primitiva* de f en un intervalo I, que inclusive puede ser un rayo o la recta real, si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

En este texto usaremos más la palabra primitiva que la palabra antiderivada para referirnos a F, aunque esta última recuerda más la propiedad que la caracteriza.

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C es una constante cualquiera entonces

$$\left(F(x) + C\right)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$$

así que, $F(x) + C$ también es una primitiva de f. Puede probarse que todas las primitivas de f en un intervalo son de esta forma.

Ejemplos

Encontrar las primitivas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2$.

Solución:

Recordamos que la derivada de x^3 es $3x^2$, así que una primitiva de $3x^2$ es x^3, las demás primitivas son de la forma $x^3 + C$, donde C es cualquier constante.



2. $f(x)=2x-5x^4$.

Solución:
Razonando como en el ejemplo anterior, una primitiva de $2x$ es x^2 y una primitiva de $5x^4$ es x^5.

Como la derivada de una suma o resta de dos funciones es la suma o resta de sus derivadas:

$$(g+h)'=g'+h' \quad \text{y} \quad (g-h)'=g'-h',$$

entonces una primitiva de $2x-5x^4$ es x^2-x^5, las demás primitivas de f son de la forma x^2-x^5+C, donde C es cualquier constante.

Primera regla de integración

Sabemos que si $n\neq-1$ entonces

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=\frac{1}{n+1}(n+1)x^n=x^n.$$

Por consiguiente, las primitivas de x^n son de la forma

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

Donde, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ es una primitiva de x^n.

A partir de la regla para derivar la función $f(x)=x^n$, donde n es un número real fijo, que se estudió en la página 166, obtenemos la primera regla para encontrar primitivas.

Primera regla para el cálculo de primitivas
Para encontrar una primitiva F de

$$f(x)=x^n,$$

donde $n\neq-1$, aumentamos uno el exponente $\left(x^{n+1}\right)$ y dividimos esta expresión entre el nuevo exponente $(n+1)$, con lo que obtenemos

$$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

El resto de las primitivas son de la forma

$$F(x)+C=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,$$

donde C es una constante cualquiera.

Ejemplos

1. Encontrar las primitivas de $f(x)=x^{-5}$.

Solución:
Usando la anterior, obtenemos que las primitivas de x^{-5} son

$$\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+C=\frac{x^{-4}}{-4}+C$$
$$=-\frac{x^{-4}}{4}+C.$$

2. Un automóvil arranca al tiempo $t=0$ desde el reposo y va acelerando de manera que la velocidad en cada instante t a partir de la arrancada es $v(t)=2t$ metros por segundo, si t se mide en segundos, ¿qué distancia ha recorrido después de 10 segundos?

Solución:
En unidades anteriores hemos visto que la derivada de la distancia recorrida respecto al tiempo, es la velocidad, esto es, si $s(t)$ es la distancia recorrida por el automóvil en el tiempo *t*, entonces $v(t)=s'(t)$ es su velocidad instantánea en el momento t.
Con los datos de este ejemplo tenemos:

$$v(t)=s'(t)=2t.$$

O sea, $s(t)$ es una primitiva de $2t$.
En el ejemplo introductorio vimos que las primitivas de la función

$$2t$$

son las funciones de la forma

$$\frac{2t^2}{2}+C=t^2+C.$$

Entonces debe cumplirse que;

$$s(t)=t^2+C.$$

Como el problema indica que el automóvil arranca al instante $t=0$ desde el reposo, esto significa que $s(0)=0$, de donde

$$s(0)=(0)^2+C=0,$$

y obtenemos que $C=0$. Así, la función que determina la distancia recorrida por el automóvil es

$$s(t)=t^2.$$

Si queremos saber qué distancia ha recorrido en 10 segundos, evaluamos *s* en 10:

$$s(10)=(10)^2$$
$$=100.$$

Como la velocidad está expresada en metros por segundo, esto significa que recorrió 100 metros.

TIP

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filósofo y matemático alemán. Se le considera junto con Newton el inventor del *Cálculo Diferencial e Integral.* Es uno de los grandes genios del siglo XXVII. También es el inventor del sistema binario de numeración. En 1675 escribió un manuscrito empleando la notación $\int f(x)\,dx$ por primera vez.

Para denotar a cualquiera de las primitivas de una función $f(x)$ se utiliza el siguiente símbolo

$$\int f(x)\,dx$$

La función f es llamada el *integrando.*

Es decir, cuando queremos determinar $\int f(x)\,dx,$ lo que buscamos son las funciones cuya derivada es $f.$

Así, para las funciones de los tres primeros ejemplos escribimos;

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

$$\int \left(2x - 5x^4\right)dx = x^2 - x^5 + C$$

$$\int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C.$$

A la expresión $\int f(x)\,dx$ también se le conoce como la *integral indefinida* de f por la relación que tiene con la integral definida que estudiaremos posteriormente.

Cuando el integrando $f(x)$ se reconoce como la derivada $F'(x)$ de una función $F(x),$ entonces tenemos una integral inmediata:

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

Para indicar que F es una primitiva de f, usamos cualquiera de las siguientes notaciones:

- $F'(x) = f(x).$
- $dF(x) = f(x)dx.$
- $\int f(x)\,dx = F(x) + C.$

TIP

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ n \in \mathbb{R}$ y $n \neq -1.$



- $\left(x^2\right)' = 2x.$
- $dx^2 = 2xdx.$
- $\int 2x\,dx = x^2 + C.$

Pensamiento crítico

Encuentra una antiderivada de la función $f(x) = |x|.$

Integrales inmediatas

En la siguiente lista aparecen algunos ejemplos más de las llamadas integrales inmediatas:

1. $\int k\,dx = k\int dx = kx + C$
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ n \in \mathbb{R}$ y $n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ para $a > 0$
6. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
10. $\int \tan x \sec x\,dx = \sec x + C$
11. $\int \cot x \csc x\,dx = -\csc x + C$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + C$
13. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$
14. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arc\,sec} x + C$

Para comprobar las igualdades de los ejemplos anteriores, basta con derivar el lado derecho de cada una y ver que se obtiene el integrando respectivo.

Para poder calcular integrales de funciones más complicadas, necesitamos algunas propiedades de la integral, la primera de ellas es la linealidad.

Linealidad de la integral indefinida

Dado que la derivada de una suma es la suma de las derivadas y la derivada de una constante por una función es el producto de la constante por la derivada de la función, tenemos que si f y g tienen primitivas, entonces;

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

Por tener estas dos propiedades, se dice que la integral es *lineal.*

Ejemplos

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int \left(3\cos x - 7x^4\right) dx.$

Solución:

Aplicando las propiedades de linealidad y las fórmulas de las integrales inmediatas obtenemos:

$$\begin{aligned}\int \left(3\cos x - 7x^4\right) dx &= 3\int \cos x\,dx - 7\int x^4\,dx \\ &= 3\operatorname{sen} x - 7\frac{x^5}{5} + C\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int \left(3\cos x - 7x^4\right) dx = 3\operatorname{sen} x - \frac{7}{5}x^5 + C.$

2. $\int \frac{3x^5+2}{4x^2}\,dx.$

Solución:

Separamos la fracción en una suma de dos fracciones, simplificamos y utilizamos la linealidad, y la fórmula (2) de la lista anterior de la integral de x^n.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^5+2}{4x^2}\,dx &= \int \left(\frac{3x^5}{4x^2} + \frac{2}{4x^2}\right) dx \\ &= \frac{3}{4}\int x^3\,dx + \frac{1}{2}\int x^{-2}\,dx \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C \\ &= \frac{3}{16}x^4 - \frac{1}{2x} + C.\end{aligned}$$



¿Es cierta la siguiente afirmación?
La función $f(x) = \ln\left(2^{x+1}\right)$ es una primitiva de la función $g(x) = \ln 2.$

3. $\int \sqrt{x^3}\,dx.$

Solución:

Expresamos la raíz cuadrada como potencia y usamos la fórmula (2) de la lista anterior de la integral de x^n.

$$\int \sqrt{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C$$
$$= \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C.$$

4. $\int \frac{3^x}{2^x}\,dx.$

Solución:

Utilizamos las propiedades de los exponentes y usamos la fórmula (5) de la lista anterior de la integral de a^x.

$$\int \frac{3^x}{2^x}\,dx = \int \left(\frac{3}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + C.$$

5. Si $f'(x) = x^2 + 8x - 2$ y $f(1) = \frac{1}{3}$, encontrar f.

Solución:

Primero buscamos una primitiva de $x^2 + 8x - 2$:

$$\int x^2 + 8x - 2\,dx = \int x^2\,dx + 8\int x\,dx - 2\int dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + 8\left(\frac{x^2}{2}\right) - 2x + C$$
$$= \frac{x^3}{3} + 4x^2 - 2x + C,$$

de donde, $f(x) = \frac{x^3}{3} + 4x^2 - 2x + C$ es una primitiva para cualquier constante C. La primitiva f que buscamos debe cumplir que $f(1) = \frac{1}{3}$; o sea, debe satisfacerse que

$$f(1) = \frac{1}{3} + 4 - 2 + C$$

Entonces:

$$\frac{1}{3} + 4 - 2 + C = \frac{1}{3}$$
$$2 + C = 0$$
$$C = -2.$$

Por lo tanto, $f(x) = \frac{x^3}{3} + 4x^2 - 2x - 2$ es la primitiva buscada.

Ejemplos

Pensamiento crítico

Si $f'(x) = ax + 2$, $f(1) = 3$ y $f(2) = 23$. ¿Qué expresión es $f(x)$?

Pensamiento crítico

¿Es cierta la siguiente afirmación?

$\int (f(x)g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \times \int g(x)\,dx.$

Ejercicios

Calcula las siguientes integrales.

1. $\int 5x^2 - 2x + 4\,dx$
2. $\int 6e^x\,dx$
3. $\int \sqrt[4]{x}\,dx$
4. $\int -9\operatorname{sen} x\,dx$
5. $\int \frac{20}{x} + 3\cos x\,dx$
6. $\int \frac{\ln 2}{1+x^2}\,dx$
7. $\int \frac{9x^6 + 7x^5 - x^4}{6x^3}\,dx$
8. $\int \arctan(1)\,dx$
9. $\int 12\sqrt{x^5}\,dx$
10. $\int 10^x\,dx$
11. $\int \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$
12. $\int \frac{15}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx$
14. $\int -2\sec^2 x + \cos x\,dx$
15. $\int -8\cot x \csc x + 5e^x\,dx$
16. $\int \sec x(\sec x + \tan x)\,dx$
17. $\int \frac{e^2}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
18. $\int \sqrt{9x}\left(\frac{1}{x} + x^2\right)dx$
19. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$
20. $\int \frac{x^2 - 5x - 24}{x+3}\,dx$
21. $\int \frac{x^3 + 7x^2 - 18x}{x-2}\,dx$
22. $\int \frac{5^x + 3^x - 7^x}{2^x}\,dx$
23. Si $f'(x) = 7x^3 - 9x^2 + x - 6$ y $f(-1) = -\frac{3}{4}$, encontrar f.
24. Si $f'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, encontrar f.
25. Si $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $f(1) = 6$, encontrar f.

Cambio de variable

Consideremos la integral

$$\int x\cos\left(3x^2\right)dx \tag{11.1}$$

Esta integral no aparece en la lista de integrales inmediatas, y no se ve a simple vista qué función es una primitiva de $x\cos\left(3x^2\right)$. En algunas ocasiones es útil hacer un cambio de variable, sustituyendo una expresión en x por otra variable u.
En este ejemplo hacemos

$$u = 3x^2. \tag{11.2}$$

Calculamos du:

$$\begin{aligned} du &= u'(x)\,dx \\ &= 6x\,dx \end{aligned}$$

Ahora despejamos xdx, que es una expresión que también aparece en la integral propuesta:

$$x\,dx = \frac{du}{6}. \tag{11.3}$$



Encuentra la función f que satisfaga que $f(0) = 2$, $f'(4) = 5$ y $f''(x) = x + 2$.

Sustituimos (11.2) y (11.3) en (11.1)

$$\begin{aligned}\int x\cos\left(3x^2\right)dx &= \int \cos\left(3x^2\right)x\,dx\\ &= \int \cos(u)\frac{1}{6}du,\end{aligned}$$

por la linealidad de la integral, podemos sacar el factor $\frac{1}{6}$ de la integral, y aplicamos la fórmula (7) de los ejemplos de integrales inmediatas para calcular la integral del coseno, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{6}\cos u\,du &= \frac{1}{6}\int \cos u\,du\\ &= \frac{1}{6}\operatorname{sen} u + C,\end{aligned}$$

Por último, escribimos esta última expresión en términos de x de tal forma que

$$\int x\cos\left(3x^2\right)dx = \frac{1}{6}\operatorname{sen}\left(3x^2\right)+C.$$

El método utilizado en el ejemplo anterior se basa en la regla de la cadena. Recordemos que si

$$F(x)=f\left(g(x)\right)$$

entonces

$$F'(x)=f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

Por lo tanto, si tenemos una integral en la que aparece una composición de funciones, podemos intentar descubrir si tiene la forma:

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx$$

ya que entonces

$$\begin{aligned}\int f'(g(x))g'(x)\,dx &= \int F'(x)\,dx\\ &= F(x)+C.\end{aligned}$$

Lo que debemos hacer es proponer,

$$u=g(x)$$

entonces

$$du=g'(x)\,dx$$

Sustituimos

$$\begin{aligned}\int f'(g(x))g'(x)\,dx &= \int f'(u)\,du\\ &= f(u)+C\end{aligned}$$

Por último hay que poner el resultado nuevamente en términos de x

$$\begin{aligned}f(u)+C &= f\left(g(x)\right)+C\\ &= F(x)+C.\end{aligned}$$

TIP

Si $u=g(x)$ entonces $\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du = f(u)+C.$

Ejemplos

1. Calcular $\int\sqrt{4x-5}\,dx$.

Solución:
Hacemos un cambio de variable; es decir,

$$u=4x-5$$

y calculamos du

$$\begin{aligned}du&=(4x-5)'dx\\&=4dx\end{aligned}$$

De tal forma, que

$$dx=\frac{1}{4}du$$

Escribimos toda la integral en términos de u

$$\int\sqrt{4x-5}dx=\int\sqrt{u}\frac{1}{4}du$$

y calculamos la última integral usando la fórmula (2) de los ejemplos de integrales inmediatas que se refiere a las potencias de x:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{u}\frac{1}{4}du&=\frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}du\\&=\frac{1}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C\\&=\frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

Finalmente, escribimos el resultado en términos de x:

$$\int\sqrt{4x-5}\,dx=\frac{1}{6}(4x-5)^{3/2}+C.$$

2. Calcular $\int\frac{x^2+2x-1}{x-4}dx$.

Solución:
Hacemos un cambio de variable

$$u=x-4$$

y calculamos du

$$du=dx.$$

Entonces, $x=u+4$ y sustituimos en el integrando

$$\int\frac{x^2+2x-1}{x-4}dx=\int\frac{(u+4)^2+2(u+4)-1}{u}du.$$

En la última integral realizamos las operaciones siguientes:

$$\int \frac{(u+4)^2+2(u+4)-1}{u}du=\int \frac{u^2+10u+23}{u}du$$

$$=\int u+10+\frac{23}{u}du$$

$$=\frac{u^2}{2}+10u+23\ln u+C.$$

Entonces, escribimos el resultado en términos de x

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x-4}dx=\frac{(x-4)^2}{2}+10(x-4)+23\ln(x-4)+C.$$

3. Calcular $\int \tan x\, dx$.

Solución:

Escribimos $\tan x$ en términos del seno y el coseno

$$\int \tan x\, dx=\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx$$

Hacemos un cambio de variable haciendo, que

$$u=\cos x$$

Calculamos du

$$du=-\operatorname{sen} x\, dx$$

de tal forma, que

$$-du=\operatorname{sen} x\, dx$$

Podemos sustituir $\operatorname{sen} x dx$ por $-du$ y $\cos x$ por u, teniendo

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx=\int -\frac{1}{u}du$$

$$=-\int \frac{1}{u}du$$

Usamos ahora la fórmula (3) de los ejemplos de integrales inmediatas

$$-\int \frac{1}{u}du=-\ln u+C$$

Escribimos en términos de x

$$\int \tan x\, dx=-\ln(\cos x)+C.$$

Observa que esta respuesta tiene sentido únicamente en intervalos en donde $\cos x>0$, ya que el logaritmo natural únicamente está definido para números reales positivos.

4. $\int 5\sec^2 x e^{\tan x}\, dx.$

Solución:

Hacemos

$$u=\tan x.$$

TIP

$\int \sec x\, dx =$
$\ln(\sec x + \tan x) + C.$

Así

$$du = \sec^2 x\, dx$$

y

$$\begin{aligned}\int 5\sec^2 x e^{\tan x}\, dx &= 5\int \sec^2 x e^{\tan x}\, dx \\ &= 5\int e^u\, du \\ &= 5e^u + C \\ &= 5e^{\tan x} + C.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int 5\sec^2 x e^{\tan x}\, dx = 5e^{\tan x} + C.$$

5. Calcular la integral $\int \sec x\, dx$.

Solución:
De primera intención no se ve qué cambio de variable nos lleve a transformar esta integral en una del tipo

$$\int h(u)\, du,$$

que pueda ser calculada de forma inmediata.
Haremos el siguiente artificio para lograrlo:

$$\begin{aligned}\int \sec x\, dx &= \int \sec x\left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right) dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx.\end{aligned}$$

Hacemos, que

$$u = \sec x + \tan x,$$

de donde

$$du = \left(\sec x \tan x + \sec^2 x\right) dx$$

y

$$\begin{aligned}\int \sec x\, dx &= \int \frac{1}{u}\, du \\ &= \ln u + C \\ &= \ln(\sec x + \tan x) + C.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \sec x\, dx = \ln(\sec x + \tan x) + C.$$

Ejemplos

Ejercicios

Calcula las siguientes integrales.

1. $\int \text{sen}(7x)\,dx$
2. $\int (8x+3)^4\,dx$
3. $\int x^2\sec^2(4x^3)\,dx$
4. $\int \frac{x^2+x+1}{x-3}\,dx$
5. $\int \frac{x^3+5x^2+8}{x+2}\,dx$
6. $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$
7. $\int \frac{\ln x}{2x}\,dx$
8. $\int \frac{5x}{\sqrt{6x^2+1}}\,dx$
9. $\int \frac{x^2}{x^3+7}\,dx$
10. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$
11. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+10}}\,dx$
12. $\int \frac{5x^4-24x^2}{x^5-8x^3+3}\,dx$
13. $\int \cot x\,dx$
14. $\int (3x+9)\sqrt{x^2+6x-12}\,dx$
15. $\int x^{-4}\sec^2(4x^{-3}+2)\,dx$
16. $\int 4x^3(\csc x^4)^{-\frac{5}{3}}(\csc x^4)(\cot x^4)\,dx$
17. $\int (\tan 2x+\sec 2x)^2\,dx$
18. $\int (\cot^{-1}x)\csc^2 x\,dx$
19. $\int \frac{1}{\sqrt{1-(8x+3)^2}}\,dx$
20. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
21. $\int \frac{8x^5\cos 7x^6}{1+\text{sen}^2 7x^6}\,dx$
22. $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$
23. $\int \csc x\,dx$
24. $\int (x+2)e^{x^2+4x}\,dx$
25. $\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

Mundo virtual

En esta sección te invitamos a visitar varios sitios que contienen material relacionado con la integral. Algo de ese material está desarrollado por los autores de este libro, pero mucho más ha sido desarrollado por personas de todo el mundo que tienen interés en las matemáticas.

- http://atenea.matem.unam.mx Éste es un sitio del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en el cual los investigadores del Instituto están creando material para cursos en línea. Puedes entrar como invitado sin necesidad de registrarte. Una vez dentro del sitio, elige la categoría "Cálculo diferencial e integral", dentro de ella, el curso "Cálculo I" y entra a las lecciones de la sección "La integral."
- http://newton.matem.unam.mx/arquimedes En este sitio hay muchos interactivos de matemáticas para bachillerato, que explican cómo resolver problemas muy puntuales. Revisa los que corresponden a Cálculo diferencial e integral, en particular, los que corresponden a la integral.
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web Sitio del Ministerio de Educación, Salud y Deporte del Gobierno español que contiene unidades didácticas y recursos interactivos desarrollados con la herramienta

Descartes. Estos materiales fueron elaborados por profesores de enseñanza media. Selecciona "Aplicaciones", y luego "Análisis" encontrarás varias lecciones relativas al tema de integración que estudiaste en esta unidad.

- http://es.wikipedia.org La enciclopedia en línea Wikipedia es uno de los sitios de referencia para encontrar información relacionada con la ciencia y la cultura. En el buscador escribe: Integración. Hojea el documento para ampliar los temas vistos en esta unidad. El material que está en esa página corresponde a ésta y a las siguientes unidades del libro.

Resumen de la unidad

- Para indicar que g es una primitiva de f, usamos cualquiera de las siguientes notaciones:
  - $g'(x)=f(x)$.
  - $df(x)=g(x)dx$.
  - $\int f(x)\,dx=g(x)$.
  - $\int f(x)+g(x)\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$.
  - $\int cf(x)\,dx=c\int f(x)\,dx$.
  - Sustitución o cambio de variable
    $\int f'(g(x))g'(x)\,dx=\int f'(u)\,du=f(u)+C$.

Integrales inmediatas.

1. $\int k\,dx=k\int dx=kx+C$
2. $\int x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$; $n\in\mathbb{R}$ y $n\neq-1$
3. $\int \dfrac{1}{x}\,dx=\ln x+C$
4. $\int e^x\,dx=e^x+C$
5. $\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ para $a>0$
6. $\int \operatorname{sen} x\,dx=-\cos x+C$
7. $\int \cos x\,dx=\operatorname{sen} x+C$
8. $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$
9. $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$
10. $\int \tan x\sec x\,dx=\sec x+C$
11. $\int \cot x\csc x\,dx=-\csc x+C$
12. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\operatorname{arcsen} x+C$
13. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x+C$
14. $\int \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx=\operatorname{arcsec} x+C$

Ejercicios de repaso

Calcula las siguientes integrales.

1. $\int \cot^2 x\,dx$

2. $\int \left(x^8+12x^5-21x^2\right)^6\left(4x^7+30x^4-21x\right)dx$

3. $\int \left(6x^5-15x^2\right)\left(x^6-5x^3\right)^{-4}dx$

4. $\int \left(9x^2-7x\right)2^{\left(6x^3-7x^2+5\right)}dx$

5. $\int \frac{3\cos(\pi x+8)}{\operatorname{sen}^2(\pi x+8)}dx$

6. $\int \frac{e^{\sqrt[3]{8x^2}}}{\sqrt[3]{x}}dx$

7. $\int \frac{\operatorname{sen}\left(\ln(9x-1)\right)}{(9x-1)\cos^2\left(\ln(9x-1)\right)}dx$

8. $\int \frac{dx}{7x\sqrt{1-\ln^2 7x}}$

9. $\int \frac{\sec^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$

10. $\int \frac{x+2}{1+\left(x^2+4x\right)^2}dx$

11. $\int \frac{\left(10x^4+2x^5\right)e^x}{\sqrt{x^5e^x}}dx$

12. $\int \cos x\csc^2(\operatorname{sen} x)\,dx$

13. $\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$

14. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)\cos^3(\ln x)}{x}dx$

15. $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt{1-\cot^2 x}}dx$

16. $\int \frac{5xe^x}{\operatorname{sen}^2\left((5x-5)e^x\right)}dx$

17. $\int \frac{5^{\operatorname{arccot} x}}{1+x^2}dx$

18. $\int (\ln x)(2+\ln x)\left(x\ln^2 x\right)dx$

19. $\int \operatorname{sen}\left(9x2^x\right)(9x\ln 2+9)2^x\,dx$

20. $\int \tan^2(\cos x)\sec^2(\cos x)(\operatorname{sen} x)\,dx$

21. $\int \frac{dx}{|x|\sqrt{16x^2-4}}$

22. $\int \frac{8x\csc\sqrt{x^2+8}\cot\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}}dx$

23. Si $f'(x)=x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+3$ y $f(9)=130$, encontrar f.

24. Si $f'(x)=\frac{3x}{9x^4+1}$ y $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{5\pi}{8}$, encontrar f.

25. Si $f'(x)=\frac{e^{\frac{1}{5x}}}{25x^2}$ y $f\left(\frac{1}{5}\right)=e$, encontrar f.

Autoevaluación

1. $\int x^{\frac{2}{5}}+\frac{1}{x^3}+\sqrt{3}x^{-1}\,dx$ es igual a:

a. $\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}-\frac{1}{2x^2}-2\sqrt{3}x^{-2}+C$

b. $\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}-\frac{1}{2x^2}+\sqrt{3}\ln x+C$

c. $\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}+\frac{1}{2x^2}+\sqrt{3}\ln x+C$

d. $\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}-\frac{1}{2x^2}+C$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 389 y 391.

2. $\int \frac{6^x}{2^x}dx$ es igual a:

a. $\ln 3+C$

b. $\left(\frac{\ln 2}{\ln 6}\right)3^x+C$

c. $\frac{3^x}{\ln 3}+C$

d. $3^x\left(\ln\frac{1}{3}\right)+C$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 391.

3. Una primitiva de la función $f(x)=\frac{3x^5-6x^4+2x^3+x^2-25}{x^{\frac{2}{3}}}$ es:

a. $F(x)=\frac{9}{16}x^{\frac{16}{3}}-\frac{18}{13}x^{\frac{13}{3}}+\frac{3}{5}x^{\frac{10}{3}}+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-75\sqrt[3]{x}$

b. $F(x)=\frac{5}{9}x^{\frac{13}{3}}-2x^{\frac{10}{3}}+\frac{5}{6}x^{\frac{7}{3}}+\frac{5}{9}x^{\frac{4}{3}}-\frac{75}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

c. $F(x)=\frac{9}{16}x^{\frac{16}{3}}+\frac{18}{13}x^{\frac{13}{3}}-\frac{3}{5}x^{\frac{10}{3}}+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-75\sqrt[3]{x}$

d. $F(x)=\frac{5}{9}x^{\frac{13}{3}}-2x^{\frac{10}{3}}-\frac{5}{6}x^{\frac{7}{3}}+\frac{5}{9}x^{\frac{4}{3}}-\frac{75}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 389 y 391.

4. Una antiderivada de $f(x)=\frac{x^2\left(5x^2+2x-4\right)}{6x^5+3x^4-8x^3}$ es:

a. $\ln\left(6x^5+3x^4-8x^3\right)$

b. $\frac{1}{6}\ln\left(6x^5+3x^2-8x\right)$

c. $\frac{1}{6}\ln\left(6x^5-3x^4-8x^3\right)$

d. $\frac{1}{6}\ln\left(6x^5+3x^4-8x^3\right)+7$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 389 y 391.

5. $\int\left(7x^2-8x+5\right)\sqrt{7x^3-12x^2+15x-1}\,dx$ es igual a:

a. $\frac{2}{9}\left(7x^3-12x^2+15x-1\right)^{\frac{3}{2}}+C$

b. $\frac{2}{3}\left(7x^3-12x^2+15x-1\right)^{\frac{3}{2}}+C$

c. $\frac{2}{21}\left(7x^3-12x^2+15x-1\right)^{\frac{3}{2}}+C$

d. $\frac{2}{9}\left(7x^3-12x^2-15x-1\right)^{\frac{3}{2}}+C$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 389 y 394.

6. $\int 2^x\sec^2\left(e^{x\ln 2}\right)dx$ es igual a:

a. $\tan\left(e^{x\ln 2}\right)+C$

b. $\tan 2^x+C$

c. $\left(\frac{1}{\ln 2}\right)\tan 2^x+C$

d. $\left(\frac{1}{\ln 2}\right)\ln\left(\sec 2^x+\tan 2^x\right)+C$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 391 y 394.

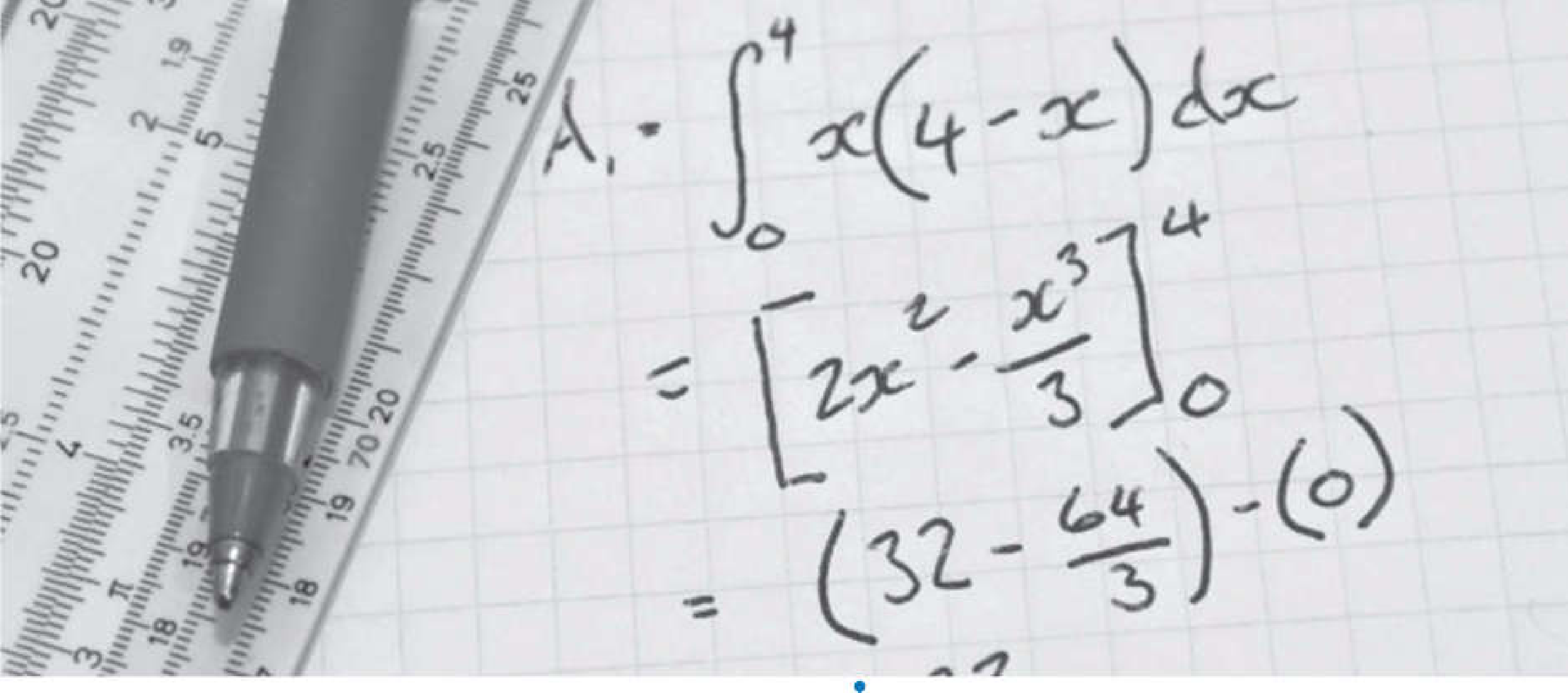
Heteroevaluación

1. Calcula la integral $\int \sqrt{25x}\left(2x^{-1}+8x^{\frac{7}{6}}-7x^{-\frac{3}{2}}\right)dx.$

2. Calcula la integral $\int \frac{2x+10}{|x+5|\sqrt{x^2+10x+24}}dx.$

3. Calcula la integral $\int e^x \operatorname{sen}\left(e^x\right)\cos\left(e^x\right)dx.$

4. Calcula la integral $\int \tan\left(\operatorname{In} 2^x\right)dx.$



La integral definida es una herramienta para el cálculo de áreas.



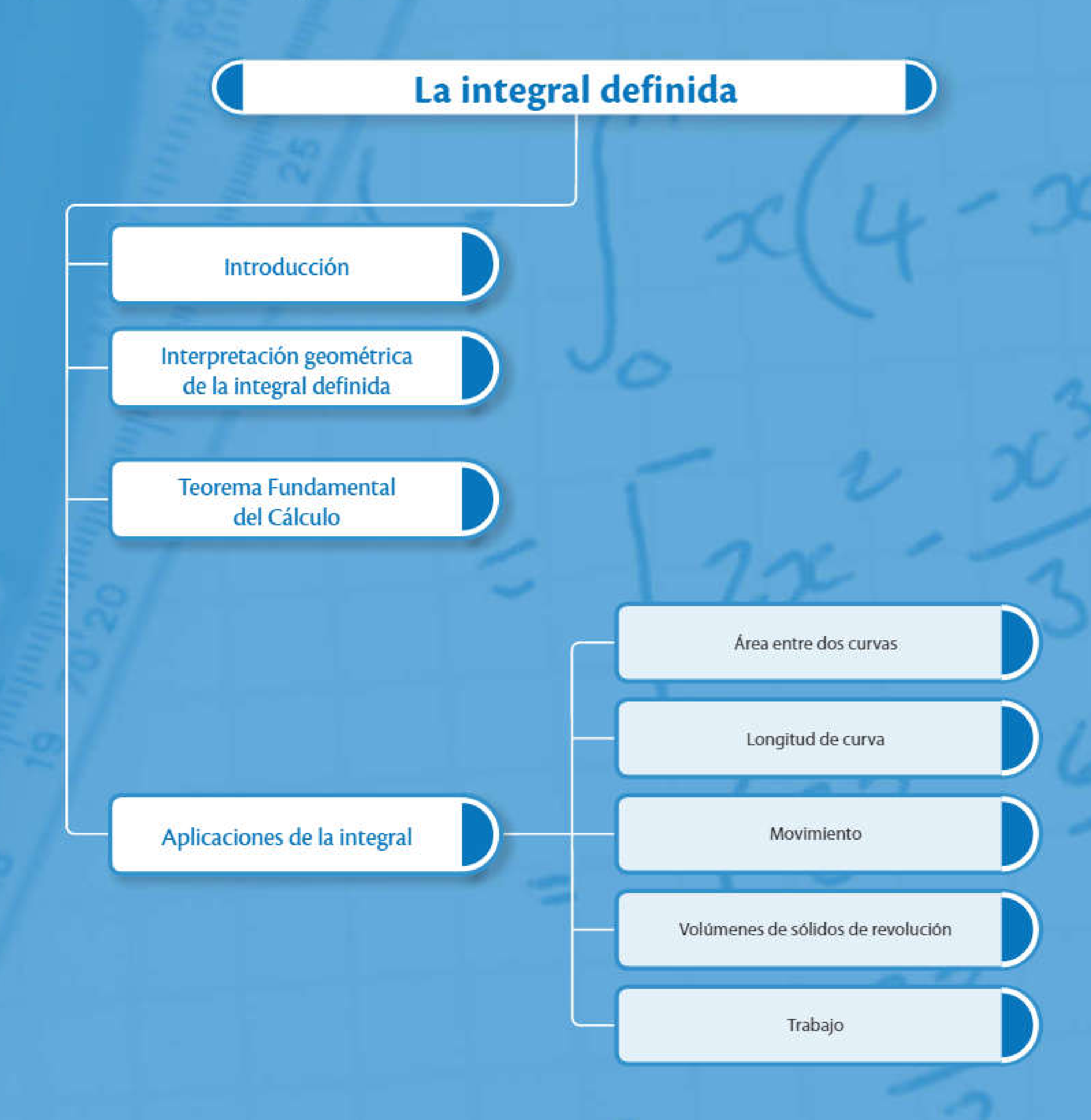
Unidad 12 La integral definida

La principal motivación del concepto de *integral* es el cálculo del área de figuras irregulares. Este problema empezó a estudiarse en la antigua Grecia, primero por Eudoxio en el siglo IV a.C. y por Arquímedes en el siglo III a.C.; ellos desarrollaron el método conocido como método de exhaución y que consiste en aproximar una figura, por ejemplo un círculo, mediante polígonos.

Arquímedes dibujó un polígono inscrito y otro circunscrito a un círculo, de manera que el área del círculo queda entre el área de los dos polígonos construidos. Con este método, pudo determinar que el número π estaba entre $3\frac{10}{71}$ y $3\frac{10}{70}$, es decir, entre 3.1408 y 3.1429, lo cual es una muy buena aproximación.

En el siglo XVII, de manera independiente, Newton y Leibniz formularon el *Teorema Fundamental del Cálculo*, que básicamente dice que para encontrar el área encerrada por la gráfica de una función positiva f y el eje X, en un intervalo $[a,b]$, hay que evaluar una primitiva de f, en los extremos del intervalo y restar estos valores.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.



Introducción

Calcular $\int_1^e \frac{1}{x} dx$.

Solución:
Una primitiva de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ en el intervalo $[1,e]$ es $F(x)=\ln x$, entonces:

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{x} dx &= F(e)-F(1)\\ &= \ln(e)-\ln(1)\\ &= 1\end{aligned}$$

Si f es continua en un intervalo $[a,b]$ y F es una primitiva de f, entonces la integral definida de f es:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \tag{12.1}$$

Observa que $\int_a^b f(x)\,dx$ está bien definida, es decir, no hay ambigüedad: no depende de la primitiva particular que hayamos elegido, pues si G es otra primitiva de f entonces $G(x)=F(x)+C$, así que

$$\begin{aligned}G(b)-G(a) &= \left(F(b)+C\right)-\left(F(a)+C\right)\\ &= F(b)-F(a).\end{aligned}$$

Notación:
Si $F(x)$ es una función cualquiera, la notación

$$F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

es muy conveniente al evaluar integrales definidas y vamos a usarla. Así, la igualdad (12.1) se escribe como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{12.2}$$

Observación: La fórmula (12.1) se conoce como el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Cuando se define la integral como límite de sumas, se prueba que esta fórmula es cierta si f es continua. En este texto preferimos utilizarla como definición de la integral definida, ya que el desarrollo de la integral como límite de sumas es muy laborioso para un primer curso de cálculo.

Ejemplos

1. Calcular $\int_0^2 (7x-6)\left(7x^2-12x\right)^5 dx$.

   Solución:
   Primero calculamos la integral sin límites de integración, es decir, la integral indefinida.

$$\int (7x-6)\left(7x^2-12x\right)^5 dx.$$

Para esto, hacemos el cambio de variable

$$u = 7x^2 - 12x$$

Así

$$\begin{aligned} du &= (14x - 12)\,dx \\ &= 2(7x - 6)\,dx; \end{aligned}$$

De donde

$$\frac{1}{2}du = (7x - 6)\,dx.$$

Sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} \int (7x-6)\left(7x^2-12x\right)^5 dx &= \frac{1}{2}\int u^5\,du \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^6}{6}\right) \\ &= \frac{u^6}{12}. \end{aligned}$$

Ahora escribimos esta última expresión en términos de x:

$$\begin{aligned} \int (7x-6)\left(7x^2-12x\right)^5 dx &= \frac{u^6}{12} \\ &= \frac{\left(7x^2-12x\right)^6}{12}. \end{aligned}$$

O sea, una primitiva de $(7x-6)\left(7x^2-12x\right)^5$ es $F(x) = \dfrac{\left(7x^2-12x\right)^6}{12}$.
De acuerdo con (12.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^2 (7x-6)\left(7x^2-12x\right)^5 dx &= \left.\frac{\left(7x^2-12x\right)^6}{12}\right|_0^2 \\ &= \frac{\left(7(2)^2-12(2)\right)^6}{12} - \frac{\left(7(0)^2-12(0)\right)^6}{12} \\ &= \frac{4^6}{12} \\ &= \frac{4^5}{3}. \end{aligned}$$

2. Calcular $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos 3x e^{\operatorname{sen} 3x}\,dx.$

Solución:
Calculamos la integral indefinida correspondiente:

$$\int \cos 3x e^{\operatorname{sen} 3x}\,dx.$$

Realizamos un cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} 3x$$

tenemos que

$$du = 3\cos 3x\,dx$$

así,

$$\frac{1}{3}du = \cos 3x\,dx.$$

Sustituyendo tenemos

$$\int \cos 3x e^{\operatorname{sen} 3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du$$

$$= \frac{e^u}{3}.$$

Ahora escribimos esta última expresión en términos de x:

$$\frac{e^u}{3} = \frac{e^{\operatorname{sen} 3x}}{3}$$

entonces

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos 3x e^{\operatorname{sen} 3x}\,dx = \left.\frac{e^{\operatorname{sen} 3x}}{3}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}$$

$$= \frac{e^{\operatorname{sen} 3\pi}}{3} - \frac{e^{\operatorname{sen} 3\left(\frac{\pi}{6}\right)}}{3}$$

Como $\operatorname{sen} 3\pi = 0$ y $\operatorname{sen} 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1,$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos 3x e^{\operatorname{sen} 3x}\,dx = \frac{e^0}{3} - \frac{e}{3}$$

$$= \frac{1-e}{3}.$$

Ejemplos

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales definidas.

1. $\int_0^3 2x^2 - x + 10\,dx$
2. $\int_{-1}^1 x^5 - 4x^2 + x - 1\,dx$
3. $\int_0^6 \sqrt{3x+7}\,dx$
4. $\int_{-5}^0 (x+1)\sqrt[3]{2x^2+4x-2}\,dx$
5. $\int_{-2}^7 \frac{4x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$
6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos x\,dx$
7. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 4}}\,dx$
10. $\int_1^8 \frac{1}{x}\,dx$

Ejercicios

11. $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$

12. $\int_{4}^{16} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

13. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 5e^{\tan x} \sec^2 x\, dx$

14. $\int_{0}^{1} \frac{e^{4x} - e^{10x}}{e^{5x}} dx$

15. $\int_{1}^{8} \frac{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

16. $\int_{1}^{3} \frac{(5x-3)(x+5)}{5x} dx$

17. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

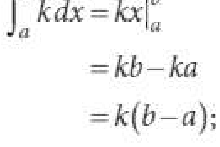
18. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

19. $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} dx$

20. $\int_{e}^{4} \frac{1}{x \ln x} dx$

Interpretación geométrica de la integral definida

Empecemos con una función constante positiva, $f(x)=k$, con $k>0$. La integral definida de esta función en el intervalo $[a,b]$ vale



$$\begin{aligned}\int_a^b k\,dx &= kx\Big|_a^b \\ &= kb-ka \\ &= k(b-a);\end{aligned}$$

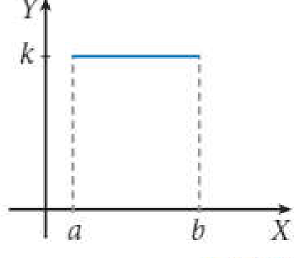


Figura 12.1

que es el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje X y la rectas verticales $x=a$ y $x=b$. (Figura 12.1).

Ahora, consideremos la integral definida de la función identidad $f(x)=x$ en un intervalo $[a,b]$:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{\left(b^2-a^2\right)}{2}$$

En la Figura 12.2, el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje X y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ es igual al área del rectángulo más el área del triángulo:

$$(b-a)a+\frac{1}{2}(b-a)(b-a)=\frac{\left(b^2-a^2\right)}{2}.$$

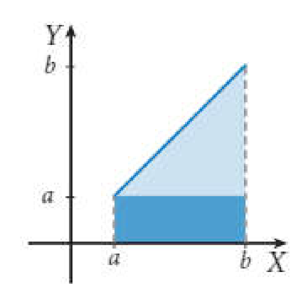


Figura 12.2



En general:

Si f es continua en $[a,b]$ y $f(x)\geq 0$ para todo x en $[a,b]$, entonces la integral definida, $\int_a^b f(x)\,dx$, es el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje X y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$. Esa área también es llamada el *área bajo la gráfica de f en el intervalo $[a,b]$ o entre a y b.*

Así, $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ si $f(x)\geq 0$ para todo x en $[a,b]$.

Ejemplos

1. Encontrar el área bajo la parábola $y = x^2$ entre -1 y 1.

Solución:

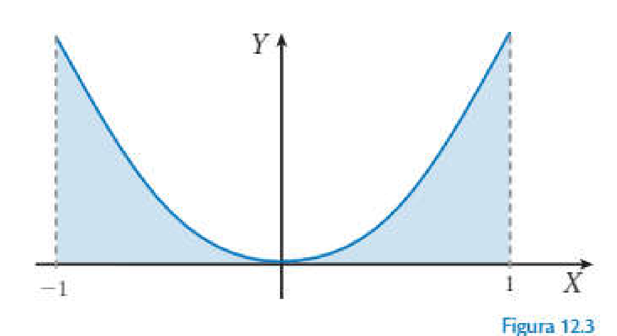


Figura 12.3

Observamos en la Figura 12.3 que la parábola es la gráfica de la función x^2 y que ésta es no negativa. Entonces el área buscada es

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1}$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{-1}{3}$$
$$= \frac{2}{3}.$$

Aquí usamos que $\frac{x^3}{3}$ es una primitiva de x^2.

2. Calcular el área bajo la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$, entre 0 y π. (Figura 12.4).

Solución:

Observamos que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es no negativa entre 0 y π. El área buscada es

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi}$$
$$= -\cos \pi - (-\cos 0)$$
$$= 2.$$

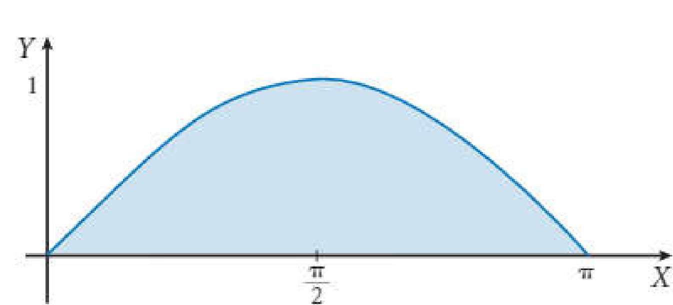


Figura 12.4

Aquí usamos que $-\cos x$ es una primitiva de $\operatorname{sen} x$.

Área algebraica

Si f es continua en $[a,b]$ y toma valores positivos y negativos, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

es igual al área algebraica de la región R limitada por la gráfica de f, el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. O sea, la integral es el resultado de sumar las áreas de las porciones de R que están arriba del eje X y restarle la suma de las áreas de las porciones de R que están debajo del eje X (Figura 12.5). Así, el área algebraica puede ser positiva, negativa o cero. A R la llamaremos la *región comprendida por la gráfica de* f *en* $[a,b]$ *o entre* a *y* b.

Figura 12.5

Ejemplos

1. Encontrar el área algebraica de la región comprendida por la gráfica de $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$ en el intervalo $[2,10]$.

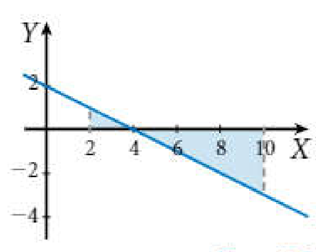
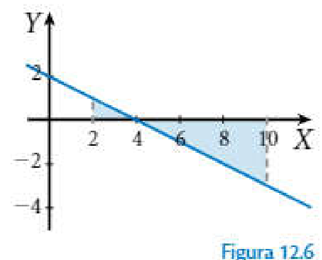



Figura 12.6

Solución:

En la Figura 12.6 se aprecia que la porción de la región que está debajo del eje X tiene mayor área que la porción de la región que está arriba del eje, por lo que es de esperarse que el área algebraica sea negativa. El área buscada es:

$$\int_2^{10} -\frac{1}{2}x+2\,dx=-\frac{1}{2}\ \frac{x^2}{2}\ +2x\Big|_2^{10}$$

$$=-\frac{1}{4}(100)+2(10)-\ -\frac{1}{4}(4)+2(2)$$

$$=-8.$$

Observamos que también podemos encontrar el área restando las áreas de los dos triángulos que forman la región.
El área del primero, el que está arriba del eje X, es

$$\frac{f(2)\times 2}{2}=f(2)$$

$$=-\frac{1}{2}(2)+2$$

$$=1.$$

El área del segundo es:

$$\frac{|f(10)|\times 6}{2}=3\times|f(10)|$$

$$=3\times\left|-\frac{1}{2}(10)+2\right|$$

$$=9.$$

De donde, el área algebraica es $1-9=-8$, tal y como nos lo había señalado la integral.

2. Encontrar el área algebraica de la región comprendida por la gráfica de $f(x)=\cos x$ entre 0 y $2\neq$.

Solución:

La Figura 12.7 sugiere que la región que está debajo del eje X tiene la misma área que las dos regiones que están arriba del eje, por lo que es de esperarse que el área algebraica buscada sea 0. Dicha área es

$$\int_0^{2\pi}\cos x\,dx=\operatorname{sen}x\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\operatorname{sen}2\pi-\operatorname{sen}0$$

$$=0.$$

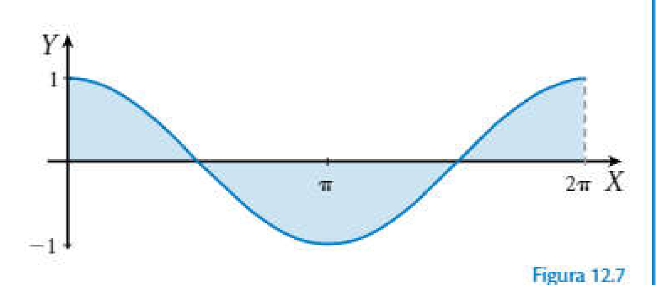


Figura 12.7

TIP

Si f es continua en $[a,b]$ y toma valores positivos y negativos, entonces al área algebraica de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ es $\int_a^b f(x)dx$.

Pensamiento crítico

Si $\int_a^b f(x)dx=0$ entonces ¿la función $f(x)=0$ en $[a,b]$?

Ejercicios

Calcula el área algebraica de la región comprendida por la gráfica de f en el intervalo indicado.

1. $f(x)=x+3$ en $[-1,5]$
2. $f(x)=-x-1$ en $[-5,1]$
3. $f(x)=-x^2+5$ en $[-2,2]$
4. $f(x)=x^3+2x^2+1$ en $[-2,1]$
5. $f(x)=-x^4+5x^2-2$ en $[-2,2]$
6. $f(x)=3x^4-8x^3+4x^2$ en $[0,2]$
7. $f(x)=\sqrt{(x+1)^3}$ en $[-1,2]$
8. $f(x)=\sqrt[5]{(x-2)^2}$ en $[-4,6]$
9. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ en $[-1,1]$
10. $f(x)=\dfrac{3x}{5x^2-2}$ en $[-4,-2]$
11. $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ en $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$
12. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ en $[3,8]$
13. $f(x)=\operatorname{sen} x$ en $[0,\pi]$
14. $f(x)=\sec x\tan x$ en $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$
15. $f(x)=\csc^2 x$ en $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema del valor medio para integrales

Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe un número c entre a y b tal que;

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Hagamos un razonamiento informal para verificar de que el resultado es cierto, (Figura 12.8).

Pensemos en el caso en que f es no negativa. Llamemos R a la región comprendida por la gráfica de f entre a y b. Entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área R.

Podemos tomar un rectángulo que tenga por base a $[a,b]$ y que tenga la misma área que R. Esto es como si tuviéramos una caja de arena y la arena dentro de ella tiene montañas y valles. Si agitamos la caja, podemos aplanar la arena de manera de formar un paralelepípedo que tiene el mismo volumen que la arena desacomodada. Si llamamos k a la altura del rectángulo, entonces:

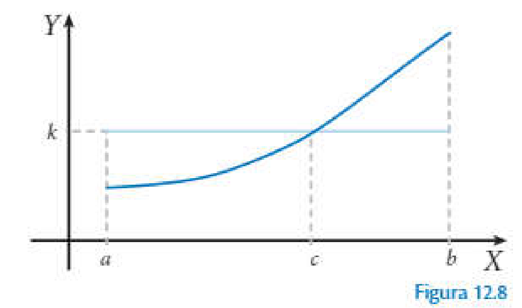


Figura 12.8

$$(b-a)k=\text{área del rectángulo}=\text{área de } R=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (12.3)$$

Si la función f no es constante, necesariamente R tendrá algunas partes arriba y otras abajo de la recta $y=k$. Como la función es continua, su gráfica se puede trazar de manera continua (sin levantar el lápiz), deberá cruzar a la recta $y=k$ en al menos un punto P. Llame-

mos c a la primera coordenada de dicho punto, entonces $f(c)=k$, sustituyendo en (12.3), obtenemos:

$$(b-a)f(c)=\int_a^b f(x)\,dx$$

y finalmente

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

El número

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

es el *valor promedio* de la función en $[a,b]$, así que lo que dice el teorema del valor medio es que existe un punto c en el cual se alcanza el valor promedio de la función (ver la Figura 12.8).

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Si f es continua en $[a,b]$, podemos definir la función

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

para x en $[a,b]$.
Observa que como estamos usando x para denotar al límite superior de la integral, debemos usar otra variable como variable de integración, en este caso t.
Esta función F es derivable y:

$$F'(x)=f(x)$$

Demostración: Por el teorema del valor medio para integrales:

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}&=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right)\\&=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\\&=f(c),\end{aligned}$$

para alguna c entre x y $x+h$.
Cuando $h\to 0$, $x+h$ se aproxima a x, y como c está entre x y $x+h$, entonces también c se aproxima a x, como f es continua, entonces $f(c)$ se aproxima a $f(x)$, así

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}f(c)\\&=f(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$F'(x)=f(x).$$

TIP

- Para una función integrable f en $[a, b]$ el valor promedio de f en dicho intervalo es $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$
- Teorema del valor medio para integrales
Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe un número c entre a y b tal que $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$



Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{sen} t\,dt}{x^2}.$

Ejemplos

1. Calcula la derivada de F si $F(x)=\int_0^x \operatorname{sen} t\,dt$.

Solución:
Aplicando el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$F'(x)=\operatorname{sen} x.$$

2. Encontrar el valor promedio de $f(x)=10+2x-x^2$ en el intervalo $[-2,1]$.

Solución:
Por la definición del valor promedio, tenemos que éste vale:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-(-2)}\int_{-2}^{1} 10+2x-x^2\,dx &= \frac{1}{3}\left(10x+2\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}\\ &= \frac{1}{3}\left(10(1)+(1)^2-\frac{(1)^3}{3}-\left(10(-2)+(-2)^2-\frac{(-2)^3}{3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{32}{3}+\frac{40}{3}\right)\\ &= 8.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor promedio es 8.

3. Encontrar el valor promedio de $f(x)=x^2-3x$ en el intervalo $[-5,7]$ y determinar el punto c en el que se alcanza.

Solución:
Por el teorema del valor medio para integrales, sabemos que existe $c\in[-5,7]$ tal que

$$\begin{aligned}f(c) &= \frac{1}{7-(-5)}\int_{-5}^{7} x^2-3x\,dx\\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-5}^{7}\\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{7^3}{3}-\frac{3}{2}(7^2)-\left(\frac{(-5)^3}{3}-\frac{3}{2}(-5)^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{343}{3}-\frac{147}{2}-\left(-\frac{125}{3}-\frac{75}{2}\right)\right)\\ &= \frac{120}{12}\\ &= 10,\end{aligned}$$

pero

$$f(c)=c^2-3c,$$

de donde

$$c^2-3c=10.$$

TIP
Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Si f es continua en $[a, b]$ definimos la función
$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.
para x en $[a, b]$. Esta función F es derivable y $F'(x)=f(x)$.

Ejemplos

Resolviendo esta ecuación, tenemos:

$$c^2 - 3c - 10 = 0$$
$$(c+2)(c-5) = 0$$

es decir

$$c = -2 \quad \text{o} \quad c = 5.$$

Por lo tanto, el valor promedio es 10 y se alcanza en los puntos $c = -2$ y $c = 5$.

Pensamiento crítico

Sin hacer la integral, calcula la derivada de F si $F(x) = \int_0^{x^2} \sec t \, dt$.

Ejercicios

Encuentra el valor promedio de f en el intervalo indicado.

1. $f(x) = 5 - x$ en $[0,4]$
2. $f(x) = x - 7$ en $[-2,5]$
3. $f(x) = x^2 + 5x$ en $[-4,0]$
4. $f(x) = x^2 - 4$ en $[-1,3]$
5. $f(x) = x^3 - 4x^2$ en $[1,6]$
6. $f(x) = \sqrt{x} + x$ en $[4,9]$
7. $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ en $[1,4]$

Encuentra el valor promedio de f en el intervalo indicado y determina un punto c donde lo alcanza.

8. $f(x) = x + 4$ en $[1,7]$
9. $f(x) = 2 - x$ en $[-2,3]$
10. $f(x) = x - 3$ en $[-3,1]$
11. $f(x) = x^2 - 4$ en $[-1,2]$
12. $f(x) = x^2 - 2x$ en $[-2,1]$

Pensamiento crítico

Sin calcular la integral, calcula $\int f''(x)\, dx$ si $f(x) = \sqrt{ax+b}$.

Aplicaciones de la integral

Área entre dos curvas

Encontrar el área de la región comprendida entre la parábola $y = 4 - x^2$, la recta $y = \frac{1}{2}x + 2$ y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

En la Figura 12.9, aparece sombreada la región cuya área queremos calcular. Observamos que en el intervalo $[-1,1]$ la parábola está arriba de la recta.

Lo que podemos hacer es calcular el área debajo de la parábola en el intervalo $[-1,1]$ y restarle el área debajo de la recta en el mismo intervalo:

$$A = \int_{-1}^{1} (4 - x^2)\, dx - \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}x + 2 \right) dx$$

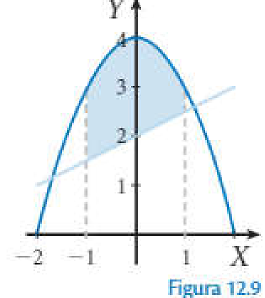


Figura 12.9

TIP

Si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ el área de la región comprendida entre las gráficas de f y g entre las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por $A = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$.

Calculamos las integrales y las restamos

$$\int_{-1}^{1} \left(4 - x^2\right) dx = 4x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{1}$$
$$= \frac{22}{3}$$

y

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx = \frac{1}{4}x^2 + 2x \Big|_{-1}^{1}$$
$$= 4$$

Así

$$A = \frac{22}{3} - 4$$
$$= \frac{10}{3}.$$

En el ejemplo introductorio, para encontrar el área entre las dos curvas, calculamos primero el área debajo de la mayor y restamos el área de la menor. Esto tiene sentido, pues ambas funciones son positivas. En general, dadas dos funciones f y g con $f(x) \geq g(x)$ para todo x en un intervalo $[a,b]$, el área de la región comprendida entre las gráficas de f y g entre las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx.$$



1. Encontrar el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = x^3$ y $g(x) = x + 2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

   Solución:
   En la Figura 12.10, aparece sombreada la región cuya área queremos calcular. Observamos que $g(x) \geq f(x)$ en el intervalo $[0,1]$.
   Para x entre 0 y 1, $x + 2$ es mayor que x^3, así que calculamos

$$A = \int_0^1 \left(x + 2 - x^3\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1$$
$$= \frac{9}{4}.$$

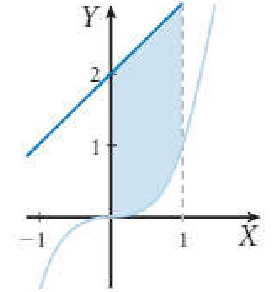


Figura 12.10

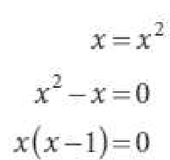
2. Encontrar el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x$.

   Solución:
   En este caso, debemos determinar los puntos en los que se cortan las dos gráficas. O sea, hay que encontrar las x para las que se cumple que


$(x, f(x)) = (x, g(x))$. Entonces debemos resolver

$$\sqrt{x} = x.$$

Elevamos al cuadrado



$$x = x^2$$
$$x^2 - x = 0$$
$$x(x-1) = 0$$

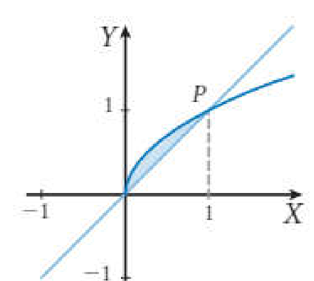


Figura 12.11

y obtenemos las abscisas $x = 0$ y $x = 1$. Así que los puntos en los que se cortan las gráficas son $(0, f(0)) = (0,0)$ y $P(1, f(1)) = P(1,1)$.
En la Figura 12.11 aparece sombreada la región cuya área queremos calcular. Observamos que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[0,1]$.
Entonces el área encerrada por las gráficas de las funciones es:

$$A = \int_0^1 \sqrt{x} - x\, dx$$
$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{6}.$$



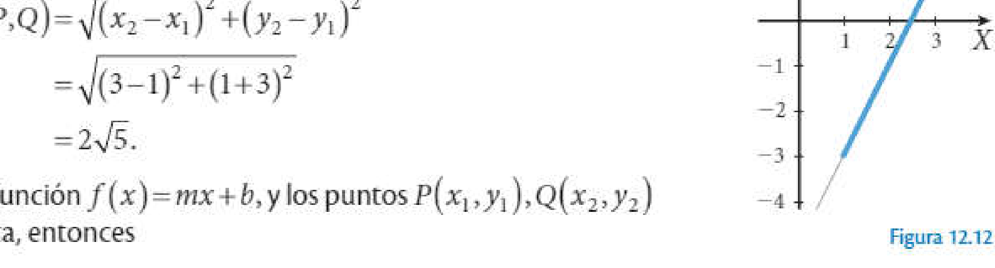
Pensamiento crítico

Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, ¿qué signo tiene $\int_a^b f(x) - g(x)\, dx$?

Longitud de curva

La longitud de un tramo de carretera recta es simplemente la distancia entre el punto inicial y el punto final.
Encontrar la longitud del segmento de la recta $y = 2x - 5$ entre los puntos $P(1,-3)$ y $Q(3,1)$, (Figura 12.12).

Solución:
Usamos la fórmula de la distancia entre dos puntos:



$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(3-1)^2 + (1+3)^2}$$
$$= 2\sqrt{5}.$$

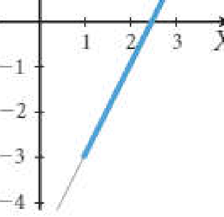


Figura 12.12

Si la recta es la gráfica de la función $f(x) = mx + b$, y los puntos $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ con $x_1 \leq x_2$ están en la recta, entonces

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (mx_2 - mx_1)^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 (1 + m^2)}$$
$$= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + m^2}.$$

Por último, observamos que $m = f'(x)$, así que obtenemos que

$$d(P,Q) = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

pero esta fórmula no nos sirve cuando la carretera tiene curvas.
Esta última fórmula puede generalizarse en el caso en que la función f ya no sea una recta. La idea de la demostración es pensar en que la gráfica de f casi coincide con la unión de muchísimos segmentitos rectos.

Si f' es una función continua en $[a,b]$, entonces la longitud de su gráfica entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{12.4}$$

La fórmula $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ con frecuencia conduce a expresiones que no son fácilmente integrables, aun para funciones sencillas, por lo que hay que recurrir a programas de cálculo simbólico para poder calcularlas, como se mostrará en el ejemplo de la página 503.

Ejemplos

1. Calcular la longitud de la curva $f(x) = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^{-2}}{16}$ en el intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$ (Figura 12.13).

Solución:
Para calcular la longitud de la curva en el intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$, calculamos primero la derivada de f:

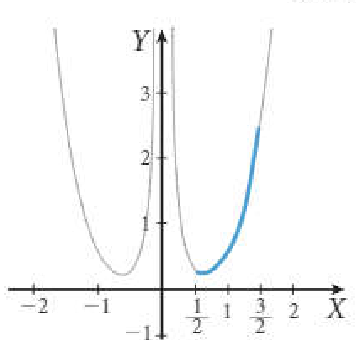


Figura 12.13

$$f'(x) = \left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^{-2}}{16}\right)' = 2x^3 - \frac{x^{-3}}{8}$$

de donde

$$\begin{aligned} 1 + (f'(x))^2 &= 1 + \left(2x^3 - \frac{x^{-3}}{8}\right)^2 \\ &= 1 + 4x^6 - \frac{1}{2} + \frac{x^{-6}}{64} \\ &= 4x^6 + \frac{1}{2} + \frac{x^{-6}}{64} \\ &= \left(2x^3 + \frac{x^{-3}}{8}\right)^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{\left(2x^3 + \frac{x^{-3}}{8}\right)^2} = 2x^3 + \frac{x^{-3}}{8}$$

en el intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.

Así, al aplicar la fórmula (12.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 2x^3+\frac{x^{-3}}{8}\,dx \\
&= 2\left(\frac{1}{4}\right)x^4+\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{2}x^4-\frac{1}{16}x^{-2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^4-\frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right) \\
&= \frac{1}{2^5}\left(3^4-1\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}-1\right) \\
&= \frac{80}{2^5}+\frac{2}{9} \\
&= \frac{49}{18}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud de la curva en el intervalo $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ es $\frac{49}{18}$.

2. Calcular la longitud de la curva $f(x)=\frac{5x^{\frac{3}{5}}}{2}-\frac{5x^{\frac{7}{5}}}{42}$ en el intervalo $[-3,-1]$.

Solución:

Para calcular la longitud (Figura 12.14) de la curva en el intervalo $[-3,-1]$, calculamos primero la derivada de f:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{5x^{\frac{3}{5}}}{2}-\frac{5x^{\frac{7}{5}}}{42}\right)' \\
&= \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)x^{-\frac{2}{5}}-\frac{5}{42}\left(\frac{7}{5}\right)x^{\frac{2}{5}} \\
&= \frac{3}{2}x^{-\frac{2}{5}}-\frac{7}{42}x^{\frac{2}{5}}.
\end{aligned}$$

después calculamos

$$\begin{aligned}
1+\left(f'(x)\right)^2 &= 1+\left(\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{5}}-\frac{7}{42}x^{\frac{2}{5}}\right)^2 \\
&= 1+\frac{9}{4}x^{-\frac{4}{5}}-\frac{21}{42}+\frac{49}{(42)^2}x^{\frac{4}{5}} \\
&= \frac{9}{4}x^{-\frac{4}{5}}+\frac{1}{2}+\frac{49}{(42)^2}x^{\frac{4}{5}} \\
&= \left(\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{5}}+\frac{7}{42}x^{\frac{2}{5}}\right)^2;
\end{aligned}$$

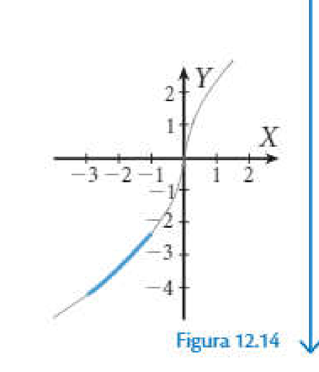


Figura 12.14

de donde

$$\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{5}}+\frac{7}{42}x^{\frac{2}{5}}\right)^2}=\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{5}}+\frac{7}{42}x^{\frac{2}{5}}.$$

Así, al aplicar la fórmula (12.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{-1}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx &= \int_{-3}^{-1}\left(\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{5}}+\frac{7}{42}x^{\frac{2}{5}}\right)dx\\ &=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}\right)x^{\frac{3}{5}}+\frac{7}{42}\left(\frac{5}{7}\right)x^{\frac{7}{5}}\Big|_{-3}^{-1}\\ &=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{5}}+\frac{5}{42}x^{\frac{7}{5}}\Big|_{-3}^{-1}\\ &=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{5}}\left(1+\frac{1}{21}x^{\frac{4}{5}}\right)\Big|_{-3}^{-1}\\ &=\frac{5}{2}(-1)\left(1+\frac{1}{21}\right)-\frac{5}{2}(-3)^{\frac{3}{5}}\left(1+\frac{1}{21}(-3)^{\frac{4}{5}}\right)\\ &=-\frac{55}{21}+\frac{5}{2}\sqrt[5]{27}\left(1+\frac{1}{21}\sqrt[5]{81}\right)\\ &\approx 2.77.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud de la curva en el intervalo $[-3,1]$ es aproximadamente 2.77.

Ejemplos

Ejercicios

Calcula en cada caso el área entre las gráficas de las funciones dadas en el intervalo indicado. En todos los casos $f(x)\geq g(x)$ en el intervalo en cuestión.

1. $f(x)=-2x-1 \quad g(x)=x+1$ en $\left[-4,-\frac{2}{3}\right]$
2. $f(x)=x^2+4 \quad g(x)=-1$ en $\left[-2,\frac{3}{2}\right]$
3. $f(x)=1-x^2,\ g(x)=x-1$ en $[-2,1]$
4. $f(x)=2-x^2,\ g(x)=x^2-2$ en $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$
5. $f(x)=\cos x,\ g(x)=\operatorname{sen} x$ en $\left[-\frac{3}{4}\pi,\frac{1}{4}\pi\right]$
6. $f(x)=3x,\ g(x)=\tan x$ en $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$
7. $f(x)=\sqrt[7]{(x+1)^2},\ g(x)=(x+2)^2-3$ en $[-3,0]$
8. $f(x)=(x+2)^3,\ g(x)=\sqrt[5]{(x-2)^3}-1$ en $[-2,0]$

Calcula en cada caso la longitud de la gráfica de la función en el intervalo indicado.

9. $f(x)=\frac{3}{4}x$ en $[0,60]$
10. $f(x)=3x+6$ en $[-5,7]$
11. $f(x)=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{x}$ en $[-4,-1]$
12. $f(x)=\frac{x^4}{12}+\frac{3}{8x^2}$ en $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$
13. $f(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}$ en $[3,7]$
14. $f(x)=\frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{1}{9}x^{\frac{3}{4}}$ en $[2,5]$
15. $f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{4}}$ en $\left[\frac{1}{2},4\right]$

Movimiento

Una persona deja caer una pelota desde lo alto de un edificio, y ésta tarda 2 segundos en llegar al piso. ¿Qué altura tiene el edificio, si consideramos que la única fuerza que actúa sobre la pelota es la fuerza de gravedad?

Solución:
La velocidad, en metros por segundo, de un objeto en caída libre está dada por la fórmula:

$$v(t)=v(0)+9.8t$$

Si la pelota se dejó caer, es decir, no se lanzó, su velocidad inicial es 0, así, $v(0)=0$.
La función velocidad es la derivada de la función distancia recorrida $d(t)$, o sea,

$$v(t)=d'(t)$$

Así que para encontrar la distancia $d(2)$ recorrida en 2 segundos, que es la altura del edificio, debemos integrar $v(t)$ en $[0,2]$

$$\begin{aligned} d(2) &= \int_0^2 v(t)\,dt \\ &= \int_0^2 9.8t\,dt \\ &= \frac{9.8}{2}t^2\Big|_0^2 \\ &= 4.9(4) \\ &= 19.6. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el edificio tiene una altura de 19.6 metros.

En el estudio del movimiento de un cuerpo intervienen cuatro variables: tiempo (t), distancia recorrida (d), velocidad (v) y aceleración (a).
La velocidad es la razón de cambio instantáneo de la distancia recorrida respecto al tiempo, es decir,

$$v(t)=d'(t)$$

y la aceleración es la razón de cambio instantáneo de la velocidad respecto al tiempo, es decir,

$$a(t)=v'(t)$$

Entonces, si se conoce la velocidad de un móvil en un intervalo de tiempo $[a,b]$, se puede conocer la distancia recorrida en ese lapso usando la integral definida

$$d=\int_a^b v(t)\,dt$$

Más en general, si queremos encontrar la distancia recorrida en el intervalo $[a,x]$ para cada tiempo x en $[a,b]$, calculamos

$$d(x)=\int_a^x v(t)\,dt$$

De igual manera, si queremos encontrar, a partir de la aceleración, la velocidad en el intervalo $[a,x]$ para cada x en $[a,b]$, calculamos

$$v(x)=\int_a^x a(t)\,dt.$$

Ejemplo

1. Un automóvil de carreras da la vuelta a una pista a una velocidad, en km/min, dada por:

$$v(t)=2+(0.5)\cos(t)+(0.1)\operatorname{sen}(2t),$$

donde t se mide en minutos y $t\in[0,15]$. ¿Qué distancia recorre después de 10 minutos?, (Figura 12.15).

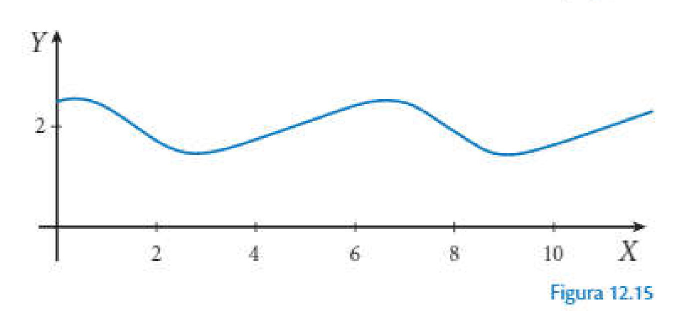


Figura 12.15

Solución:

La distancia recorrida es la integral de la velocidad, así que

$$\begin{aligned} d &= \int_0^{10} v(t)\,dt \\ &= \int_0^{10} \big(2+(0.5)\cos(t)+(0.1)\operatorname{sen}(2t)\big)\,dt \\ &= 2t+0.5\operatorname{sen} t-0.05\cos(2t)\Big|_0^{10} \\ &= 2(10)+0.5\operatorname{sen}(10)-0.05\cos(20)-\big(-0.05\cos(0)\big) \\ &\approx 19.76. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el automóvil recorre aproximadamente 19.76 km en 10 minutos.

Ejercicios

1. Se lanza un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 metros por segundo. ¿Qué altura alcanza el proyectil tres segundos después del lanzamiento? La velocidad, cuando se lanza un proyectil hacia arriba, está dada como $v(t)=v(0)-9.8t$ donde $v(0)$ es la velocidad inicial.
2. En un acantilado, un niño deja caer una piedra verticalmente. La aceleración con la que cae la piedra es de $9.8\ \text{m/s}^2$. ¿A qué velocidad va cayendo la piedra después de 5 segundos?
3. En un plano inclinado, un móvil va bajando con una aceleración de $5\ \text{m/s}^2$, ¿a qué velocidad va 10 segundos después de haber iniciado el descenso?
4. ¿Qué distancia ha recorrido el móvil del ejercicio anterior después de 10 segundos?
5. Para saber qué profundidad tiene un pozo, una persona deja caer una piedra en él. Si la piedra tardó 1 segundo en caer, ¿qué profundidad tiene el pozo?

Volúmenes de sólidos de revolución

Imaginemos una lámina rectangular sujeta a una varilla recta. Si esta lámina gira rápidamente alrededor de la varilla, lo que vemos es un cilindro.

Es fácil calcular el volumen de este cilindro a partir de las medidas del rectángulo (Figura 12.16).

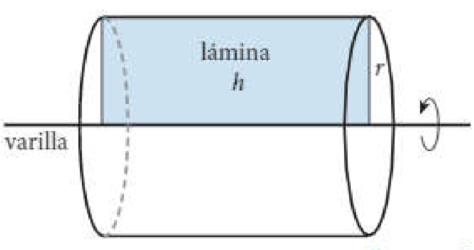


Figura 12.16

$$V = \pi r^2 h.$$

Si pensamos en r como la función constante r y en la lámina como la región bajo su gráfica en el intervalo $[a,b]$ con $b-a=h$, entonces podemos llegar a este mismo resultado mediante una integral

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b r^2 dx \\ &= \pi r^2 \int_a^b dx \\ &= \pi r^2 \left(x\Big|_a^b \right) \\ &= \pi r^2 (b-a) \\ &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

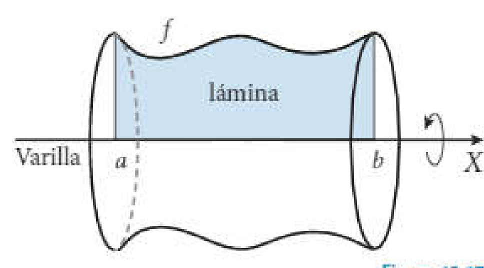


Figura 12.17

Si en lugar de una lámina rectangular, se sujeta al eje x una lámina cuyo lado opuesto no es recto, (Figura 12.17), sino que está dado por una función $f(x)$, donde f es una función continua la fórmula para calcular el volumen generado por la lámina cuando ésta gira alrededor del eje X

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \qquad (12.5)$$

Un sólido generado de esta manera, producido al girar la región bajo la gráfica de una función (la lámina) alrededor de un eje, se llama *sólido de revolución*.

Ejemplos

1. Encontrar el volumen de un cono de radio 5 y altura 10.

Solución:
Podemos pensar al cono como un sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x, el triángulo de la Figura 12.18. Ese triángulo es la región bajo la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

en $[0,10]$.

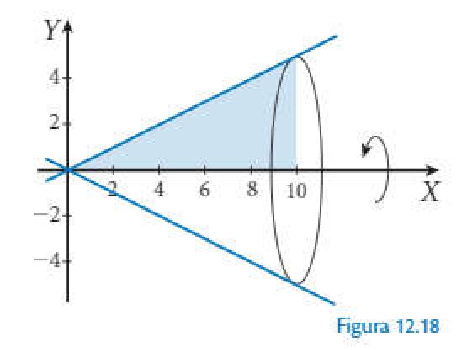


Figura 12.18

TIP
Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces el volumen del sólido generado al girar la región bajo la gráfica de f alrededor del eje X está dado por $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

Pensamiento crítico

Considera la región entre las gráficas de $f(x)=4$ y $g(x)=7$ en el intervalo $[-3,5]$. ¿Cuál es el volumen del sólido de revolución generado al girar esta región alrededor del eje X?

La recta

$$y=\frac{1}{2}x$$

es llamada la generatriz del cono.

Encontramos el volumen del cono usando la fórmula (12.5):

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{10}\left(\frac{1}{2}x\right)^2dx\\&=\frac{\pi}{4}\int_0^{10}x^2dx\\&=\frac{\pi}{12}x^3\Big|_0^{10}\\&=\frac{250}{3}\pi.\end{aligned}$$

2. Encontrar el volumen del sólido de revolución generado por la función $f(x)=\sqrt{x}$ para x entre 0 y 6, al girar la región bajo su gráfica alrededor del eje X.

Solución:
El sólido de revolución se obtiene al girar alrededor del eje X la región sombreada en la Figura 12.19:
Así, el volumen es

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{6}\left(\sqrt{x}\right)^2dx\\&=\pi\int_0^{6}x\,dx\\&=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^{6}\\&=18\pi\end{aligned}$$

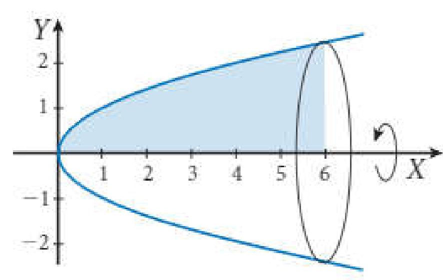


Figura 12.19

Ejemplos

Ejercicios

Calcula en cada caso el volumen del sólido obtenido al girar la región bajo la gráfica de la función dada alrededor del eje X, en el intervalo indicado.

1. $f(x)=-3$ en $[-4,-1]$
2. $f(x)=x$ en $[3,6]$
3. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ en $[-2,2]$
4. $f(x)=x^3$ en $[0,1]$
5. $f(x)=e^x$ en $[-1,1]$
6. $f(x)=\sqrt[4]{x}$ en $[1,4]$
7. $f(x)=\sec x$ en $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$
8. $f(x)=\sqrt{\cos x}$ en $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
9. $f(x)=x^2-x-6$ en $[-2,3]$
10. $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ en $[-4,4]$

Trabajo

Cuando un objeto se mueve en línea recta debido a la aplicación de una fuerza, decimos que la fuerza realizó un trabajo. Cuando la fuerza es constante, el trabajo realizado por la fuerza está dado por la fórmula:

$$T = Fd$$

donde d es la distancia que se desplazó el objeto.
En el Sistema Internacional de Medidas, la unidad de distancia es el metro (m), la de fuerza es el newton (N) y la de trabajo es el joule o julio (J), así

$$1 \text{ joule } = (1 \text{ newton}) \times (1 \text{ metro})$$

En el sistema técnico de unidades, la unidad de distancia es el metro, la unidad de fuerza es el kilogramo-fuerza o kilopondio y la de trabajo es el kilográmetro o kilopondímetro (kgm)

$$1 \text{ kilográmetro} = (1 \text{ kilogramo-fuerza}) \times (1 \text{ metro})$$

Cuando damos nuestro peso o el de objetos en kilos, en realidad nos estamos refiriendo a los kilogramos-fuerza o kilopondios. En lo que sigue mantendremos el uso de kilogramos.
Si la fuerza que se aplica al objeto para desplazarlo es variable, $F(x)$, entonces el trabajo realizado por la fuerza al desplazarse el objeto en línea recta desde el punto a hasta el punto b está dado por la integral definida:

$$T = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (12.6)$$

TIP
La relación entre las dos unidades de trabajo que hemos considerado es $1 \text{ kgm} = 9.81 \text{ J}$.
El kilopondio es la fuerza ejercida por la gravedad en la superficie terrestre sobre un cuerpo de 1 kg-masa.



1. Encontrar el trabajo realizado por una fuerza de 5 newtons al desplazar un objeto 10 metros.

Solución:
La fuerza es constante, $F = 5$, así que podemos simplemente multiplicar

$$\begin{aligned} T &= Fd \\ &= (5)(10) \\ &= 50, \end{aligned}$$

como la fuerza está en newtons y la distancia está en metros, el trabajo es igual a 50 joules.
Si calculamos el trabajo mediante la fórmula integral

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{10} 5\,dx \\ &= 5x\Big|_0^{10} \\ &= 50, \end{aligned}$$

obtenemos el mismo resultado, como era de esperarse.

2. En un pozo, un balde se encuentra 5 metros bajo el nivel del suelo. Si la cuerda pesa $\frac{1}{2}$ kg/metro y el balde lleno de agua pesa 8 kg, ¿cuál será el trabajo realizado para levantar el balde hasta el nivel del suelo?

TIP

Robert Hooke (1636 - 1703), científico inglés. En 1660 formuló la ley de la elasticidad, que actualmente lleva su nombre y la publicó en 1678. Participó en la primera sociedad científica de la historia, la Royal Society. En 1665 escribió su obra más importante *Micrographia* y fue él quien le dio nombre a la célula.

Ejemplos

Solución:

El balde tiene un peso constante de 8 kg por lo que si solo consideramos su peso, el trabajo realizado es $T=5\times 8=40$ kgm. Sin embargo, también debemos considerar el peso de la cuerda, el cual va disminuyendo a medida que el balde sube. Si el balde se encuentra a x metros del nivel del agua, la parte de la cuerda que falta por subir mide $5-x$ metros y por tanto, pesa $\frac{1}{2}(5-x)$ kg. Entonces el trabajo realizado para levantar el balde con la cuerda es:

$$\begin{aligned}
T &= \int_0^5 \frac{1}{2}(5-x)+8\,dx \\
&= \int_0^5 \frac{21}{2}-\frac{1}{2}x\,dx \\
&= \frac{21}{2}x-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^5 \\
&= \frac{21}{2}(5)-\frac{1}{4}\left(5^2\right) \\
&= \frac{5}{2}\left(21-\frac{5}{2}\right) \\
&= \frac{185}{4}=46.25.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el trabajo realizado para levantar el balde es de 46.25 kgm.

Ley de Hooke. La magnitud de la fuerza necesaria para estirar o comprimir un resorte x unidades de longitud a partir de su longitud natural es proporcional a x.

$$F(x)=kx.$$

La constante k depende de las características físicas del resorte y se mide en newton/metro. Esto nos dice que conforme se va estirando o comprimiendo el resorte, es más difícil seguir haciéndolo.

Ejemplos

1. Encontrar el trabajo efectuado para comprimir un resorte 8 cm desde su longitud natural, si la constante k del resorte es 40 N/m. (Figura 12.20).

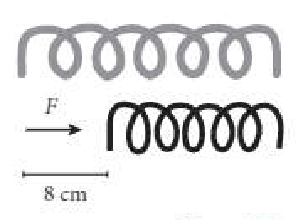


Figura 12.20

Solución:

La magnitud de la fuerza aplicada está dada por

$$F(x)=40x$$

y se ejercerá durante el trayecto de 8 cm.

Convertimos los centímetros a metros para trabajar en el Sistema Internacional de Unidades y aplicamos la fórmula (12.6):

$$\begin{aligned}
T &= \int_0^{0.08} 40x\,dx \\
&= 20x^2\Big|_0^{0.08} \\
&= 0.128\text{ J}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el trabajo efectuado es de 0.128 joules.

Ejemplos

2. Un resorte tiene una longitud de 1.2 m. Si se necesita una fuerza de 35 N para mantenerlo estirado 0.5 m, ¿qué cantidad de trabajo será necesaria para estirarlo desde su longitud natural hasta una longitud de 1.5 metros?

Solución:
Por la ley de Hooke sabemos que:

$$F = kx$$

y de los datos del problema, tenemos:

$$35 = k\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$70 = k,$$

de donde la magnitud de la fuerza está dada por:

$$F = 70x.$$

Como el resorte debe estirarse desde 1.2 hasta 1.5 metros, entonces su estiramiento será

$$1.5 - 1.2 = 0.3 \text{ m}$$

desde su longitud natural. Así, el trabajo es;

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{0.3} 70x\,dx \\ &= 70\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0.3} \\ &= 35(0.3)^2 \\ &= 3.15 \text{ J.} \end{aligned}$$

La cantidad de trabajo necesaria es de 3.15 J.

Ejercicios

1. Encontrar el trabajo realizado por la fuerza $F(x) = x^3 + \sqrt[3]{x}$ para desplazar un objeto a lo largo del eje x desde el punto $x = 1$ hasta el punto $x = 16$.
2. Un cable de 80 m está colgando de la azotea de un edificio. Su peso es de 6 kg/metro. ¿Cuál será el trabajo realizado para subirlo totalmente?
3. En una construcción se desea subir una cubeta con arena, cuyo peso es de 15 kg, a una plataforma que se encuentra a una altura de 12 metros. Si la cuerda pesa 3 kg/metro, ¿cuál será el trabajo realizado al subir la cubeta hasta la plataforma?
4. El agua en un pozo está a una profundidad 10 m. Encuentra el trabajo requerido para subir un cubo de agua con una capacidad de 20 litros teniendo en cuenta que cada metro de la cuerda pesa 0.5 kg.
5. Determinar el trabajo requerido para comprimir un resorte desde su longitud natural de 1 m a una longitud de 0.75 m, si la constante del resorte es de 16 N/m.

Ejercicios

6. Un resorte tiene una longitud de 0.4 metros. Si se necesita una fuerza de 14 newtons para mantenerlo estirado 0.2 metros, ¿cuál es la fuerza que se aplica al resorte para mantenerlo estirado x metros desde su longitud natural?, ¿qué cantidad de trabajo será necesaria para estirarlo desde su longitud natural hasta una longitud de 0.7 metros?

Mundo virtual

En esta sección te invitamos a visitar varios sitios que contienen material relacionado con la integral. Algo de él está desarrollado por los autores de este libro, pero mucho más ha sido elaborado por personas de todo el mundo que tienen interés en las matemáticas.

- http://atenea.matem.unam.mx Éste es un sitio del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en el cual los investigadores del Instituto están creando material para cursos en línea. Puedes entrar como invitado sin necesidad de registrarte. Una vez dentro del sitio, elige la categoría "Cálculo diferencial e integral", dentro de ella, el curso "Cálculo I" y entra a las lecciones de la sección "La integral".
- http://newton.matem.unam.mx/arquimedes En este sitio hay muchos interactivos de matemáticas para bachillerato, que explican cómo resolver problemas muy puntuales. Revisa los que corresponden a Cálculo Diferencial e Integral, en particular, los que corresponden a la integral.
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web Sitio del Ministerio de Educación, Salud y Deporte del Gobierno español que contiene unidades didácticas y recursos interactivos desarrollados con la herramienta Descartes. Estos materiales fueron elaborados por profesores de enseñanza media. Selecciona "Aplicaciones", y luego "Análisis" encontrarás varias lecciones relativas al tema de integración que estudiaste en esta unidad.
- http://es.wikipedia.org La enciclopedia en línea Wikipedia es uno de los sitios de referencia para encontrar información relacionada con la ciencia y la cultura. En el buscador escribe: Integración. Hojea el documento para ampliar los temas vistos en esta unidad. El material que está en esa página corresponde a ésta y a la siguiente unidad del libro.
- http://www.wolframalpha.com Wolfram Alpha es una aplicación desarrollada por Wolfram Research, los creadores del programa Mathematica. Al entrar a la página aparece una ventanita en la que se puede poner una operación matemática, o una pregunta muy genérica, por ejemplo: "President of Mexico in 1840". Revisa los ejemplos y te sorprenderás de la cantidad de información organizada que puede darte.

  Entre otras cosas, Wolfram Alpha sabe calcular integrales definidas e indefinidas.

Para que calcule una integral indefinida puedes poner, por ejemplo:

- integrate $x \wedge 2$ para calcular $\int x^2 dx$.
- integrate $\sin(x)$ para calcular $\int \operatorname{sen} x dx$.

También puedes poner

- $\text{int}(x \wedge 2)$
- $\text{int}(\sin(x))$

para calcular las mismas integrales.

- Para calcular integrales definidas, se usa la segunda manera, añadiendo los límites de integración:
  - $\text{int}(x \wedge 2,3,4)$ para calcular $\int_3^4 x^2 dx$
  - $\text{int}(1/x^2,1,$ infinity $)$ para calcular $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

Además de calcular la integral, Wolfram Alpha da mucha información adicional sobre la función que pediste que integrara.

Resumen de la unidad

- Si f es continua en $[a,b]$ y $F'(x)=f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.
- Primer teorema fundamental del cálculo.
  Si f es continua en $[a,b]$ y para cada punto x entre a y b definimos la función $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, entonces F es derivable y $F'(x)=f(x)$.
- Teorema del valor medio para integrales.
  Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe un número c entre a y b tal que $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.
  El lado derecho es llamado el valor promedio de f en $[a,b]$.
- Área entre curvas.
  Si f y g son funciones continuas que satisfacen $f(x) \geq g(x)$ para todo x en un intervalo $[a,b]$, el área de la región comprendida entre las gráficas de f y g entre las rectas $x=a$ y $x=b$ está dada por $A=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right) dx$.
- Longitud de una curva.
  Si f es una función con derivada continua en $[a,b]$ entonces la longitud de su gráfica entre los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ está dada por $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

- Movimiento.
  Si t es el tiempo, d la distancia recorrida, v la velocidad y a la aceleración, entonces
  - $v(t)=d'(t)$.
  - $a(t)=v'(t)$.

  y por tanto
  - $d(x)=\int_a^x v(t)dt$.
  - $v(x)=\int_a^x a(t)dt$.
- Volumen de un sólido de revolución.
  El volumen de un sólido de revolución generado al girar alrededor del eje X la región bajo la gráfica de una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, está dado por $V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$.
- Trabajo.
  El trabajo realizado por la fuerza $F(x)$ al desplazarse un objeto desde el punto a hasta el punto b está dado por $T=\int_a^b F(x)\,dx$.
- Ley de Hooke.
  La magnitud de la fuerza necesaria para estirar o comprimir un resorte x unidades de longitud a partir de su longitud natural es proporcional a x. $F(x)=kx$.

Ejercicios de repaso

En cada caso, calcular la integral definida.

1. $\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{x^4+3}\,dx$
2. $\int_0^2 \frac{x^4+5x^3+9x^2+6x+5}{x^2+1}dx$
3. $\int_1^e \frac{2}{x(1+\ln x)}dx$
4. $\int_{-4}^{-2} x^2 e^{\ln(x^2-3x)}\,dx$

En cada caso, calcula la longitud de la gráfica de la función en el intervalo indicado.

5. $f(x)=\frac{3}{8}x^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ en $[1,3]$
6. $f(x)=\frac{x^3}{24}+\frac{2}{x}$ en $[-5,-1]$
7. Encontrar el trabajo realizado por la fuerza $F(x)=x^2+\sqrt{x}$ para desplazar un objeto a lo largo del eje X desde el punto $x=1$ hasta el punto $x=9$.
8. Calcula el área algebraica entre $f(x)=x^5-4x^3$ y el eje X en el intervalo en $[-2,2]$.

9. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar la región bajo la gráfica de la función $f(x)=x^3-3x+1$ en $\left[-\frac{3}{2},0\right]$.

10. Calcula el área entre las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\cos x$ en $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. En el intervalo dado $f(x)\geq g(x)$.

11. Calcula el área entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^3+2x^2-3x$ y $g(x)=x^{-2}-4$ en $[-3,-1]$, en el intervalo dado $f(x)\geq g(x)$.

12. Encuentra el volumen de un cono circular recto de altura h y radio de la base r. Debes girar la función adecuada alrededor del eje X.

13. El resorte de un amortiguador tiene una longitud de 90 centímetros. Si se necesita una fuerza de 21 newtons para comprimirlo 30 centímetros, ¿cuál es la magnitud de la fuerza que se aplica al resorte para comprimido x centímetros desde su longitud natural?, ¿qué cantidad de trabajo será necesaria para comprimirlo desde su longitud natural hasta una longitud de 50 centímetros?

14. Durante una inundación, un helicóptero se mantiene inmóvil y deja caer sobre un poblado paquetes con víveres para ayudar a los damnificados. Si un paquete tardó 10 segundos en llegar al suelo después de haberlo dejado caer. ¿A qué altura se encontraba el helicóptero en el momento de soltar los paquetes?

15. Con una resortera, un niño lanza una piedra verticalmente hacia arriba para bajar su pelota que se quedó atorada en la copa de un árbol. Si la piedra es lanzada con una velocidad inicial de 28 metros por segundo. ¿Qué altura alcanza cinco segundos después del lanzamiento? La velocidad, cuando se lanza un proyectil hacia arriba, está dada como $v(t)=v(0)-9.8t$ donde $v(0)$ es la velocidad inicial.

16. Un resorte tiene una longitud de 2 metros. Si se necesita una fuerza de 175 newtons para mantenerlo estirado 1.5 metros, ¿qué cantidad de trabajo será necesaria para estirarlo desde su longitud natural hasta una longitud de 4 metros?

Autoevaluación

1. El valor promedio de $f(x)=3x^2-5x$ en $[-8,-2]$ es:
   a. $\frac{1}{6}$
   b. 109
   c. $-\frac{327}{5}$
   d. -109

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 413.

2. El valor promedio de $f(x)=x^2-2x+1$ en $[1,4]$ se alcanza en:
   a. $c=1+\sqrt{3}$
   b. $c=9$
   c. $c=\frac{1}{3}$
   d. $c=1+\sqrt{3}$ y $c=1-\sqrt{3}$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 413.

3. La integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(8e^{\sec x}\sec x\tan x\right)dx$ es:
   a. $8e^{\sqrt{2}}-8e$
   b. 8
   c. 0
   d. $8e^{\sqrt{2}}-8$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 406.

4. El área de la región encerrada por las gráficas de $f(x)=x^2-4$ y $g(x)=-x^2+4$ es:
   a. 32
   b. $\frac{32}{3}$
   c. $\frac{64}{3}$
   d. $-\frac{64}{3}$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 415-416.

5. El volumen del sólido de revolución generado por la función $f(x)=e^x$ en el intervalo $[-2,1]$ es:
   a. $\frac{\pi}{e^2}\left(e^2-1\right)$
   b. $\frac{\pi}{e^4}\left(e^6-1\right)$
   c. $\frac{\pi}{e^2}\left(e^3-1\right)$
   d. $\frac{\pi}{2e^4}\left(e^6-1\right)$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 423.

6. La longitud de la curva $f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ en el intervalo $[1,4]$ es:
   a. $\frac{38}{3}$
   b. $\frac{1}{16}\ln 4+6$
   c. $\frac{25}{6}$
   d. $\frac{31}{6}$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 418.

7. El área algebraica de la región comprendida por la gráfica de $f(x)=\operatorname{sen} x$ en $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ es:
   a. $\frac{\pi}{2}$
   b. 1
   c. 0
   d. π

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 410-411.

8. Un resorte tiene una longitud de 8 cm. Si se necesita una fuerza de 30 N para mantenerlo estirado 2.5 cm, ¿qué cantidad de trabajo será necesaria para estirarlo desde su longitud natural hasta una longitud de 11 metros?
   a. 54 N/m
   b. 12 N/m
   c. 108 N/m
   d. 337.5 N/m

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 425.

Heteroevaluación

1. Encuentra la longitud de la curva $f(x)=\frac{x^4}{12}+\frac{3}{8x^2}$ en $[1,3]$.

2. Encuentra el volumen del sólido de revolución generado por la función $f(x)=x^{\frac{4}{3}}$ en $[-2,2]$.

3. Determina el área entre las curvas $f(x)=x^3+x^2-3x-3$ y $g(x)=x^3+2x^2-3$.



Herramienta para el cálculo de integrales indefinidas de una función.



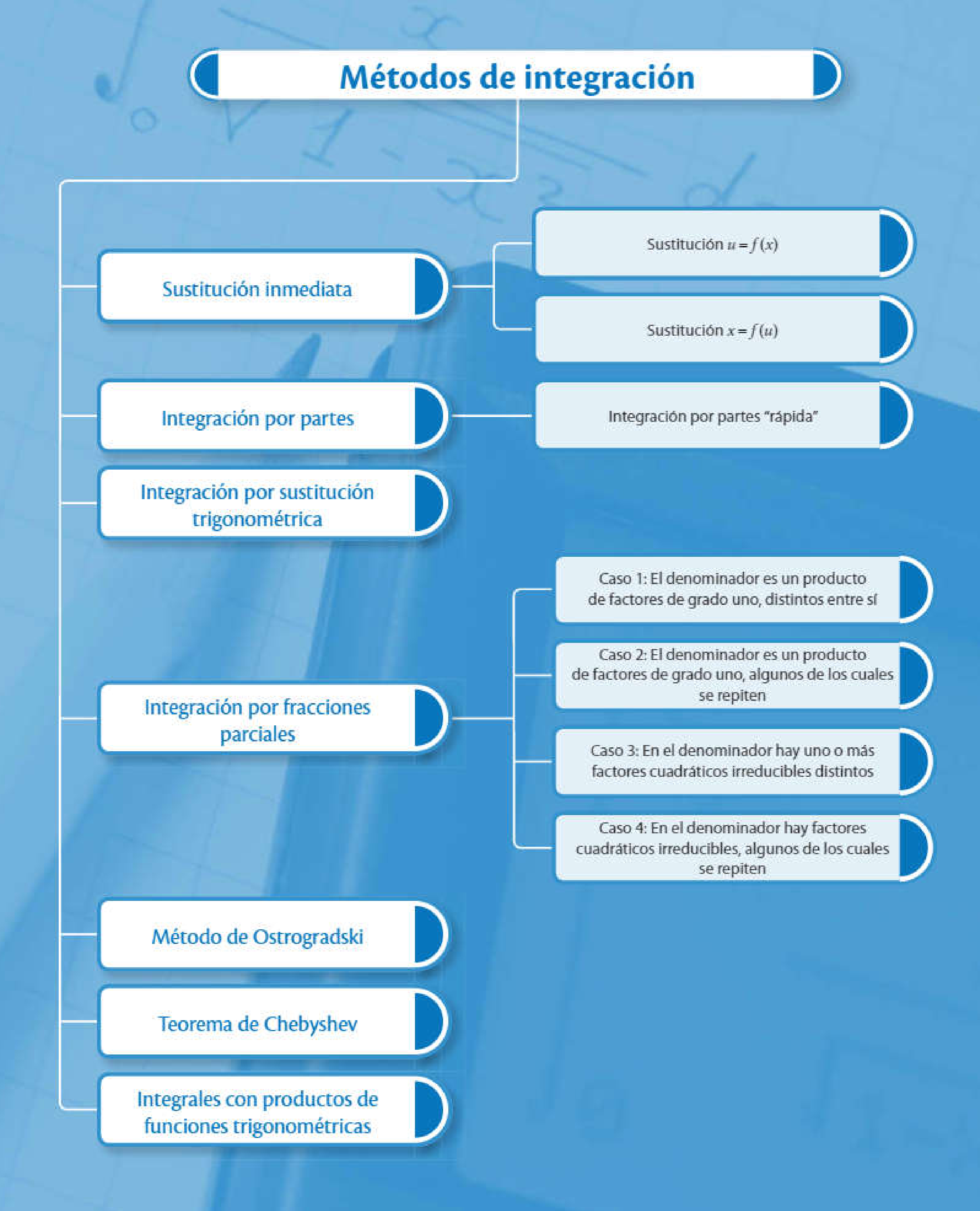
Unidad 13 Métodos de integración

Desde la invención del *Cálculo Diferencial e Integral* se han ido desarrollando métodos para poder integrar funciones cada vez más complicadas. Existen libros que contienen tablas enormes de integrales y ya hay programas de cómputo, cada vez más poderosos y baratos, capaces de integrar simbólicamente muchas funciones.

De cualquier manera, es importante conocer los principales métodos de integración, como cultura básica e incluso para obtener mayor provecho de las tablas y de los programas de cómputo para calcular integrales. Entendiendo como método de integración cualquiera de las técnicas o herramientas utilizadas para calcular una antiderivada o integral indefinida de una función.

En esta unidad veremos algunos de los métodos de integración clásicos como son: integración por partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales; con ellos se pueden integrar casi todas las funciones razonablemente sencillas.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.



Sustitución inmediata

Sustitución $u = f(x)$

Calcular $\int \frac{2x-1}{x^2-x+15}dx$.

Solución:

Para calcular esta integral, hacemos un cambio de variable

$$u = x^2 - x + 15$$

y derivando calculamos du

$$du = (2x-1)\,dx$$

así que podemos sustituir $(2x-1)\,dx$ por du

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x^2-x+15}dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln(u) + C\end{aligned}$$

y escribimos todo en términos de x

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x^2-x+15}dx &= \ln(u) + C \\ &= \ln\left(x^2 - x + 15\right) + C.\end{aligned}$$

TIP

Si utilizamos la sustitución $u = f(x)$, entonces $du = f'(x)\,dx$.

Ejemplos

1. Calcular $\int \left(x^2+2x\right)\sqrt[4]{x^3+3x^2-1}\,dx$.

Solución:

El integrando tiene una raíz cuarta; para simplificarlo, realizamos el siguiente cambio de variable:

$$u = x^3 + 3x^2 - 1$$

y derivando calculamos du

$$\begin{aligned}du &= \left(3x^2+6x\right)dx \\ &= 3\left(x^2+2x\right)dx\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{3}du = \left(x^2+2x\right)dx$$

así que podemos sustituir $\left(x^2+2x\right)dx$ por $\frac{1}{3}du$

$$\int (x^2+2x)\sqrt[4]{x^3+3x^2-1}\,dx = \int \sqrt[4]{u}\,\frac{1}{3}du$$
$$=\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{4}}\,du$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{u^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}\right)+C$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{u^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}\right)+C$$
$$=\frac{4}{15}u^{\frac{5}{4}}+C$$

y escribimos todo en términos de x:

$$\int (x^2+2x)\sqrt[4]{x^3+3x^2-1}\,dx = \frac{4}{15}u^{\frac{5}{4}}+C$$
$$=\frac{4}{15}(x^3+3x^2-1)^{\frac{5}{4}}+C.$$

2. $\int \csc x \cot x \operatorname{sen}(\csc x)\,dx.$

Solución:
Hacemos un cambio de variable:

$$u=\csc x$$

y derivando calculamos du

$$du=-\csc x \cot x\,dx$$

de donde

$$-du=\csc x\cot x\,dx$$

Así que podemos sustituir $\csc x \cot x\,dx$ por $-du$

$$\int \csc x\cot x \operatorname{sen}(\csc x)\,dx = \int \operatorname{sen} u(-du)$$
$$=\int -\operatorname{sen} u\,du$$
$$=\cos u + C$$

y escribimos todo en términos de x:

$$\int \csc x\cot x \operatorname{sen}(\csc x)\,dx = \cos u + C$$
$$=\cos(\csc x)+C.$$

3. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

Solución:
Hacemos un cambio de variable:

$$u=\sqrt{x}$$

y derivando calculamos du:

$$du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

de donde:

$$2du=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

así que podemos sustituir $\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ por $2du$:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &= \int e^{u}\,2du\\ &= 2\int e^{u}\,du\\ &= 2e^{u}+C\end{aligned}$$

y escribimos todo en términos de x:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &= 2e^{u}+C\\ &= 2e^{\sqrt{x}}+C.\end{aligned}$$

Ejemplos

Sustitución $x=f(u)$

Calcular $\int \frac{5-\sqrt{x}}{x-25}dx.$

Solución:
Hacemos un cambio de variable:

$$x=u^{2}$$

y calculamos dx

$$dx=2u\,du$$

de donde

$$\int \frac{5-\sqrt{x}}{x-25}dx = \int \frac{(5-u)2u}{u^2-25}du$$
$$= \int \frac{-2u(u-5)}{(u-5)(u+5)}du$$
$$= -\int \frac{2u}{u+5}du$$
$$= -2\int \frac{u}{u+5}du$$
$$= -2\int \frac{u+5-5}{u+5}du$$
$$= -2\left(\int \frac{u+5}{u+5}du + \int \frac{-5}{u+5}du\right)$$
$$= -2\left(\int du - 5\int \frac{1}{u+5}du\right)$$
$$= -2(u - 5\ln(u+5)) + C$$
$$= -2u + 10\ln(u+5) + C$$

como

$$-2u + 10\ln(u+5) = -2\sqrt{x} + 10\ln\left(\sqrt{x}+5\right)$$

entonces,

$$\int \frac{5-\sqrt{x}}{x-25}dx = -2\sqrt{x} + 10\ln\left(\sqrt{x}+5\right) + C.$$

TIP

Si utilizamos la sustitución $x = f(u)$, entonces $dx = f'(u)\,du$.

Ejemplos

1. Calcular $\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx$.

Solución:

Hacemos el cambio de variable:

$$x = \ln u$$

Calculamos dx

$$dx = \frac{du}{u}$$

Así,

$$e^x = u$$

y

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$
$$= \frac{1}{u}.$$

Entonces

$$\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \int \frac{\frac{du}{u}}{1+\frac{1}{u}}$$

$$= \int \frac{du}{u\left(1+\frac{1}{u}\right)}$$

$$= \int \frac{du}{u+1}$$

$$= \ln(u+1)+C$$

$$= \ln\left(e^{x}+1\right)+C.$$

2. $\int x^2 \sqrt[5]{x-8}\,dx.$

Solución:

Hacemos el cambio de variable:

$$x-8=t^5$$

y calculamos dx:

$$dx = 5t^4\,dt$$

Como $x-8=t^5$ entonces

$$x=t^5+8$$

de donde:

$$\int x^2 \sqrt[5]{x-8}\,dx = \int \left(t^5+8\right)^2 t\left(5t^4\right)dt$$

$$=5\int \left(t^{10}+16t^5+64\right)t^5\,dt$$

$$=5\int t^{15}+16t^{10}+64t^5\,dt$$

$$=5\left(\frac{t^{16}}{16}+\frac{16}{11}t^{11}+\frac{64}{6}t^{6}\right)+C$$

$$=\frac{5}{16}t^{16}+\frac{80}{11}t^{11}+\frac{160}{3}t^{6}+C$$

Como $t=\sqrt[5]{x-8}$, entonces

$$\frac{5}{16}t^{16}+\frac{80}{11}t^{11}+\frac{160}{3}t^{6}+C=\frac{5}{16}\left(\sqrt[5]{x-8}\right)^{16}+\frac{80}{11}\left(\sqrt[5]{x-8}\right)^{11}+\frac{160}{3}\left(\sqrt[5]{x-8}\right)^{6}+C$$

$$=\frac{5}{16}(x-8)^{\frac{16}{5}}+\frac{80}{11}(x-8)^{\frac{11}{5}}+\frac{160}{3}(x-8)^{\frac{6}{5}}+C$$

Por lo tanto, $\int x^2 \sqrt[5]{x-8}\,dx=\frac{5}{16}(x-8)^{\frac{16}{5}}+\frac{80}{11}(x-8)^{\frac{11}{5}}+\frac{160}{3}(x-8)^{\frac{6}{5}}+C.$

Ejemplos

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales. Se sugiere un cambio de variable.

1. $\int \sec^2 3x\,dx; u=3x$
2. $\int \frac{x}{x^2+4}dx; u=x^2+4$
3. $\int \frac{x}{x+9}dx; u=x+9$
4. $\int \frac{x}{x-7}dx; u=x-7$
5. $\int e^x \cos\left(e^x\right)dx; u=e^x$
6. $\int \sec^2 x \tan x\,dx; u=\tan x$
7. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx; u=x^2+4x+6$
8. $\int \left(x^3-x\right)\left(x^4-2x^2+8\right)^3 dx; u=x^4-2x^2+8$
9. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}dx; u=\ln x$
10. $\int xe^{x^2+3}dx; u=x^2+3$
11. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx; u=\sqrt{x}$
12. $\int \frac{2e^x}{e^{2x}+1}dx; u=e^x$
13. $\int x\tan x^2\,dx; u=x^2$
14. $\int (x+3)\sqrt[4]{x-2}\,dx; x-2=t^4$
15. $\int x^2\sqrt[4]{x+7}\,dx; x+7=t^4$
16. $\int \frac{9-\sqrt{x}}{x-81}dx; x=t^2$
17. $\int \frac{e^{3x}}{1+e^x}dx; u=e^x$
18. $\int x^3\sqrt[6]{x-5}\,dx; x-5=t^6$
19. $\int \frac{\sqrt{x}+8}{x-64}dx; x=t^2$
20. $\int x^2\sqrt[7]{x+3}\,dx; x+3=t^7$

21. Calcula la longitud de la curva $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x+\frac{1}{4(x-2)}$ en el intervalo $[-2,1]$. Ver página 417.

Integración por partes

Calcular $\int \ln x\,dx$.

Solución:
Llamamos

$$u=\ln x \qquad \text{y} \qquad dv=dx$$

Entonces

$$du=\frac{1}{x}dx \qquad\qquad v=x$$

y aplicando la fórmula de integración por partes, que se explica al término de este ejemplo, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x\ln x-\int x\left(\frac{1}{x}\right)dx\\ &= x\ln x-\int dx\\ &= x\ln x-x+C\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$.

Si queremos calcular $\int h(x)\,dx$ y podemos identificar que:

$$h(x) = f(x)g'(x)$$

entonces podemos utilizar la fórmula para la derivada del producto de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \left(f(x)g(x)\right)'$$

de la cual obtenemos:

$$\int f'(x)g(x)\ dx + \int f(x)g'(x)\ dx = \int \left(f(x)g(x)\right)' dx$$

$$\int f'(x)g(x)\ dx + \int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x)$$

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx$$

Esta última es llamada la fórmula de *integración por partes*.

Para recordar este resultado con facilidad, establecemos las siguientes igualdades:

$$u = f(x) \qquad dv = g'(x)\,dx$$

de donde, al derivar e integrar, respectivamente obtenemos:

$$du = f'(x)\,dx \qquad v = g(x)$$

y entonces:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Observaciones:

1. Para utilizar el método de integración por partes debemos identificar el integrando como un producto de la forma $u\,dv$.
2. Tenemos que saber calcular la integral de dv.
3. Algunas veces identificamos la función que se quiere integrar como el producto de dicha función por la función constante 1. (Ver el ejemplo introductorio.)
4. La elección de u y dv se hace de manera que la integral $\int v\,du$ sea más fácil de calcular que la original.



1. Calcular $\int x \sec^2 x\,dx$.

Solución:
Hacemos:

$$u = x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$$

Así,

$$du = 1dx \qquad v = \tan x$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int x\sec^2 x\,dx &= x\tan x - \int \tan x\,dx\\ &= x\tan x - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx\\ &= x\tan x + \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}dx\\ &= x\tan x + \ln(\cos x) + C.\end{aligned}$$

2. Calcular $\int x\ln x\,dx$.

Solución:
Llamamos:

$$u = \ln x \qquad dv = xdx$$

Así,

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\int x\ln x\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C\\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

3. Calcular $\int \sec^3 x\,dx$.

Solución:
Escribimos la integral como:

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x\sec^2 x\,dx$$

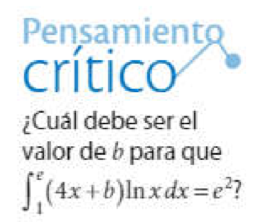
Llamamos:

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$$

Así,

$$du = \sec x\tan x\,dx \qquad v = \tan x$$

TIP
Integración por partes:
$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$



¿Cuál debe ser el valor de b para que $\int_1^e (4x+b)\ln x\,dx = e^2$?

Ejemplos

entonces:

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\,dx\\ &= \sec x\tan x - \int \sec x\left(\sec^2 x - 1\right)dx\\ &= \sec x\tan x - \int \sec^3 x - \sec x\,dx\\ &= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx\end{aligned}$$

de donde:

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x\tan x + \int \sec x\,dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\sec x\tan x + \ln(\sec x + \tan x)\right) + C$$

Por lo tanto, $\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\sec x\tan x + \ln(\sec x + \tan x)\right) + C.$

Integración por partes "rápida"

Primer caso

Calcular $\int \left(x^4 + 3x^2 + 1\right)e^x\,dx.$

Solución:

Esta integral se calcula usando integración por partes, pero es necesario aplicar el método repetidamente. Veamos cómo hacerlo de manera económica. Llamamos

$$u = x^4 + 3x^2 + 1 \qquad\qquad dv = e^x\,dx$$

y formamos la siguiente tabla

u y sus derivadas sucesivas		e^x y sus integrales sucesivas
$x^4 + 3x^2 + 1$	$+$	e^x
$4x^3 + 6x$	$-$	e^x
$12x^2 + 6$	$+$	e^x
$24x$	$-$	e^x
24	$+$	e^x
0		e^x

Los signos que aparecen arriba de cada flecha se alternan, empezando siempre con el positivo (+). Multiplicamos las funciones que están unidas por las flechas, y las escribimos una a continuación de otra separándolas con los signos que aparecen arriba de la flecha correspondiente. Esto nos da el valor integral. Así,

$$\begin{aligned}\int \left(x^4 + 3x^2 + 1\right)e^x\,dx &= \left(x^4 + 3x^2 + 1\right)e^x - \left(4x^3 + 6x\right)e^x\\ &\quad + \left(12x^2 + 6\right)e^x - 24xe^x + 24e^x + C.\end{aligned}$$

Este método puede utilizarse cuando el integrando esté formado por el producto de un polinomio y una función que sea fácil de integrar repetidamente.

Lo que se hace en realidad es aplicar varias veces el método de integración por partes. La elección de u y v en cada una de estas aplicaciones está señalada en la tabla en la que aparecen la función u y sus derivadas, y la otra función y sus integrales.

El proceso termina cuando en la columna de las derivadas aparece el cero.

Ejemplos

1. Calcular $\int\left(2x^3+x-2\right)\cos x\,dx$.

Solución:

Llamamos:

$$u=2x^3+x-2 \qquad dv=\cos x\,dx$$

y formamos la tabla

u y sus derivadas sucesivas		$\cos x$ y sus integrales sucesivas
$2x^2+x-2$	$+$	$\cos x$
$6x^2+1$	$-$	$\operatorname{sen} x$
$12x$	$+$	$-\cos x$
12	$-$	$-\operatorname{sen} x$
0		$\cos x$

entonces hacemos los productos y escribimos el resultado de la integral:

$$\begin{aligned}\int\left(2x^3+x-2\right)\cos x\,dx&=\left(2x^3+x-2\right)\operatorname{sen} x-\left(6x^2+1\right)\left(-\cos x\right)+12x\left(-\operatorname{sen} x\right)-12\cos x+C\\&=\left(2x^3+x-2\right)\operatorname{sen} x+\left(6x^2+1\right)\cos x-12x\operatorname{sen} x-12\cos x+C.\end{aligned}$$

2. Calcular $\int x^3(x+2)^5\,dx$.

Solución:

Llamamos:

$$u=x^3 \qquad dv=(x+2)^5\,dx$$

y formamos la tabla

u y sus derivadas sucesivas		$(x+2)^5$ y sus integrales sucesivas
x^3	$+$	$(x+2)^5$
$3x^2$	$-$	$\dfrac{(x+2)^6}{6}$
$6x$	$+$	$\dfrac{(x+2)^7}{6(7)}$
6	$-$	$\dfrac{(x+2)^8}{6(7)8}$
0		$\dfrac{(x+2)^9}{6(7)8(9)}$

Ejemplos

entonces hacemos los productos y escribimos el resultado de la integral:

$$\int x^3(x+2)^5\,dx = x^3\left(\frac{(x+2)^6}{6}\right) - 3x^2\left(\frac{(x+2)^7}{6(7)}\right) + 6x\left(\frac{(x+2)^8}{6(7)8}\right) - 6\left(\frac{(x+2)^9}{6(7)8(9)}\right) + C$$

$$= \frac{x^3(x+2)^6}{6} - \frac{x^2(x+2)^7}{14} + \frac{x(x+2)^8}{56} - \frac{(x+2)^9}{504} + C.$$

Segundo caso

Hay otros casos en los que ninguno de los factores es un polinomio, en tal caso hacemos una adecuación al método que veremos en el siguiente ejemplo.

Calcular $\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx$.

Solución:

Llamamos:

$$u = \operatorname{sen} 2x \qquad\qquad dv = e^x\,dx$$

y formamos la tabla

sen $2x$ y sus derivadas sucesivas		e^x y sus integrales sucesivas
sen $2x$	+	e^x
$2 \cos 2x$	−	e^x
-4 sen $2x$	+	e^x

En este caso, nunca tendremos cero en la columna de la izquierda, por ello, detenemos el proceso en el momento en el que encontramos en un renglón $-4\operatorname{sen} 2x$ y e^x. Para obtener el resultado, escribimos los productos de las flechas como en los ejemplos anteriores y por último la integral del producto de lo que aparece en el último renglón. Es decir,

$$\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx = e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x - 4\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx$$

Observamos que la integral del primer miembro coincide con la integral del último sumando. Despejando obtenemos

$$5\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx = e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x$$

de donde

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{5}\left(e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x\right) + C$$

En general, elegimos u y dv y formamos la tabla que contiene las derivadas sucesivas de u y la integrales sucesivas de dv. Detenemos el proceso en el momento en el que encontramos en un renglón las funciones con las que empezamos, multiplicada(s) posiblemente por una(s) constante(s) (en el ejemplo introductorio esta constante es -4).

Para obtener el resultado, escribimos los productos de las flechas y por último la integral del producto de las funciones que aparecen en el último renglón.

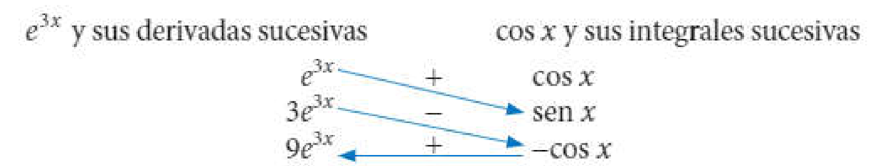
Ejemplos

1. Calcular $\int e^{3x}\cos x\,dx$.

Solución:
Llamamos:

$$u = e^{3x} \qquad dv = \cos x\,dx$$

y formamos la tabla



Para obtener el resultado, escribimos los productos de las flechas, y por último la integral del producto de lo que aparece en el último renglón:

$$\int e^{3x}\cos x\,dx = e^{3x}(\operatorname{sen} x) - 3e^{3x}(-\cos x) + \int 9e^{3x}(-\cos x)\,dx$$

$$= e^{3x}\operatorname{sen} x + 3e^{3x}\cos x - 9\int e^{3x}\cos x\,dx$$

de donde

$$\int e^{3x}\cos x\,dx + 9\int e^{3x}\cos x\,dx = e^{3x}\operatorname{sen} x + 3e^{3x}\cos x$$

$$10\int e^{3x}\cos x\,dx = e^{3x}\operatorname{sen} x + 3e^{3x}\cos x$$

$$\int e^{3x}\cos x\,dx = \frac{1}{10}\left(e^{3x}\operatorname{sen} x + 3e^{3x}\cos x\right) + C.$$

2. Calcular $\int e^{2x}\operatorname{sen} 6x\,dx$.

Solución:
Llamamos:

$$u = e^{2x} \qquad dv = \operatorname{sen} 6x\,dx$$

y formamos la tabla

u y sus derivadas		dv y sus integrales
e^{2x}	+	sen $6x$
$2e^{2x}$	−	$-\frac{1}{6}\cos 6x$
$4e^{2x}$	+	$-\frac{1}{36}\operatorname{sen} 6x$

Para obtener el resultado, escribimos los productos de las flechas, y por último la integral del producto de lo que aparece en el último renglón:

$$\int e^{2x}\operatorname{sen} 6x\,dx = e^{2x}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x\right) - 2e^{2x}\left(-\frac{1}{36}\operatorname{sen} 6x\right) + \int 4e^{2x}\left(-\frac{1}{36}\operatorname{sen} 6x\right)dx$$

$$= -\frac{1}{6}e^{2x}\cos 6x + \frac{1}{18}e^{2x}\operatorname{sen} 6x - \frac{1}{9}\int e^{2x}\operatorname{sen} 6x\,dx$$

Ejemplos

de donde:

$$\int e^{2x}\,\text{sen}\,6x\,dx+\frac{1}{9}\int e^{2x}\,\text{sen}\,6x\,dx=-\frac{1}{6}e^{2x}\cos 6x+\frac{1}{18}e^{2x}\,\text{sen}\,6x$$

$$\frac{10}{9}\int e^{2x}\,\text{sen}\,6x\,dx=-\frac{1}{6}e^{2x}\cos 6x+\frac{1}{18}e^{2x}\,\text{sen}\,6x$$

$$\int e^{2x}\,\text{sen}\,6x\,dx=\frac{9}{10}\left(-\frac{1}{6}e^{2x}\cos 6x+\frac{1}{18}e^{2x}\,\text{sen}\,6x\right)+C$$

$$\int e^{2x}\,\text{sen}\,6x\,dx=-\frac{3}{20}e^{2x}\cos 6x+\frac{1}{20}e^{2x}\,\text{sen}\,6x+C.$$

Ejercicios

Calcula las siguientes integrales usando el método de integración por partes.

1. $\int x\,\text{sen}\,7x\,dx$
2. $\int \csc^3 x\,dx$
3. $\int \arctan x\,dx$
4. $\int \text{arcsen}\,x\,dx$
5. $\int (\ln x)^2\,dx$
6. $\int 5x\sqrt{x-12}\,dx$
7. $\int \cos^2 x\,dx$
8. $\int x^2\ln x\,dx$
9. $\int x\csc^2 x\,dx$
10. $\int x^3\,\text{sen}\,x\,dx$
11. $\int \left(3x^3+x^2+7\right)e^x\,dx$
12. $\int x^2\cos 2x\,dx$
13. $\int x^6e^x\,dx$
14. $\int \left(x^3+5x^2-3x+3\right)\text{sen}\,3x\,dx$
15. $\int x^2e^{-x}\,dx$
16. $\int x^2\sec^2 x\tan x\,dx$
17. $\int e^{4x}\cos 3x\,dx$
18. $\int (x+4)^3(x-6)^4\,dx$
19. $\int e^{6x}\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\,dx$
20. Calcula el área bajo la gráfica de $f(x)=\text{arccot}\,x$ en el intervalo $[-6,2]$. Ver página 409.
21. Calcula el área entre las gráficas de las funciones $f(x)=\ln x$ y $g(x)=x-2$ en el intervalo $[1,3]$. En este intervalo $f(x)>g(x)$. Ver página 415.
22. Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función $f(x)=\text{sen}\,x$ definida en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$ alrededor del eje X. Ver página 423.
23. Calcula la longitud de la curva $f(x)=x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}$ en el intervalo $[1,4]$. Ver página 417.
24. Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función $f(x)=\ln x$ definida en el intervalo $[2,5]$ alrededor del eje X. Ver página 423.

Integración por sustitución trigonométrica

Calcular $\int\sqrt{16-x^2}\,dx$.

Solución:

Hacemos la sustitución:

$$x=4\,\text{sen}\,t$$

De donde:

$$dx = 4\cos t\, dt$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{16-x^2}\, dx &= \int \sqrt{16-16\,\text{sen}^2 t}\,(4\cos t)\, dt \\
&= 4\int \sqrt{16\left(1-\text{sen}^2 t\right)}(\cos t)\, dt \\
&= 4\int \sqrt{16}\sqrt{1-\text{sen}^2 t}\,(\cos t)\, dt \\
&= 4(4)\int \sqrt{\cos^2 t}\,(\cos t)\, dt \\
&= 16\int (\cos t)(\cos t)\, dt \\
&= 16\int \cos^2 t\, dt \\
&= 16\int \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\
&= 8\int 1+\cos 2t\, dt \\
&= 8\left(t+\frac{1}{2}\text{sen}\, 2t\right)+C \\
&= 8(t+\text{sen}\, t\cos t)+C
\end{aligned}$$

Ahora como

$$\begin{aligned}
x &= 4\,\text{sen}\, t \\
\frac{x}{4} &= \text{sen}\, t \\
\text{arcsen}\frac{x}{4} &= t.
\end{aligned}$$

Con esta información y usando el teorema de Pitágoras, podemos formar el triángulo de la Figura 13.1 con lo que obtenemos que

$$\cos t = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$$

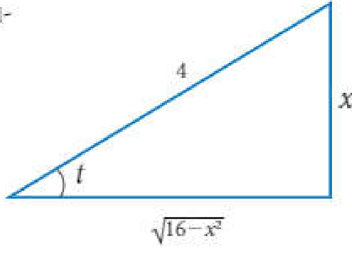


Figura 13.1

de donde

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{16-x^2}\, dx &= 8(t+\text{sen}\, t\cos t)+C \\
&= 8\left(\text{arcsen}\frac{x}{4}+\frac{x}{4}\left(\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}\right)\right)+C \\
&= 8\,\text{arcsen}\frac{x}{4}+\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2}+C.
\end{aligned}$$

TIP

Recuerda:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

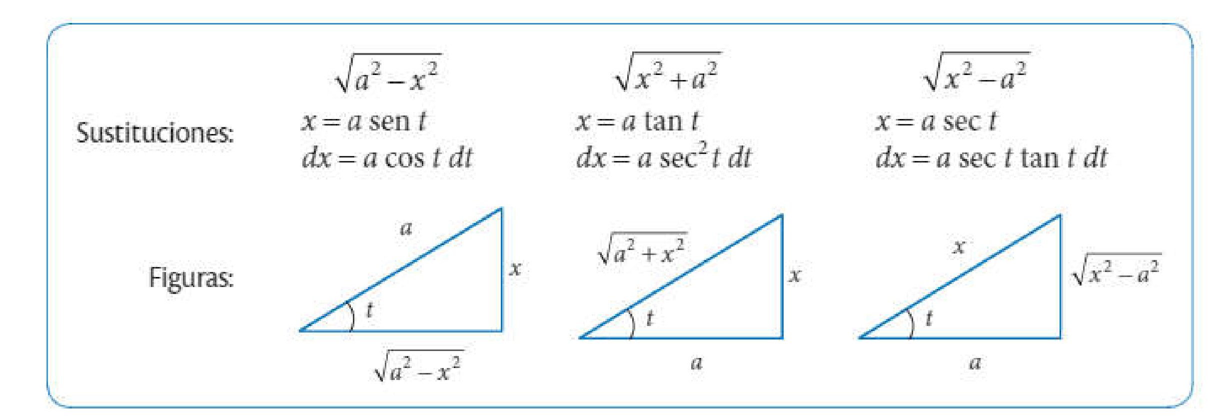
$\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Si en el integrando aparece $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ podemos hacer las siguientes sustituciones:



Ejemplos

1. Calcular $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx$.

Solución:

Hacemos la sustitución:

$$x = 3\sec t$$
$$dx = 3\sec t \tan t\, dt$$

así

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx = \int \frac{3\sec t \tan t}{(3\sec t)^2\sqrt{(3\sec t)^2-9}}dt$$
$$= \frac{3}{9}\int \frac{\tan t}{\sec t\sqrt{9(\sec^2 t-1)}}dt$$
$$= \frac{1}{9}\int \frac{\tan t}{\sec t \tan t}dt$$
$$= \frac{1}{9}\int \cos t\, dt$$
$$= \frac{1}{9}\text{sen}\, t + C.$$

Para sustituir $\text{sen}\, t$ utilizamos la Figura 13.2, entonces:

$$\text{sen}\, t = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$$

de donde

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx = \frac{1}{9}\text{sen}\, t + C$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right) + C$$
$$= \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C.$$

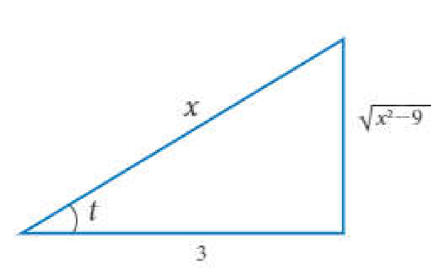


Figura 13.2



¿Cuál debe ser el valor de a para que $\int \frac{x}{\sqrt{25x^2+a^2}}dx = \frac{1}{25}\sqrt{25x^2+4}+C$?

2. Calcular $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+25}}dx$.

Solución:

Primero completamos el cuadrado en el radicando:

$$\begin{aligned} x^2-6x+25 &= x^2-6x+9-9+25 \\ &= (x-3)^2+16 \end{aligned}$$

Entonces la integral que tenemos que calcular es:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+16}}dx$$

Hacemos la sustitución:

$$\begin{aligned} x-3 &= 4\tan t \\ dx &= 4\sec^2 t\,dt \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+16}}dx &= \int \frac{4\sec^2 t}{\sqrt{(4\tan t)^2+16}}dt \\ &= \frac{4}{4}\int \frac{\sec^2 t}{\sqrt{\tan^2 t+1}}dt \\ &= \int \frac{\sec^2 t}{\sec t}dt \\ &= \int \sec t\,dt \\ &= \ln(\sec t+\tan t)+C. \end{aligned}$$

Para sustituir $\sec t$ utilizamos la Figura 13.3, entonces:

$$\sec t = \frac{\sqrt{(x-3)^2+16}}{4}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+16}}dx &= \ln(\sec t+\tan t)+C \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{(x-3)^2+16}}{4}+\frac{x-3}{4}\right)+C \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+25}}{4}+\frac{x-3}{4}\right)+C. \end{aligned}$$

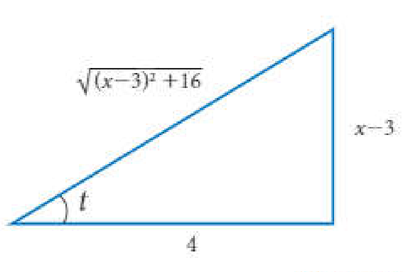


Figura 13.3



Encontrar $f(x)$ si $f'(x)=\dfrac{2x}{x^4-2x^2+2}$ y $f(0)=-\dfrac{\pi}{4}$.

3. $\displaystyle\int \frac{x}{8+2x-x^2}dx.$

Solución:

Primero completamos el cuadrado en el denominador:

$$\begin{aligned}8+2x-x^2&=8-\left(x^2-2x\right)\\&=8-\left(x^2-2x+1\right)+1\\&=9-(x-1)^2\end{aligned}$$

Entonces la integral que tenemos que calcular es:

$$\int \frac{x}{9-(x-1)^2}dx.$$

Aunque en el integrando no aparecen raíces, es conveniente introducir funciones trigonométricas y aprovechar las relaciones que existen entre ellas. Por esto hacemos la sustitución

$$x-1=3\operatorname{sen}t$$
$$dx=3\cos t\,dt$$

así

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{9-(x-1)^2}dx&=\int \frac{(3\operatorname{sen}t+1)3\cos t}{9-9\operatorname{sen}^2 t}dt\\&=\int \frac{(3\operatorname{sen}t+1)3\cos t}{9\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)}dt\\&=\frac{3}{9}\int \frac{(3\operatorname{sen}t+1)\cos t}{\cos^2 t}dt\\&=\frac{1}{3}\int \frac{3\operatorname{sen}t+1}{\cos t}dt\\&=\frac{1}{3}\int \frac{3\operatorname{sen}t}{\cos t}dt+\frac{1}{3}\int \frac{1}{\cos t}dt\\&=\int \frac{\operatorname{sen}t}{\cos t}dt+\frac{1}{3}\int \sec t\,dt\\&=-\ln(\cos t)+\frac{1}{3}\ln(\sec t+\tan t)+C.\end{aligned}$$

Para escribir $\cos t$, $\sec t$ y $\tan t$ en términos de x utilizamos la Figura 13.4, recordando que $x-1=3\operatorname{sen}t$. Entonces:

$$\cos t=\frac{\sqrt{9-(x-1)^2}}{3}$$
$$\tan t=\frac{x-1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}$$
$$\sec t=\frac{3}{\sqrt{9-(x-1)^2}}$$

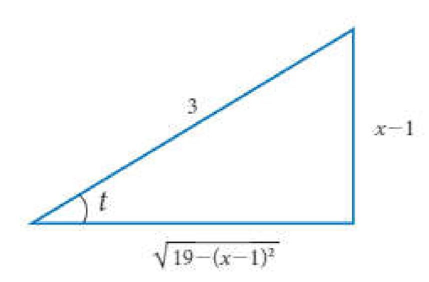


Figura 13.4

de donde

$$\int \frac{x}{9-(x-1)^2}dx = -\ln(\cos t) + \frac{1}{3}\ln(\sec t + \tan t) + C$$

$$= -\ln\left(\frac{\sqrt{9-(x-1)^2}}{3}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{\sqrt{9-(x-1)^2}} + \frac{x-1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\right) + C$$

$$= -\ln\left(\frac{\sqrt{9-(x-1)^2}}{3}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x+2}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\right) + C$$

Ejemplos

Por lo tanto,

$$\int \frac{x}{8+2x-x^2}dx = -\ln\left(\frac{\sqrt{8+2x-x^2}}{3}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x+2}{\sqrt{8+2x-x^2}}\right) + C.$$

Ejercicios

Calcula las siguientes integrales utilizando sustitución trigonométrica.

1. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

2. $\int \sqrt{x^2+49}\,dx$

3. $\int \sqrt{x^2-64}\,dx$

4. $\int \sqrt{81-x^2}\,dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}dx$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{144-x^2}}dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$

8. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{3x^2}dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12x+37}}$

11. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-6x+45}}dx$

12. $\int \frac{x}{\sqrt{8x-x^2}}dx$

13. $\int \frac{1}{\left(\sqrt{x^2-4x+20}\right)^3}dx$

14. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-10x-11}}dx$

15. $\int \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-\frac{3}{2}}dx$

16. $\int \frac{x+\frac{5}{2}}{\sqrt{6-5x-x^2}}dx$

17. $\int \frac{x+\frac{9}{2}}{\sqrt{x^2+9x+\frac{181}{4}}}dx$

18. $\int \frac{x+8}{\sqrt{13+12x-x^2}}dx$

19. $\int \frac{x}{x^2-3x+\frac{25}{4}}dx$

20. Calcula la longitud de la curva $f(x)=x^2$ en el intervalo $[2,8]$. Ver página 417.

21. Calcula el área del semicírculo superior con centro en el origen y radio 5. Ver página 409.

22. Comprueba que el área del círculo de radio r es $A=\pi r^2$, usando $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$. Ver página 409.

23. Calcula el volumen del sólido de revolución generado al girar la gráfica de la función $f(x)=\sqrt[4]{x^2+5x-\frac{11}{4}}$ alrededor del eje x en el intervalo $[5,10]$. Ver página 423.

24. Comprueba que el volumen de una esfera de radio r es $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, girando la función $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ en el intervalo $[-r,r]$. Ver página 423.

Ejercicios

25. Calcula el área de la región sombreada de la Figura 13.5. Ver página 415.

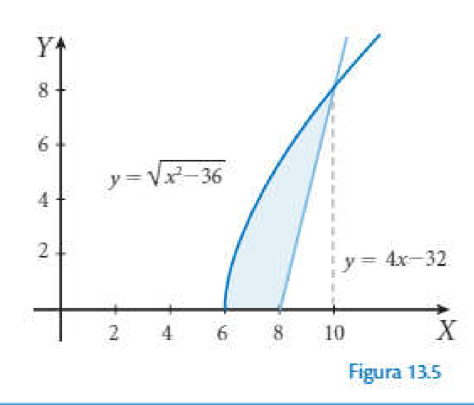


Figura 13.5

Integración por fracciones parciales

Si queremos calcular $\int h(x)\,dx$ donde $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x)$ y $g(x)$ polinomios, utilizamos el método de integración por fracciones parciales. Para utilizar dicho método, en el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, el grado de $f(x)$ tiene que ser menor que el de $g(x)$. En caso contrario, primero realizamos la división.

Caso 1 El denominador es un producto de factores de grado uno, distintos entre sí

Calcular $\int \dfrac{1}{x(x-3)}dx$.

Solución:
Escribimos

$$\frac{1}{x(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}$$

multiplicando por $x(x-3)$ tenemos

$$1=A(x-3)+Bx$$

de donde

$$\begin{aligned}1&=Ax-3A+Bx\\&=(A+B)x-3A\end{aligned}$$

Entonces planteamos el sistema:

$$\begin{aligned}A+B&=0\\-3A&=1\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}A&=-B\\A&=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

de donde $B=\dfrac{1}{3}$.

Así

$$\frac{1}{x(x-3)}=\frac{-\frac{1}{3}}{x}+\frac{\frac{1}{3}}{(x-3)}$$
$$=-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3(x-3)}$$

de manera que:

$$\int\frac{1}{x(x-3)}dx=\int-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3(x-3)}dx$$
$$=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-3}dx$$
$$=-\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{3}\ln(x-3)+C$$

Por lo tanto

$$\int\frac{1}{x(x-3)}dx=-\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{3}\ln(x-3)+C.$$

Si queremos calcular $\int h(x)\,dx$ donde $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x)$ y $g(x)$ polinomios y

$$g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

donde cada $(x-a_i)$ es un polinomio de grado uno y todos estos polinomios son distintos entre sí, entonces podemos encontrar constantes A_i tales que:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

Así

$$\int h(x)\,dx=\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$$
$$=\int\frac{A_1}{x-a_1}dx+\int\frac{A_2}{x-a_2}dx+\cdots+\int\frac{A_n}{x-a_n}dx$$
$$=A_1\ln(x-a_1)+A_2\ln(x-a_2)+\cdots+A_n\ln(x-a_n)+C.$$



1. $\int\frac{3x^2-5x+1}{x(x+1)(x-2)}dx.$

Solución:
Escribimos:

$$\frac{3x^2-5x+1}{x(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

multiplicamos la igualdad por $x(x+1)(x-2)$, entonces;

$$3x^2-5x+1=A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1) \qquad (13.1)$$

Una manera de encontrar A, B y C es plantear el sistema de ecuaciones y resolverlo como en el ejemplo introductorio. Sin embargo, podemos facilitar los cálculos de la manera siguiente:

Nos fijamos en las raíces del denominador original, 0, -1 y 2, y los sustituimos en la expresión (13.1):

- Sustituimos $x=2$:

$$3(2)^2-5(2)+1=A(2+1)(2-2)+B(2)(2-2)+C(2)(2+1)$$
$$3=6C$$
$$\frac{1}{2}=C.$$

- Sustituimos $x=-1$:

$$3(-1)^2-5(-1)+1=A(-1+1)(-1-2)+B(-1)(-1-2)+C(-1)(-1+1)$$
$$9=3B$$
$$3=B.$$

- Por último sustituimos $x=0$:

$$3(0)^2-5(0)+1=A(0+1)(0-2)+B(0)(0-2)+C(0)(0+1)$$
$$1=-2A$$
$$-\frac{1}{2}=A.$$

Así $A=-\frac{1}{2}$, $B=3$ y $C=\frac{1}{2}$. De donde:

$$\frac{3x^2-5x+1}{x(x+1)(x-2)}=\frac{-1}{2x}+\frac{3}{x+1}+\frac{1}{2(x-2)}$$

Ahora calculamos la integral:

$$\int\frac{3x^2-5x+1}{x(x+1)(x-2)}dx=\int\frac{-1}{2x}dx+\int\frac{3}{x+1}dx+\int\frac{1}{2(x-2)}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx+3\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-2)}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\ln x+3\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-2)+k$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{3x^2-5x+1}{x(x+1)(x-2)}dx=-\frac{1}{2}\ln x+3\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-2)+k.$$

2. Calcular $\int\frac{3x^3+8x-10}{x^2-2x-8}dx$.

Solución:

En este caso, como el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero hacemos la división

$$\begin{array}{r|l} & 3x \quad +6 \\ \hline x^2-2x-8 & 3x^3 \qquad\quad + \ 8x - 10 \\ & \underline{-3x^3 + 6x^2 + 24x} \\ & \qquad 6x^2 + 32x - 10 \\ & \qquad \underline{-\ 6x^2 + 12x + 48} \\ & \qquad\qquad 44x + 38 \end{array}$$

así

$$\frac{3x^3+8x-10}{x^2-2x-8}=3x+6+\frac{44x+38}{x^2-2x-8}$$

de donde

$$\int\frac{3x^3+8x-10}{x^2-2x-8}dx=\int 3x+6dx+\int\frac{44x+38}{x^2-2x-8}dx$$

Ahora resolvemos la segunda integral. Para ello factorizamos el denominador

$$\int\frac{44x+38}{x^2-2x-8}dx=\int\frac{44x+38}{(x+2)(x-4)}dx$$

de donde

$$\frac{44x+38}{(x+2)(x-4)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-4)}$$

multiplicando por $(x+2)(x-4)$ tenemos

$$44x+38=A(x-4)+B(x+2) \qquad (13.2)$$

Nos fijamos en las raíces del denominador original: 4 y –2.

- Sustituimos $x=4$ en la ecuación (13.2):

$$44(4)+38=A(4-4)+B(4+2)$$
$$214=6B$$
$$\frac{107}{3}=B.$$

- Sustituimos $x=-2$ en la ecuación (13.2):

$$44(-2)+38=A(-2-4)+B(-2+2)$$
$$-50=-6A$$
$$\frac{25}{3}=A.$$

Así $A=\frac{25}{3}$ y $B=\frac{107}{3}$. De donde:

$$\frac{44x+38}{(x+2)(x-4)}=\frac{\frac{25}{3}}{x+2}+\frac{\frac{107}{3}}{x-4}$$

Ahora calculamos la integral:

$$\int \frac{3x^3+8x-10}{x^2-2x-8}dx = \int 3x+6dx + \int \frac{44x+38}{(x+2)(x-4)}dx$$

$$= \int 3x\,dx + \int 6dx + \int \frac{25}{3(x+2)}dx + \int \frac{107}{3(x-4)}dx$$

$$= 3\int x\,dx + 6\int dx + \frac{25}{3}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{107}{3}\int \frac{1}{x-4}dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} + 6x + \frac{25}{3}\ln(x+2) + \frac{107}{3}\ln(x-4) + C$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{3x^3+8x-10}{x^2-2x-8}dx = \frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{25}{3}\ln(x+2) + \frac{107}{3}\ln(x-4) + C.$$

3. Calcular $\int \frac{4x^3-28x^2+4x-28}{(x-3)(x-5)(x+1)}dx.$

Solución:

Como el grado del numerador es igual que el del denominador, primero hacemos la división. Desarrollamos el denominador

$$(x-3)(x-5)(x+1) = x^3-7x^2+7x+15$$

entonces

$$\begin{array}{r|l} & \quad 4 \\ x^3-7x^2+7x+15 & 4x^3-28x^2+4x-28 \\ & \underline{-4x^3+28x^2-28x-60} \\ & \qquad\qquad -24x-88 \end{array}$$

así

$$\frac{4x^3-28x^2+4x-28}{x^3-7x^2+7x+15} = 4 - \frac{24x+88}{x^3-7x^2+7x+15}$$

de donde

$$\int \frac{4x^3-28x^2+4x-28}{(x-3)(x-5)(x+1)}dx = \int 4dx - \int \frac{24x+88}{(x-3)(x-5)(x+1)}dx$$

Ahora resolvemos la segunda integral

$$\int \frac{24x+88}{(x-3)(x-5)(x+1)}dx = 8\int \frac{3x+11}{(x-3)(x-5)(x+1)}dx$$

Consideramos

$$\frac{3x+11}{(x-3)(x-5)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{x+1}$$

multiplicando por $(x-3)(x-5)(x+1)$ tenemos:

$$3x+11 = A(x-5)(x+1) + B(x-3)(x+1) + C(x-3)(x-5) \qquad (13.3)$$

Nos fijamos en las raíces del denominador original: 5, −1 y 3.

- Sustituimos $x=5$ en la ecuación (13.3):

$$3(5)+11=0+B(5-3)(5+1)+0$$
$$26=B(2)(6)$$
$$\frac{26}{12}=B$$
$$\frac{13}{6}=B.$$

- Sustituimos $x=-1$ en la ecuación (13.3):

$$3(-1)+11=0+0+C(-1-3)(-1-5)$$
$$8=C(-4)(-6)$$
$$\frac{8}{24}=C$$
$$\frac{1}{3}=C.$$

- Sustituimos $x=3$ en la ecuación (13.3):

$$3(3)+11=A(3-5)(3+1)+0+0$$
$$20=-8A$$
$$\frac{20}{-8}=A$$
$$-\frac{5}{2}=A.$$

Así $A=-\frac{5}{2}$, $B=\frac{13}{6}$, $C=\frac{1}{3}$, es decir,

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{x+1}=\frac{-\frac{5}{2}}{x-3}+\frac{\frac{13}{6}}{x-5}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

Entonces $\int\frac{4x^3-28x^2+4x-28}{(x-3)(x-5)(x+1)}dx$ es igual a

$$=\int 4dx-8\left(\int\frac{-\frac{5}{2}}{x-3}dx+\int\frac{\frac{13}{6}}{x-5}dx+\int\frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx\right)$$
$$=4\int dx-8\left(-\frac{5}{2}\int\frac{1}{x-3}dx+\frac{13}{6}\int\frac{1}{x-5}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx\right)$$
$$=4x+20\ln|x-3|-\frac{52}{3}\ln|x-5|-\frac{8}{3}\ln|x+1|+k$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{4x^3-28x^2+4x-28}{(x-3)(x-5)(x+1)}dx=4x+20\ln|x-3|-\frac{52}{3}\ln|x-5|-\frac{8}{3}\ln|x+1|+k.$$

Ejemplos

Observación:
Para integrar una función racional en la que el grado de numerador es mayor o igual al del denominador, primero se hace la división y después se integra.

Caso 2 El denominador es un producto de factores de grado uno, algunos de los cuales se repiten

Calcular $\int \frac{8x-7}{(x-1)^2}dx.$

Solución:
Escribimos

$$\frac{8x-7}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$$

de donde

$$8x-7=A(x-1)+B \tag{13.4}$$

Sustituimos $x=1$ en la ecuación (13.4):

$$\begin{aligned}8(1)-7&=A(1-1)+B\\1&=B.\end{aligned}$$

Sustituimos el valor de B en la ecuación (13.4) y tomamos $x=0$:

$$\begin{aligned}8(0)-7&=A(0-1)+1\\-7&=-A+1\\8&=A.\end{aligned}$$

Así $A=8$ y $B=1$. De donde:

$$\frac{8x-7}{(x-1)^2}=\frac{8}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

Ahora calculamos la integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{8x-7}{(x-1)^2}dx&=\int \frac{8}{x-1}dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}dx\\&=8\int \frac{1}{x-1}dx+\int (x-1)^{-2}\,dx\\&=8\ln(x-1)+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C\\&=8\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+C.\end{aligned}$$



¿Cuáles deben ser los valores de A y B para que $\frac{Ax+B}{x^2+x-2}=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$?

Si queremos calcular $\int h(x)\,dx$ donde $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x)$ y $g(x)$ polinomios y g tiene factores de la forma $(x-a)^r$, entonces por cada uno de ellos debemos escribir los sumandos;

$$\frac{B_1}{x-a}+\frac{B_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{B_r}{(x-a)^r}$$

Por ejemplo, si

$$g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_i)^r\cdots(x-a_n)$$

entonces al descomponer el denominador en fracciones parciales debemos tomar la suma

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{B_1}{(x-a_i)}+\cdots+\frac{B_r}{(x-a_i)^r}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

Ejemplos

1. Calcular $\int \dfrac{5x^2-x+12}{x(x+2)^2}dx$.

Solución:
Escribimos

$$\frac{5x^2-x+12}{x(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

de donde

$$5x^2-x+12=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx \qquad (13.5)$$

- Sustituimos $x=-2$ en la ecuación (13.5):

$$5(-2)^2-(-2)+12=A(-2+2)^2+B(-2)(-2+2)+C(-2)$$
$$34=-2C$$
$$-17=C.$$

- Sustituimos $x=0$ en la ecuación (13.5):

$$5(0)^2-(0)+12=A(0+2)^2+B(0)(0+2)+C(0)$$
$$12=4A$$
$$3=A.$$

- Sustituimos los valores de A y C en la ecuación (13.5) y tomamos algún otro valor de x en que resulte sencillo evaluar la expresión, por ejemplo $x=1$:

$$5(1)^2-(1)+12=3(1+2)^2+B(1)(1+2)-17(1)$$
$$16=27+3\mathbf{B}-17$$
$$6=3B$$
$$2=B.$$

Así $A=3$, $B=2$ y $C=-17$. De donde:

$$\frac{5x^2-x+12}{x(x+2)^2}=\frac{3}{x}+\frac{2}{(x+2)}+\frac{-17}{(x+2)^2}$$

Ahora calculamos la integral:

$$\int\frac{5x^2-x+12}{x(x+2)^2}dx=\int\frac{3}{x}dx+\int\frac{2}{(x+2)}dx+\int\frac{-17}{(x+2)^2}dx$$

$$=3\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{1}{(x+2)}dx-17\int(x+2)^{-2}dx$$

$$=3\ln x+2\ln(x+2)-17\frac{(x+2)^{-1}}{-1}+C$$

$$=3\ln x+2\ln(x+2)+\frac{17}{x+2}+C$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{5x^2-x+12}{x(x+2)^2}dx=3\ln x+2\ln(x+2)+\frac{17}{x+2}+C.$$

2. Calcular $\int\frac{6x^3+x+8}{x^3(x+8)}dx.$

Solución:
Escribimos:

$$\frac{6x^3+x+8}{x^3(x+8)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+8}$$

de donde

$$6x^3+x+8=Ax^2(x+8)+Bx(x+8)+C(x+8)+Dx^3 \qquad (13.6)$$

Sustituimos $x=-8$

$$6(-8)^3+(-8)+8=0+0+0+D(-8)^3$$
$$6(-8)^3=(-8)^3D$$
$$6=D.$$

Sustituimos el valor de D en la ecuación (13.6):

$$6x^3+x+8=Ax^2(x+8)+Bx(x+8)+C(x+8)+6x^3 \qquad (13.7)$$

Sustituimos $x=0$, en la ecuación (13.7):

$$8=0+0+C(8)+0$$
$$1=C.$$

y sustituimos este valor en (13.7):

$$6x^3+x+8=Ax^2(x+8)+Bx(x+8)+x+8+6x^3$$

de donde

$$6x^3+x+8=(A+6)x^3+(8A+B)x^2+(8B+1)x+8$$

Podemos evaluar en dos valores de x y resolver el sistema de ecuaciones simultáneas que resulta, o bien proceder del modo siguiente. Igualamos los coeficientes de las potencias correspondientes:

$$A+6=6$$
$$8A+B=0$$
$$8B+1=1$$

y resolvemos este sistema. De donde, $A=0$ y $B=0$.
De esta manera tenemos que $A=0, B=0, C=1, D=6.$
Así

$$\begin{aligned}\int\frac{6x^3+x+8}{x^3(x+8)}dx &= \int\frac{0}{x}dx+\int\frac{0}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^3}dx+\int\frac{6}{x+8}dx\\ &= \int x^{-3}\,dx+6\int\frac{1}{x+8}dx\\ &= \frac{x^{-2}}{-2}+6\ln(x+8)+k\\ &= -\frac{1}{2x^2}+6\ln(x+8)+k\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{6x^3+x+8}{x^3(x+8)}dx=-\frac{1}{2x^2}+6\ln(x+8)+k.$$

3. Calcular $\int\frac{x^3-x^2+1}{(x+3)^2(x-2)}dx.$

Solución:
Como el grado del numerador es igual al grado del denominador, entonces debemos hacemos la división. Para esto, desarrollamos el producto del denominador:

$$\begin{aligned}(x+3)^2(x-2) &= (x^2+6x+9)(x-2)\\ &= x^3+4x^2-3x-18\end{aligned}$$

Hacemos la división:

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ \hline x^3+4x^2-3x-18 & x^3-x^2\qquad+1 \\ & -x^3-4x^2+3x+18 \\ \hline & \quad -5x^2+3x+19 \end{array}$$

de donde

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-x^2+1}{(x+3)^2(x-2)}dx &= \int 1+\frac{-5x^2+3x+19}{(x+3)^2(x-2)}dx\\ &= \int dx+\int\frac{-5x^2+3x+19}{(x+3)^2(x-2)}dx\\ &= x+\int\frac{-5x^2+3x+19}{(x+3)^2(x-2)}dx\end{aligned}$$

Calculamos esta última integral. Escribimos:

$$\frac{-5x^2+3x+19}{(x+3)^2(x-2)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{x-2}$$

De donde:

$$-5x^2+3x+19=A(x+3)(x-2)+B(x-2)+C(x+3)^2 \qquad (13.8)$$

Sustituimos $x=2$ en (13.8):

$$\begin{aligned}-5(2)^2+3(2)+19&=A(2+3)(2-2)+B(2-2)+C(2+3)^2\\ 5&=25C\\ \frac{1}{5}&=C.\end{aligned}$$

Sustituimos $x=-3$ en (13.8):

$$\begin{aligned}-5(-3)^2+3(-3)+19&=A(-3+3)(x-2)+B(-3-2)+C(-3+3)^2\\ -35&=-5B\\ 7&=B.\end{aligned}$$

Sustituimos los valores de $B=7$ y $C=\frac{1}{5}$ en la ecuación (13.8) y tomamos $x=0$:

$$\begin{aligned}-5(0)^2+3(0)+19&=A(0+3)(0-2)+7(0-2)+\frac{1}{5}(0+3)^2\\ 19&=-6A-\frac{61}{5}\\ \frac{156}{5}&=-6A\\ -\frac{26}{5}&=A.\end{aligned}$$

Así

$$\int \frac{x^3-x^2+1}{(x+3)^2(x-2)}dx = x+\int \frac{-5x^2+3x+19}{(x+3)^2(x-2)}dx$$

$$= x+\int \frac{-\frac{26}{5}}{x+3}dx+\int \frac{7}{(x+3)^2}dx+\int \frac{\frac{1}{5}}{x-2}dx$$

$$= x-\frac{26}{5}\int \frac{1}{x+3}dx+7\int (x+3)^{-2}dx+\frac{1}{5}\int \frac{1}{x-2}dx$$

$$= x-\frac{26}{5}\ln(x+3)+7\frac{(x+3)^{-1}}{-1}+\frac{1}{5}\ln(x-2)+k$$

$$= x-\frac{26}{5}\ln(x+3)-\frac{7}{x+3}+\frac{1}{5}\ln(x-2)+k$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3-x^2+1}{(x+3)^2(x-2)}dx = x-\frac{26}{5}\ln(x+3)-\frac{7}{x+3}+\frac{1}{5}\ln(x-2)+k.$$

Ejemplos

Ejercicios

Calcula las siguientes integrales utilizando el método de fracciones parciales.

1. $\int \frac{8x+4}{x(x+2)}dx$

2. $\int \frac{6x-1}{x^2-x-12}dx$

3. $\int \frac{x^2-6x-3}{x^2-9}dx$

4. $\int \frac{x^2+4}{x^2-25}dx$

5. $\int \frac{5x+1}{x^2+5x}dx$

6. $\int \frac{8x+2}{(2x-1)(x+7)}dx$

7. $\int \frac{6x^3+11x^2-167x-152}{x^2+x-30}dx$

8. $\int \frac{4x+24}{3x^2+28x-20}dx$

9. $\int \frac{9x}{(x+3)^2}dx$

10. $\int \frac{x+12}{(x-7)^2}dx$

11. $\int \frac{3x^2+4x-6}{x^2+16x+64}dx$

12. $\int \frac{3x-18}{(x-9)(x-5)^2}dx$

13. $\int \frac{5x^2+x-34}{(x+1)^2(x-4)}dx$

14. $\int \frac{2x^2+3x-1}{x^3-3x^2}dx$

15. $\int \frac{3x^3-5x^2-22x+48}{(x-2)^2x(x-6)}dx$

16. $\int \frac{5x^3+7x^2+2x}{x^3+x^2-x-1}dx$

17. $\int \frac{x^3-2x^2+x-8}{(x-1)^3(x+5)}dx$

18. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x^2-4x+4}}$ alrededor del eje X en el intervalo $[3,9]$. Ver página 423.

19. Calcula la longitud de la curva $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ en el intervalo $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$. Ver la página 417.

20. Calcula el área entre las curvas $f(x)=\frac{3x-4}{(x-1)(x+2)}$ y $g(x)=\frac{2x+3}{x^2+x-2}$ en el intervalo $\left[\frac{3}{2},3\right]$, en el intervalo dado se cumple la desigualdad $f(x)<g(x)$. Ver página 415.

Pensamiento crítico

Usa el método de fracciones parciales para responder: ¿Cuál debe ser el valor de a para que $\int \frac{ax+1}{x^2(x+1)^2}dx$ sea una suma de funciones racionales?

Caso 3 En el denominador hay uno o más factores cuadráticos irreducibles distintos

Calcular $\int \frac{x^3}{(x^2+3)(x^2+4)}dx$.

Solución:

En este caso (x^2+3) y (x^2+4) son irreducibles, es decir, no se pueden escribir como producto de polinomios de grado uno, que es equivalente a decir que no tiene raíces reales o que su discriminante es negativo. Recordemos que el discriminante de $ax^2+bx+c=0$ es b^2-4ac.

En esta situación procedemos de la siguiente manera. Escribimos:

$$\frac{x^3}{(x^2+3)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

de donde

$$\begin{aligned} x^3 &= (Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+3) \\ &= Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+3Cx+Dx^2+3D \\ &= (A+C)x^3+(B+D)x^2+(4A+3C)x+4B+3D \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} A+C&=1 \\ B+D&=0 \\ 4A+3C&=0 \\ 4B+3D&=0 \end{aligned} \tag{13.9}$$

De la segunda ecuación tenemos que $B=-D$. Sustituimos este valor en la cuarta

$$\begin{aligned} 4(-D)+3D&=0 \\ -D&=0. \end{aligned}$$

de donde $D=0$ y $B=0$.
Multiplicamos la primera ecuación de (13.9) por -4 y la sumamos a la tercera:

$$\begin{aligned} -4A-4C&=-4 \\ 4A+3C&=\ \ 0 \\ \hline -C&=-4. \end{aligned}$$

de donde $C=4$ y sustituyendo este valor en la primera ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} A+4&=1 \\ A&=-3. \end{aligned}$$

Entonces;

$$\frac{x^3}{(x^2+3)(x^2+4)}=\frac{-3x}{x^2+3}+\frac{4x}{x^2+4}$$

así

$$\int \frac{x^3}{(x^2+3)(x^2+4)}dx = \int \frac{-3x}{x^2+3}dx + \int \frac{4x}{x^2+4}dx$$
$$= -3\int \frac{x}{x^2+3}dx + 4\int \frac{x}{x^2+4}dx$$
$$= \frac{-3}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx + \frac{4}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx$$
$$= -\frac{3}{2}\ln(x^2+3) + 2\ln(x^2+4) + k$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3}{(x^2+3)(x^2+4)}dx = -\frac{3}{2}\ln(x^2+3) + 2\ln(x^2+4) + k.$$

Si queremos calcular $\int h(x)\,dx$ donde $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x)$ y $g(x)$ polinomios y

$$g(x) = (x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)\cdots(x^2+b_nx+c_n)$$

donde cada $(x^2+b_ix+c_i)$ es un polinomio irreducible y todos estos polinomios son distintos, entonces podemos encontrar constantes A_i, B_i tales que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+b_2x+c_2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{x^2+b_nx+c_n}.$$

TIP

El polinomio ax^2+bx+c es irreducible si su discriminante es menor que cero, es decir, si $b^2-4ac<0$.

Ejemplos

1. Calcular $\int \frac{3x^2+2x+3}{x(x^2+x+3)}dx$.

Solución:

Escribimos:

$$\frac{3x^2+2x+3}{x(x^2+x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+3}$$

de donde

$$3x^2+2x+3 = A(x^2+x+3) + (Bx+C)x$$
$$= Ax^2 + Ax + 3A + Bx^2 + Cx$$
$$= (A+B)x^2 + (A+C)x + 3A$$

Resolvemos el sistema:

$$A+B=3$$
$$A+C=2$$
$$3A=3$$

De la tercera ecuación tenemos que $A=1$. Sustituimos el valor de A en la primera ecuación y despejamos B:

$$1+B=3$$
$$B=2.$$

Sustituimos el valor de A en la segunda ecuación y despejamos C:

$$1+C=2$$
$$C=1.$$

así

$$\frac{3x^2+2x+3}{x\left(x^2+x+3\right)}=\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{x^2+x+3}$$

de donde

$$\int\frac{3x^2+2x+3}{x\left(x^2+x+3\right)}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{2x+1}{x^2+x+3}dx$$
$$=\ln \boldsymbol{x}+\ln\left(x^2+x+3\right)+k$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{3x^2+2x+3}{x\left(x^2+x+3\right)}dx=\ln x+\ln\left(x^2+x+3\right)+k.$$

2. Calcular $\displaystyle\int\frac{3x^3+2x^2+3}{(x-1)^2\left(x^2+3x+4\right)}\,dx.$

Escribimos:

$$\frac{3x^3+2x^2+3}{(x-1)^2\left(x^2+3x+4\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3x+4}$$

de donde

$$3x^3+2x^2+3=A(x-1)\left(x^2+3x+4\right)+B\left(x^2+3x+4\right)+(Cx+D)(\boldsymbol{x}-1)^2$$

Sustituimos $x=1$:

$$3(1)+2(1)+3=0+B\left((1)^2+3(1)+4\right)+0$$
$$8=B(8)$$
$$1=B.$$

Sustituimos $B=1$:

$$3x^3+2x^2+3=A(x-1)\left(x^2+3x+4\right)+x^2+3x+4+(Cx+D)(x-1)^2$$
$$=Ax^3+2Ax^2+Ax-4A+x^2+3x+4+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D$$
$$=(A+C)x^3+(2A-2C+D+1)x^2+(A+C-2D+3)x-4\boldsymbol{A}+D+4$$

Resolvemos el sistema:

$$A+C=3$$
$$2A-2C+D+1=2$$
$$A+C-2D+3=0$$
$$-4A+D+4=3$$

es decir

$$A+C=3 \tag{13.10}$$

$$2A-2C+D=1$$

$$A+C-2D=-3$$

$$-4A+D=-1$$

y despejamos C de la primera ecuación

$$C=3-A. \tag{13.11}$$

Sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$$2A-2(3-A)+D=1 \tag{13.12}$$

$$4A-6+D=1$$

$$4A+D=7$$

Sumando esta última ecuación con la cuarta de (13.10):

$$\begin{array}{r} 4A+D=\ \ 7 \\ -4A+D=-1 \\ \hline 2D=\ \ 6 \end{array} \tag{13.13}$$

de donde $D=3$. Sustituimos este valor de D en la cuarta ecuación de (13.10):

$$-4A+3=-1$$

$$-4A=-4$$

$$A=1.$$

Sustituimos $A=1$ en (13.11) tenemos:

$$C=3-1$$

$$=2.$$

Entonces

$$\frac{3x^3+2x^2+3}{(x-1)^2\left(x^2+3x+4\right)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x+3}{x^2+3x+4}$$

de donde

$$\int\frac{3x^3+2x^2+3}{(x-1)^2\left(x^2+3x+4\right)}dx=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{2x+3}{x^2+3x+4}dx$$

$$=\ln(x-1)+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+\ln\left(x^2+3x+4\right)+k$$

$$=\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+\ln\left(x^2+3x+4\right)+k$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{3x^3+2x^2+3}{(x-1)^2\left(x^2+3x+4\right)}dx=\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+\ln\left(\boldsymbol{x}^2+3x+4\right)+k.$$

Ejemplos

Caso 4 En el denominador hay factores cuadráticos irreducibles, algunos de los cuales se repiten

Calcular $\int \frac{3x^4+6x^2+1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$.

Solución:
Escribimos:

$$\frac{3x^4+6x^2+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}$$

de donde

$$3x^4+6x^2+1=A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)x\left(x^2+1\right)+(Dx+E)x \qquad (13.14)$$

Evaluamos en $x=0$:

$$3(0)+6(0)+1=A\left((0)^2+1\right)^2+\left(B(0)+C\right)(0)\left((0)^2+1\right)+\left(D(0)+E\right)(0)$$
$$1=A$$

Escribimos, como:

$$3x^4+6x^2+1=\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)x\left(x^2+1\right)+(Dx+E)x$$
$$3x^4+6x^2+1=x^4+2x^2+1+Bx^4+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+Ex$$
$$=(1+B)x^4+Cx^3+(2+B+D)x^2+(C+E)x+1$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned}1+B&=3\\C&=0\\2+B+D&=6\\C+E&=0\end{aligned} \qquad (13.15)$$

Como $C=0$ entonces $E=0$ y

$$\begin{aligned}1+B&=3\\B&=2\end{aligned}$$

Sustituimos el valor de B en la tercera ecuación, es decir, en 13.15 y obtenemos:

$$\begin{aligned}2+2+D&=6\\D&=2\end{aligned}$$

Así:

$$\frac{3x^4+6x^2+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

entonces

$$\int \frac{3x^4+6x^2+1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

$$= \ln x + \ln\left(x^2+1\right) + \frac{\left(x^2+1\right)^{-1}}{-1} + C$$

$$= \ln x + \ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{x^2+1} + C$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{3x^4+6x^2+1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx = \ln x + \ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{x^2+1} + C.$$

Si queremos calcular $\int h(x)\,dx$ donde $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x)$ y $g(x)$ polinomios y g tiene factores de la forma $\left(x^2+bx+c\right)^r$, con x^2+bx+c irreducible, por cada uno de ellos debemos escribir los sumandos:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+bx+c\right)^2} + \cdots + \frac{B_rx+C_r}{\left(x^2+bx+c\right)^r}.$$

Por ejemplo, si:

$$g(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots\left(x^2+b_ix+c_i\right)^r\cdots(x-a_n)$$

entonces al descomponer el denominador en fracciones parciales debemos tomar la suma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{B_1x+C_1}{\left(x^2+b_ix+c_i\right)} + \cdots + \frac{B_rx+C_r}{\left(x^2+b_ix+c_i\right)^r} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

Ejemplos

1. Calcular $\int \dfrac{x^3+5x+6}{\left(x^2+4\right)^2}dx.$

Solución:
Escribimos:

$$\frac{x^3+5x+6}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^2}$$

de donde

$$x^3+5x+6 = (Ax+B)\left(x^2+4\right) + Cx + D$$

$$= Ax^3 + Bx^2 + 4Ax + 4B + Cx + D$$

$$= Ax^3 + Bx^2 + (4A+C)x + 4B + D$$

Resolvemos el sistema:

$$A=1$$
$$B=0$$
$$4A+C=5$$
$$4B+D=6$$

Sustituyendo el valor de A en la tercera ecuación y despejando C tenemos:

$$4+C=5$$
$$C=1$$

Sustituyendo el valor de B en la cuarta ecuación tenemos:

$$D=6$$

Así

$$\frac{x^3+5x+6}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{x}{x^2+4}+\frac{x+6}{\left(x^2+4\right)^2}$$

y entonces

$$\int\frac{x^3+5x+6}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{x+6}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\left(x^2+4\right)^2}dx+\int\frac{6}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\left(x^2+4\right)^{-1}}{-1}\right)+6\int\frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}+6\int\frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$

Resolvemos la última integral con sustitución trigonométrica. Hacemos:

$$x=2\tan t$$
$$dx=2\sec^2 t\,dt$$

de donde

$$\int\frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\int\frac{2\sec^2 t}{\left(4\tan^2 t+4\right)^2}dt$$
$$=\frac{2}{16}\int\frac{\sec^2 t}{\left(\tan^2 t+1\right)^2}dt$$
$$=\frac{1}{8}\int\frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}dt$$
$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sec^2 t}dt$$

$$=\frac{1}{8}\int\cos^2 t\,dt$$
$$=\frac{1}{8}\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$
$$=\frac{1}{16}\int 1+\cos 2t\,dt$$
$$=\frac{1}{16}\left(t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t\right)$$
$$=\frac{1}{16}(t+\operatorname{sen}t\cos t).$$

Para encontrar los valores de $\operatorname{sen}t$ y $\cos t$, consideramos la Figura 13.6:

$$\frac{1}{16}(t+\operatorname{sen}t\cos t)=\frac{1}{16}\left(\arctan\frac{x}{2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(\frac{2x}{x^2+4}+\arctan\frac{x}{2}\right)$$

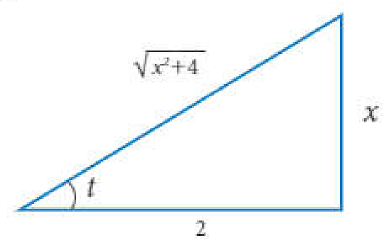


Figura 13.6

Así

$$\int\frac{x^3+5x+6}{\left(x^2+2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}+6\left(\frac{1}{16}\left(\frac{2x}{x^2+4}+\arctan\frac{x}{2}\right)\right)+k$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}+\frac{3}{8}\left(\frac{2x}{\left(x^2+4\right)}+\arctan\frac{x}{2}\right)+k$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}+\frac{3x}{4\left(x^2+4\right)}+\frac{3}{8}\arctan\frac{x}{2}+k$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{3x-2}{4\left(x^2+4\right)}+\frac{3}{8}\arctan\frac{x}{2}+k.$$

Ejemplos

Ejercicios

Calcula las siguientes integrales utilizando fracciones parciales.

1. $\displaystyle\int\frac{-x^2+13x-18}{\left(x^2-4x+5\right)(x-1)}dx$
2. $\displaystyle\int\frac{2x^3+3x^2+3x+6}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+1\right)}dx$
3. $\displaystyle\int\frac{5x^3+16x^2+24x+16}{x^2\left(x^2+3x+4\right)}dx$
4. $\displaystyle\int\frac{x^2-2x-3}{(x+8)\left(x^2+2x+2\right)}dx$
5. $\displaystyle\int\frac{x^3-4x^2+2x+3}{\left(x^2+3\right)\left(x^2-x+1\right)}dx$
6. $\displaystyle\int\frac{x^3-5x+3}{\left(x^2+9\right)^2}dx$
7. $\displaystyle\int\frac{x^3+3x^2+7x+5}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx$
8. $\displaystyle\int\frac{8x^4+2x^3+57x^2+14x+76}{(x+1)\left(x^2+4\right)^2}dx$

9. $\int \frac{3x^5-3x^4+8x^3-4x^2+3x-1}{x^2\left(x^2+1\right)^2}dx$

10. $\int \frac{x^6+2x^5+10x^4+14x^3+33x^2+25x+36}{\left(x^2+3\right)^2\left(x^2+4\right)^2}dx$

11. $\int \frac{3x^4-15x^3+27x^2-22x+2}{(x-2)^3\left(x^2+2\right)}dx$

12. Calcula el área bajo la curva $f(x)=\frac{x^2-2x+8}{x^2\left(x^2+5\right)}$ en el intervalo $\left[\frac{3}{4},4\right]$. Ver página 409.

Ejercicios

Método de Ostrogradski

Calcular $\int \frac{x^3+4x^2+x-4}{\left(x^3+4x\right)^2}dx$.

Solución:

Escribimos:

$$\int \frac{x^3+4x^2+x-4}{\left(x^3+4x\right)^2}dx=\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+4x}+\int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+4x}dx$$

Derivamos ambos miembros de la igualdad anterior:

$$\frac{x^3+4x^2+x-4}{\left(x^3+4x\right)^2}=\frac{(2Ax+B)\left(x^3+4x\right)-\left(3x^2+4\right)\left(Ax^2+Bx+C\right)}{\left(x^3+4x\right)^2}+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+4x}$$

Quitamos denominadores:

$$x^3+4x^2+x-4=(2Ax+B)\left(x^3+4x\right)-\left(3x^2+4\right)\left(Ax^2+Bx+C\right)+\left(Dx^2+Ex+F\right)\left(x^3+4x\right)$$

Evaluamos en $x=0$:

$$-4=-4C$$
$$1=C$$

de donde:

$$x^3+4x^2+x-4=(2Ax+B)\left(x^3+4x\right)-\left(3x^2+4\right)\left(Ax^2+Bx+1\right)+\left(Dx^2+Ex+F\right)\left(x^3+4x\right)$$

Desarrollamos el segundo miembro de la igualdad:

$$Dx^5-Ax^4+Ex^4-2Bx^3+Fx^3+4Dx^3+4Ex^2-3x^2+4Ax^2+4Fx-4$$

agrupamos:

$$Dx^5+(-A+E)x^4+(F+4D-2B)x^3+(4A-3+4E)x^2+4Fx-4$$

Establecemos el sistema de ecuaciones:

$$D=0$$
$$-A+E=0$$
$$-2B+4D+F=1$$
$$4A+4E-3=4$$
$$4F=1$$

Entonces $D=0$. Despejamos F de la última ecuación:

$$F=\frac{1}{4}$$

y sustituimos estos valores en el sistema:

$$\begin{aligned} -A+E&=0 \\ -2B+\frac{1}{4}&=1 \\ 4A+4E&=7 \end{aligned} \qquad \text{de donde} \qquad \begin{aligned} E&=A \\ B&=-\frac{3}{8} \\ 8A&=7 \end{aligned}$$

Entonces, $A=E=\frac{7}{8}$ y $B=-\frac{3}{8}$ y sabíamos que $C=1,\ D=0,\ F=\frac{1}{4}$.
Sustituyendo los valores, tenemos:

$$\begin{aligned} \int\frac{x^3+4x^2-4}{\left(x^3+4x\right)^2}dx &= \frac{\frac{7}{8}x^2-\frac{3}{8}x+1}{x^3+4x}+\int\frac{\frac{7}{8}x+\frac{1}{4}}{x^3+4x}dx \\ &= \frac{\frac{7}{8}x^2-\frac{3}{8}x+1}{x^3+4x}+\frac{7}{8}\int\frac{x}{x^3+4x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^3+4x}dx \\ &= \frac{\frac{7}{8}x^2-\frac{3}{8}x+1}{x^3+4x}+\frac{7}{8}\int\frac{1}{x^2+4}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^3+4x}dx. \end{aligned}$$

Calculamos las integrales usando sustitución trigonométrica:

$$x=2\tan t$$
$$dx=2\sec^2 t\,dt$$

de donde

$$\begin{aligned} \int\frac{1}{x^2+4}dx &= \int\frac{2\sec^2 t}{4\tan^2 t+4}dt \\ &= \frac{2}{4}\int\frac{\sec^2 t}{\tan^2 t+1}dt \\ &= \frac{1}{4}\int\frac{\sec^2 t}{\sec^2 t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int dt \\ &= \frac{1}{2}t \\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int\frac{1}{x^3+4x}dx &= \int\frac{1}{x\left(x^2+4\right)}dx \\ &= \int\frac{2\sec^2 t}{2\tan t\left(4\tan^2 t+4\right)}dt \\ &= \frac{1}{4}\int\frac{\sec^2 t}{\tan t\sec^2 t}dt \\ &= \frac{1}{4}\int\frac{1}{\tan t}dt \\ &= \frac{1}{4}\int\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}dt \\ &= \frac{1}{4}\ln(\operatorname{sen} t) \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right) \end{aligned}$$

TIP

Mijail Vasilievich Ostrogradski (1801-1861) fue un físico y matemático ucraniano. Sus investigaciones más importantes fueron en hidromecánica y teoría de la elasticidad.

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3+4x^2-4}{\left(x^3+4x\right)^2}dx = \frac{\frac{7}{8}x^2-\frac{3}{8}x+1}{x^3+4x}+\frac{7}{8}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)\right)+k$$

$$=\frac{\frac{7}{8}x^2-\frac{3}{8}x+1}{x^3+4x}+\frac{7}{16}\arctan\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)+k.$$

Ejemplo

1. Calcular $\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}dx$.

Solución:

Escribimos

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}+\int \frac{Ex+F}{x^2+1}dx$$

derivamos ambos miembros de la igualdad anterior:

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\left(x^2+1\right)^2-\left(2\left(x^2+1\right)\right)2x\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)}{\left(x^2+1\right)^4}+\frac{Ex+F}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\left(x^2+1\right)-4x\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{Ex+F}{x^2+1}$$

Quitamos denominadores:

$$1=-Ax^4-2Bx^3+(-3C+3A)x^2+(2B-4D)x+C+(Ex+F)\left(x^2+1\right)^2$$

$$1=Ex^5+(-A+F)x^4+(-2B+2E)x^3+(3A-3C+2F)x^2+(2B-4D+E)x+C+F$$

Establecemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} E&=0\\ -A+F&=0\\ -2B+2E&=0\\ 3A-3C+2F&=0\\ 2B-4D+E&=0\\ C+F&=1 \end{aligned}$$

Como $E=0$ entonces, $B=0$ sustituimos en las ecuaciones del sistema:

$$\begin{aligned} -A+F&=0\\ 3A-3C+2F&=0\\ -4D&=0\\ C+F&=1 \end{aligned}$$

De donde $F=A$ y $D=0$, sustituimos este valor de A en la segunda:

$$5F-3C=0$$
$$C+F=1$$

De la última ecuación, despejamos F, es decir, $F=1-C$. Sustituimos este valor en la primera ecuación:

$$5(1-C)-3C=0$$
$$5-8C=0$$
$$C=\frac{5}{8}.$$

Sustituimos el valor de C en $F=1-C$:

$$F=1-\frac{5}{8}$$
$$F=\frac{3}{8}.$$

De donde $A=\frac{3}{8}, B=0, C=\frac{5}{8}, D=0, E=0, F=\frac{3}{8}$; es decir,

$$\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}dx=\frac{\frac{3}{8}x^3+\frac{5}{8}x}{\left(x^2+1\right)^2}+\int\frac{\frac{3}{8}}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{\frac{3}{8}x^3+\frac{5}{8}x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{8}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{\frac{3}{8}x^3+\frac{5}{8}x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{8}\arctan x+k.$$

Ejemplo

A partir de ejemplo introductorio y el recién visto, damos la fórmula que hay que plantear en el método de Ostrogradski:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$$

donde: $Q_1(x)$ se forma reduciendo en 1 el exponente al que está elevado cada uno de los polinomios irreducibles que forman $Q(x)$ y multiplicando los nuevos factores así obtenidos.

Ejemplo introductorio:

$$Q(x)=x^2\left(x^2+4\right)^2;\ Q_1(x)=x^{2-1}\left(x^2+4\right)^{2-1}=x\left(x^2+4\right).$$

Ejemplo 1:

$$Q(x)=\left(x^2+1\right)^3;\ Q_1(x)=\left(x^2+1\right)^{3-1}=\left(x^2+1\right)^2.$$

$Q_2(x)$ se forma multiplicando los factores irreducibles de $Q(x)$ elevados a la potencia 1.

Ejemplo introductorio:

$$Q(x)=x^2\left(x^2+4\right)^2;\quad Q_2(x)=x^1\left(x^2+4\right)^1=x\left(x^2+4\right).$$

Ejemplo 1:

$$Q(x)=\left(x^2+1\right)^3;\quad Q_2(x)=\left(x^2+1\right)^1=\left(x^2+1\right).$$

El polinomio P_1 es de grado uno menor que Q_1 y el polinomio P_2 es de grado uno menor que Q_2.

Teorema de Chebyshev

Calcular $\int \frac{1}{x\sqrt{x+9}}dx$.

Solución:
Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x+9}=t$$
$$x+9=t^2$$
$$x=t^2-9$$

de donde

$$dx=2t\,dt$$

Así:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+9}}dx=\int \frac{2t}{\left(t^2-9\right)t}dt$$
$$=\int \frac{2}{t^2-9}dt.$$

Hacemos el cambio de variable:

$$t=3\sec u$$
$$dt=3\sec u\tan u\,du$$

De manera que

$$\int \frac{2}{t^2-9}dt=2\int \frac{3\sec u\tan u}{9\sec^2 u-9}du$$
$$=2\int \frac{3\sec u\tan u}{9\tan^2 u}du$$
$$=\frac{2}{3}\int \frac{\sec u}{\tan u}du$$
$$=\frac{2}{3}\int \frac{1}{\operatorname{sen} u}du$$
$$=\frac{2}{3}\int \csc u\,du$$
$$=-\frac{2}{3}\ln\left|\csc u+\cot u\right|+C.$$

Utilizamos el triángulo de la Figura 13.7 para escribir a $\csc u$ y $\cot u$ en función de t de donde:

$$\int \frac{2}{t^2-4}dt = -\frac{2}{3}\ln\left|\csc u + \cot u\right| + C$$

$$= -\frac{2}{3}\ln\left|\frac{t}{\sqrt{t^2-9}} + \frac{3}{\sqrt{t^2-9}}\right| + C$$

$$= -\frac{2}{3}\ln\left|\frac{t+3}{\sqrt{t^2-9}}\right| + C$$

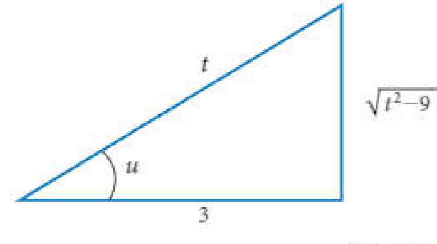


Figura 13.7

Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x+4}}dx = -\frac{2}{3}\ln\left|\frac{t+3}{\sqrt{t^2-9}}\right| + C$$

$$= -\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x}}\right| + C.$$

La integral $\int \frac{1}{x\sqrt{x+9}}dx$ del ejemplo introductorio es de la forma:

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx \text{ donde } m=-1, n=1, p=\frac{1}{2}, a=9 \text{ y } b=1$$

Las integrales binomiales que son de la forma:

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx.$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ y $m, n, p \in \mathbb{Q}$, tienen *una* primitiva expresada por funciones de uso corriente solo en cualquiera de los siguientes casos:

- $p \in \mathbb{Z}$.
- $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$.
- $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$.

Esto es llamado el Teorema de Chebyshev sobre diferenciales binomiales.

En la integral $\int \sqrt{1+x^4}\,dx$ se tiene que $m=0, n=4$, $p=\frac{1}{2}$. Entonces ninguna de las condiciones del teorema de Chebyshev se cumple, ya que

$$p = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$\frac{m+1}{n} = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$$

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, $\int \sqrt{1+x^4}\,dx$ no tiene primitiva expresable en términos de funciones de uso corriente.

TIP

Pafnuti Lvovich Chebyshev (1821-1894). Matemático ruso conocido por sus aportaciones a la probabilidad y la estadística.

Ejemplos

1. Calcular $\int \frac{x^7}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

Solución:
Como

$$\int \frac{x^7}{\sqrt{x^4-1}}dx = \int x^7\left(x^4-1\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

es una integral de la forma

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

donde $m=7,\ n=4,\ p=-\frac{1}{2},$ entonces;

$$\frac{m+1}{n}=\frac{7+1}{4}=2\in\mathbb{Z}$$

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^4-1}&=t\\ x^4-1&=t^2\\ x^4&=t^2+1\\ x&=\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}dx&=\frac{1}{4}\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{4}}(2t)\,dt\\ &=\frac{1}{2}t\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{4}}dt\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^7}{\sqrt{x^4-1}}dx&=\int \frac{\left(t^2+1\right)^{\frac{7}{4}}}{t}\left(\frac{1}{2}t\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{4}}\right)dt\\ &=\frac{1}{2}\int t^2+1\,dt\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)+C.\end{aligned}$$

Para obtener el resultado en términos de x, escribimos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)+C=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{x^4-1}\right)^3}{3}+\sqrt{x^4-1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(x^4-1\right)\frac{\sqrt{x^4-1}}{3}+\sqrt{x^4-1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^4-1}\left(\frac{x^4-1}{3}+1\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^4-1}\left(\frac{x^4-1+3}{3}\right)+C.$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{x^4-1}\left(x^4+2\right)+C$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{x^7}{\sqrt{x^4-1}}dx=\frac{1}{6}\sqrt{x^4-1}\left(x^4+2\right)+C.$$

2. Calcular $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}}$.

Solución:
Como

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}}=\int x^{-2}\left(25-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

es una integral de la forma

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

donde $m=-2,\ n=2,\ p=-\frac{1}{2}$, entonces

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{2}-\frac{1}{2}=-1\in\mathbb{Z}$$

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{25-x^2}=t$$

$$25-x^2=t^2$$

$$25-t^2=x^2$$

de donde

$$-2t\,dt=2x\,dx$$

$$-t\,dt=x\,dx$$

$$\frac{-t}{\sqrt{25-t^2}}dt=dx$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}} = \int \frac{\frac{-t}{\sqrt{25-t^2}}}{\left(25-t^2\right)t}dt$$

$$= \int \frac{-1}{\left(25-t^2\right)\sqrt{25-t^2}}dt$$

$$= -\int \frac{1}{\left(25-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}dt.$$

Para resolver esta última integral, usamos la sustitución trigonométrica

$$t = 5\operatorname{sen} u$$
$$dt = 5\cos u\, du$$

Así;

$$\int \frac{1}{\left(25-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}dt = \int \frac{5\cos u}{\left(25-25\operatorname{sen}^2 u\right)^{\frac{3}{2}}}du$$

$$= \int \frac{5\cos u}{\left(25\cos^2 u\right)^{\frac{3}{2}}}du$$

$$= \frac{5}{5^3}\int \frac{\cos u}{\cos^3 u}du$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{1}{\cos^2 u}du$$

$$= \frac{1}{25}\int \csc^2 u\, du$$

$$= -\frac{1}{25}\cot u$$

Para escribir el resultado de la integral en función de t utilizamos el triángulo de la Figura 13.8.

Sabemos que:

$$\cot u = \frac{\sqrt{25-t^2}}{t}, \qquad \text{de donde} \qquad \int \frac{1}{\left(25-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}dt = -\frac{1}{25}\frac{\sqrt{25-t^2}}{t} + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}} = -\int \frac{1}{\left(25-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$= -\frac{1}{25}\frac{\sqrt{25-t^2}}{t}$$

$$= -\frac{1}{25}\frac{x}{\sqrt{25-x^2}} + C.$$

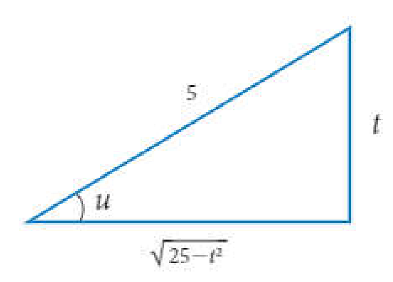


Figura 13.8

3. Calcular $\int \frac{\left(x^4+3\right)^2}{x^3}dx$.

Solución:
Como:

$$\int \frac{\left(x^4+3\right)^2}{x^3}dx = \int \left(x^4+3\right)^2 x^{-3}\,dx$$

es una integral de la forma,

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

donde $m=-3$, $n=4$, $p=2$, entonces

$$p=2\in\mathbb{Z}$$

y la integral se puede calcular.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{\left(x^4+3\right)^2}{x^3}dx &= \int \frac{x^8+6x^4+9}{x^3}dx\\ &= \int x^5+6x+9x^{-3}\,dx\\ &= \int x^5\,dx + 6\int x\,dx + 9\int x^{-3}\,dx\\ &= \frac{x^6}{6}+6\left(\frac{x^2}{2}\right)+9\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)+C\\ &= \frac{x^6}{6}+3x^2-\frac{9}{2x^2}+C.\end{aligned}$$

4. Determinar si $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$ tiene una primitiva expresada por funciones de uso corriente.

Solución:
Hacemos el cambio de variable:

$$\operatorname{sen} x = t^2, \qquad \text{de donde} \qquad \cos x\,dx = 2t\,dt$$

$$dx = \frac{2t}{\cos x}dt$$

Utilizamos el triángulo de la Figura 13.9 para expresar $\cos x$ en términos de t, así:

$$dx = \frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}dt$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx &= \int t\left(\frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}\right)dt\\ &= \int 2t^2\left(1-t^4\right)^{-\frac{1}{2}}dt\end{aligned}$$

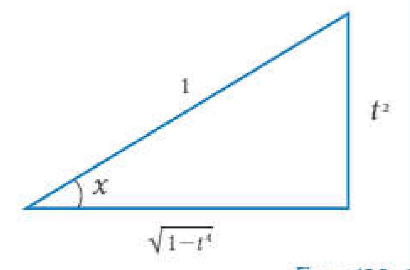


Figura 13.9



Calcular $\int \sqrt[3]{x^4+9}\,dx$.

Ejemplos

hemos obtenido una integral de la forma

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

donde $m=2,\ n=4,\ p=-\frac{1}{2}$, entonces;

$$p=-\frac{1}{2}\notin \mathbb{Z}$$

$$\frac{m+1}{n}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}\notin \mathbb{Z}$$

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\notin \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$ no tiene una primitiva expresada por funciones de uso corriente.

Ejercicios

Calcula las siguientes integrales.

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{x-5}}dx$
2. $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+4}}dx$
3. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}dx$
4. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{36-x^2}}$
5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

Integrales con productos de funciones trigonométricas

Calcular $\int \operatorname{sen}^5 x\cos x\,dx$.

Solución:

Hacemos la sustitución:

$$u=\operatorname{sen} x$$

$$du=\cos x\,dx$$

entonces:

$$\int \operatorname{sen}^5 x\cos x\,dx=\int u^5\,du=\frac{u^6}{6}+C$$

Escribimos el resultado en términos de x:

$$\frac{u^6}{6}+C=\frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}+C$$

De donde;

$$\int \operatorname{sen}^5 x\cos x\,dx=\frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}+C.$$

Si el integrando es de la forma $\operatorname{sen}^n x\cos x$ o $\operatorname{sen} x\cos^n x$, la integral se resuelve haciendo la sustitución $u=\operatorname{sen} x$ en el primer caso y $u=\cos x$ en el segundo.

Si n o m es impar:
En general, si alguno de n o m es impar, es posible usar alguna de las sustituciones anteriores para calcular una integral de la forma $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$, escribiendo $\operatorname{sen}^n x = \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x$ si n es impar.

TIP

- Para calcular $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$ con n impar, se escribe $\operatorname{sen}^n x = \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x$ y después se utiliza $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.
- $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$ con m impar, se escribe $\cos^m x = \cos^{m-1} x \cos x$ y después se utiliza $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.

Ejemplos

1. Calcular $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx$.

Solución:
Escribimos la integral como:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx = \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$$

y sustituimos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, entonces

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx &= \int \operatorname{sen} x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen} x \cos^4 x - \operatorname{sen} x \cos^2 x \cos^4 x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen} x \cos^4 x - \operatorname{sen} x \cos^6 x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen} x \cos^4 x\, dx - \int \operatorname{sen} x \cos^6 x\, dx \\
&= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

2. Calcular $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^5 x\, dx$.

Solución:
Escribimos la integral como:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^5 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^5 x \cos^4 x \cos x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen}^5 x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^2 \cos x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen}^5 x\left(1-2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x\right)\cos x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen}^5 x \cos x - 2\operatorname{sen}^7 x \cos x + \operatorname{sen}^9 x \cos x\, dx \\
&= \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} - 2\left(\frac{\operatorname{sen}^8 x}{8}\right) + \frac{\operatorname{sen}^{10} x}{10} + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{sen}^8 x}{4} + \frac{\operatorname{sen}^{10} x}{10} + C
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^5 x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{sen}^8 x}{4} + \frac{\operatorname{sen}^{10} x}{10} + C.$$

TIP

Para calcular $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx$ con n y m son pares, se utilizan las identidades $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Si n y m son pares:

Cuando ambos, n y m son pares, la solución se encuentra usando las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

1. Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

Solución:

Puesto que: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

entonces:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx &= \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

2. Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$.

Solución:

Puesto que:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx &= \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\boldsymbol{dx} \\ &= \frac{1}{4}\int 1-\cos^2 2x\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 2(2x)}{2}dx \\ &= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx \\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\left(\boldsymbol{x} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right) \\ &= \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x.\end{aligned}$$

Algunas potencias de las otras funciones trigonométricas las veremos a continuación.

Ejemplos

1. Calcular $\int \tan^4 x\,dx$.

Solución:
Escribimos la integral como:

$$\int \tan^4 x\,dx = \int \tan^2 x \tan^2 x\,dx$$

de donde

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \tan^2 x\,dx &= \int \tan^2 x\left(\sec^2 x - 1\right)dx\\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x\,dx\\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx - \int \tan^2 x\,dx\\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \int \sec^2 x - 1\,dx\\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - (-x + \tan x) + C\\ &= \frac{\tan^3 x}{3} + x - \tan x + C\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \tan^4 x\,dx = \frac{\tan^3 x}{3} + x - \tan x + C.$$

2. Calcular $\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx$.

Solución:
Escribimos la integral como:

$$\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx = \int \tan^2 x \tan x \sec^3 x\,dx$$

de donde

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \tan x \sec^3 x\,dx &= \int \left(\sec^2 x - 1\right)\tan x \sec^3 x\,dx\\ &= \int \sec^2 x \tan x \sec^3 x - \tan x \sec^3 x\,dx\\ &= \int \sec^5 x \tan x - \tan x \sec^3 x\,dx\\ &= \int \sec^4 x \sec x \tan x\,dx - \int \tan x \sec x \sec^2 x\,dx\\ &= \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C.$$

TIP

$\int \tan^n x\,dx$ con n impar, escribimos $\tan^n x = \tan^{n-1} x \tan x$ y usamos $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

$\int \tan^n x\,dx$ con n par, escribimos $\tan^n x = \tan^{n-2} x \tan^2 x$ y usamos $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

TIP

$\int \tan^n x \sec^m x\,dx$ con m impar, escribimos $\sec^m x = \sec^{m-1} x \sec x$, usamos $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ y luego integramos por partes.

$\int \tan^n x \sec^m x\,dx$ con m par, escribimos $\sec^m x = \sec^{m-2} x \sec^2 x$ y usamos $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Ejemplos

3. Calcular $\int \csc^4 x\,dx$.

Solución:
Escribimos la integral como:

$$\int \csc^4 x\,dx = \int \csc^2 x \csc^2 x\,dx$$

de donde

$$\begin{aligned}\int \csc^2 x \csc^2 x\,dx &= \int \csc^2 x\left(1+\cot^2 x\right)dx\\ &= \int \csc^2 x + \csc^2 \boldsymbol{x} \cot^2 x dx\\ &= -\cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \csc^4 x\,dx = -\frac{\cot^3 x}{3} - \cot x + C.$$

Ejercicios

Calcula las siguientes integrales.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx$

2. $\int \operatorname{sen} x \cos^7 x\,dx$

3. $\int \operatorname{sen}^9 x \cos^3 x\,dx$

4. $\int \cos^5 x\,dx$

5. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$

6. $\int \cos^2 x\,dx$

7. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx$

8. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\,dx$

9. $\int \tan^3 x\,dx$

10. $\int \tan^3 x \sec^4 x\,dx$

11. $\int \cot^3 x \csc^3 x\,dx$

12. $\int \csc^4 x\,dx$

13. $\int \cot^4 x\,dx$

14. $\int \csc^3 x \operatorname{sen}^6 x\,dx$

15. $\int \tan^3 x \cot^5 x\,dx$

16. $\int \frac{\cos^2 x}{\sec^5 x}dx$

17. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sec^4 x}dx$

18. $\int \frac{\tan^3 x}{\sec^5 x}dx$

19. Calcula la longitud de la curva $f(x)=\ln(\cos x)$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. Ver página 417.

20. Calcula el área entre las curvas $f(x)=\operatorname{sen}^3 x$ y $g(x)=\cos^3 x$ en el intervalo $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. Ver página 415.

21. Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$ definida en el intervalo $[\pi,2\pi]$ alrededor del eje X. Ver página 423.

Mundo virtual

En esta sección te invitamos a visitar varios sitios que contienen material relacionado con métodos de integración. Algo de esa información está desarrollada por los autores de este libro, pero mucha más ha sido elaborada por personas de todo el mundo que tienen interés en las matemáticas.

- http://atenea.matem.unam.mx Éste es un sitio del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en el cual los investigadores del Instituto están creando material para cursos en línea. Puedes entrar como invitado sin necesidad de registrarte. Una vez dentro del sitio, elige la categoría "Cálculo Diferencial e Integral", dentro de ella, el curso "Cálculo I" y entra a las lecciones de la sección "Métodos de integración".
- http://newton.matem.unam.mx/arquimedes En este sitio hay muchos interactivos de matemáticas para bachillerato, que explican cómo resolver problemas muy puntuales. Revisa los que corresponden a Cálculo Diferencial e Integral, en particular, los que corresponden a la integral.
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web Sitio del Ministerio de Educación, Salud y Deporte del Gobierno español que contiene unidades didácticas y recursos interactivos desarrollados con la herramienta Descartes. Estos materiales fueron elaborados por profesores de enseñanza media. Selecciona "Aplicaciones", y luego "Análisis" encontrarás varias lecciones relativas al tema de integración que estudiaste en esta unidad.
- http://es.wikipedia.org La enciclopedia en línea Wikipedia es uno de los sitios de referencia para encontrar información relacionada con la ciencia y la cultura. En el buscador escribe: Métodos de Integración. Hojea el documento para ampliar los temas vistos en esta unidad. El material que está en esa página corresponde a ésta y a las siguientes unidades del libro.
- http://www.wolframalpha.com Wolfram Alpha es una aplicación desarrollada por Wolfram Research, los creadores del programa Mathematica.

En la unidad anterior vimos cómo introducir la instrucción para que calcule integrales definidas e indefinidas.

También se le puede indicar que calcule una integral por partes, en este caso, muestra el resultado de

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Por ejemplo:
Integrate by parts $x\sin x$
Da como resultados

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int x\sin x\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin x - \frac{1}{2}\int x^2\cos x\,dx$$

y aparecen unos botones que dicen "Calculate remaining integral" que, al oprimirlos, dan el resultado final

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

- Otra cosa que puede hacerse, relacionada con esta unidad es separar una fracción en fracciones parciales, por ejemplo:
  Partial fraction x^2/(x^2+x+2)
  Da como resultado:

$$\frac{x^2}{x^2+x+2} = \frac{-x-2}{x^2+x+2} + 1.$$

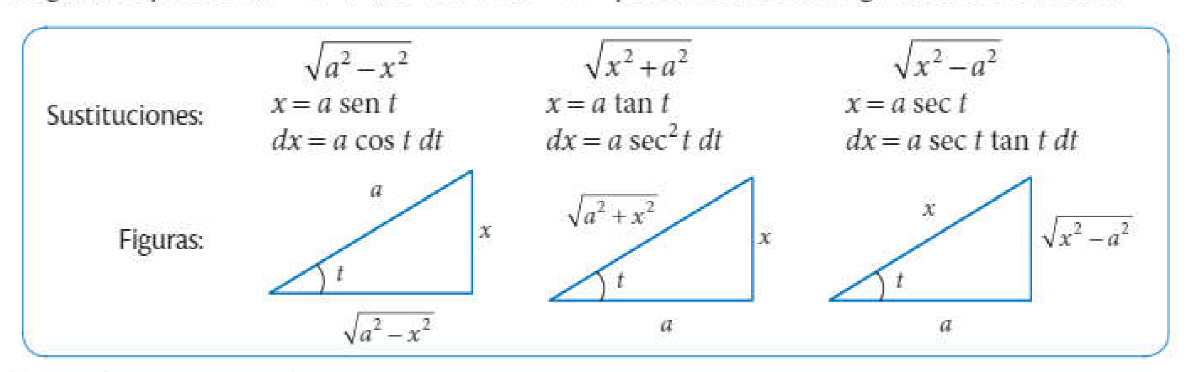
Resumen de la unidad

- Integración por partes:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

- Integración por sustitución trigonométrica.

  Si en el integrando aparece $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ podemos hacer las siguientes sustituciones:



- Integración por fracciones parciales.

  Para calcular $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$, con $f(x)$ y $g(x)$ polinomios y el grado de f menor que el de g consideramos los siguientes casos:

  - Si $g(x)=(x-a_1)(x-a_2) \quad (x-a_n)$ donde cada $(x-a_i)$ es un polinomio de grado uno y todos estos polinomios son distintos, entonces descomponemos el cociente de la siguiente manera:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \quad + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

  - Si $g(x)=(x-a_1)(x-a_2) \quad \boxed{(x-a_i)^r} \quad (x-a_n)$ entonces descomponemos el cociente de la siguiente manera:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \quad + \boxed{\frac{B_1}{(x-a_i)} + \quad + \frac{B_r}{(x-a_i)^r}} + \quad + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

  - Si $g(x)=(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2) \quad (x^2+b_nx+c_n)$ donde cada $(x^2+b_ix+c_i)$ es un polinomio de grado dos irreducible y todos estos polinomios son distintos, entonces descomponemos el cociente de la siguiente manera:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+b_2x+c_2} + \quad + \frac{A_nx+B_n}{x^2+b_nx+c_n}.$$

  - Si $g(x)=(x-a_1)(x-a_2) \quad \boxed{(x^2+b_ix+c_i)^r} \quad (x-a_n)$ entonces descomponemos el cociente de la siguiente manera:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \quad + \boxed{\frac{B_1x+C_1}{(x^2+b_ix+c_i)} + \quad + \frac{B_rx+C_r}{(x^2+b_ix+c_i)^r}} + \quad + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

- Las integrales de la forma $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, con $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$ y $m,n,p\in\mathbb{Q}$, tienen primitiva expresada por funciones de uso corriente solo en cualquiera de los siguientes casos:

- $p \in \mathbb{Z}$.
- $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$.
- $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$.

- Integrales de funciones trigonométricas.
  - $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx$ con n impar, escribimos $\operatorname{sen}^n x = \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x$ y usamos $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
  - $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx$ con m impar, escribimos $\cos^m x = \cos^{m-1} x \cos x$ y usamos $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
  - $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx$ con n y m pares se utilizan las identidades
    $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.
  - $\int \tan^n x \sec^m x\,dx$ con m impar, escribimos $\sec^m x = \sec^{m-1} x \sec x$, usamos $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ y luego integramos por partes.
  - $\int \tan^n x \sec^m x\,dx$ con m par, escribimos $\sec^m x = \sec^{m-2} x \sec^2 x$ y usamos $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.
  - $\int \tan^n x\,dx$ con n impar, escribimos $\tan^n x = \tan^{n-1} x \tan x$ y usamos $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.
  - $\int \tan^n x\,dx$ con n par, escribimos $\tan^n x = \tan^{n-2} x \tan^2 x$ y usamos $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Ejercicios de repaso

Calcula las siguientes integrales.

1. $\int (x^2+3)^2\,dx$
2. $\int \tan^5 x\,dx$
3. $\int \dfrac{x}{x+12}\,dx$
4. $\int \tan^2 x \sec^3 x\,dx$
5. $\int \cot^3 x \csc^3 x\,dx$
6. $\int \dfrac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$
7. $\int \dfrac{5x^2+8x+5}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx$
8. $\int \tan^2 x\,dx$
9. $\int \dfrac{x^3+x^2-81x+250}{x(x-5)^3}\,dx$
10. $\int \dfrac{8x^3+6x+2}{(2x^2+1)^2}\,dx$
11. $\int (x^4+x^2)e^x\,dx$
12. $\int \dfrac{3-\sqrt{x}}{x-9}\,dx$
13. $\int \dfrac{x^2}{x^2-6x+13}\,dx$
14. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x-12}}\,dx$
15. $\int \arccos x\,dx$
16. $\int \dfrac{6x}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$
17. $\int 7x\sqrt{x+8}\,dx$
18. $\int \dfrac{x+2}{\sqrt{-x^2+10x-21}}\,dx$
19. $\int x^2 \sqrt[3]{x+6}\,dx$
20. $\int x^5 e^x\,dx$
21. $\int \dfrac{x^7}{\sqrt{x^4-4}}\,dx$
22. $\int x \csc x \cot x\,dx$
23. Calcular la longitud de la curva $f(x) = \ln x$ en el intervalo $[1,4]$. Ver página 417.
24. Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen} x$ definida en el intervalo $[2\pi, 3\pi]$ alrededor del eje X. Ver página 423.
25. Calcula el área entre las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{x}{2}\ln x$ y $g(x) = \dfrac{x^4}{e^x}$ en el intervalo $[2,4]$. En este intervalo $f(x) < g(x)$. Ver página 415.

Autoevaluación

1. $\int \frac{15x^2+10x}{\sqrt{x^3+x^2-10}}dx$ es igual a:

a. $\frac{5}{2}\sqrt{x^3+x^2-10}+C$

b. $5\ln\left(x^3+x^2-10\right)+C$

c. $10\sqrt{x^3+x^2-10}+C$

d. $2\sqrt{x^3+x^2-10}+C$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 436.

2. $\int \frac{x+8}{x^2-2x-15}dx$ es igual a:

a. $-\frac{3}{8}\ln(x+5)+\frac{11}{8}\ln(x-3)$

b. $-\frac{5}{8}\ln(x+3)+\frac{13}{8}\ln(x-5)+C$

c. $\frac{13}{2}\ln(x-5)-\frac{11}{2}\ln(x-3)+C$

d. $-\frac{3}{2}\ln(x+5)+\frac{5}{2}\ln(x+3)+C$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 455.

3. $\int e^{\csc x}\csc x\cot x\,dx$ es igual a:

a. $-e^{\csc x}+C$

b. $e^{\cot x}+C$

c. $e^{\csc x}+C$

d. $-e^{\cot x}+C$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 436.

4. $\int x\tan^2 x\,dx$ es igual a:

a. $x\tan x+\ln(\cos x)+C$

b. $-\frac{x^2}{2}+x\tan x+\ln(\sec x)+C$

c. $x\sec x+\ln(\sec x+\tan x)+C$

d. $-\frac{x^2}{2}+x\tan x+\ln(\cos x)+C$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 442.

5. $\int \frac{1}{x\sqrt{x-5}}dx$ es igual a:

a. $-\frac{2\sqrt{5}}{25}\sqrt{\frac{x-5}{x}}+\frac{2}{5}\ln\sqrt{x-5}+C$

b. No tiene primitiva expresada por funciones de uso corriente.

c. $\frac{2}{5}\ln\sqrt{x-5}-\frac{1}{5}\ln x+C$

d. $\frac{2\sqrt{5}}{5}\arctan\sqrt{\frac{x-5}{5}}+C$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 438 y 479.

6. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+6x}}dx$ es igual a:

a. $\ln\left(\frac{x+3+\sqrt{x^2+6x}}{3}\right)+C$

b. $x+3+3\ln\left(\frac{3}{x+3}\right)+C$

c. $\frac{x^2+6x}{3}-3\ln\left(\frac{x+3+\sqrt{x^2+6x}}{3}\right)+C$

d. $\sqrt{x^2+6x}-3\ln\left(\frac{x+3+\sqrt{x^2+6x}}{3}\right)+C$

En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 450.

Heteroevaluación

1. Calcula $\int x \arctan x \, dx$.

2. Calcula $\int \frac{3x^4 - x^2 + 1}{(x+4)(x^2+2)} dx$.

3. Calcula $\int \frac{x}{\sqrt{3+8x-x^2}} dx$.



Álgebra computacional denominada como cálculo simbólico.



Unidad 14 Programas de cálculo simbólico y el cálculo diferencial e integral

Aunque ya existían máquinas electromecánicas capaces de realizar operaciones matemáticas siguiendo un programa preestablecido, la computación electrónica nació durante la Segunda Guerra Mundial.

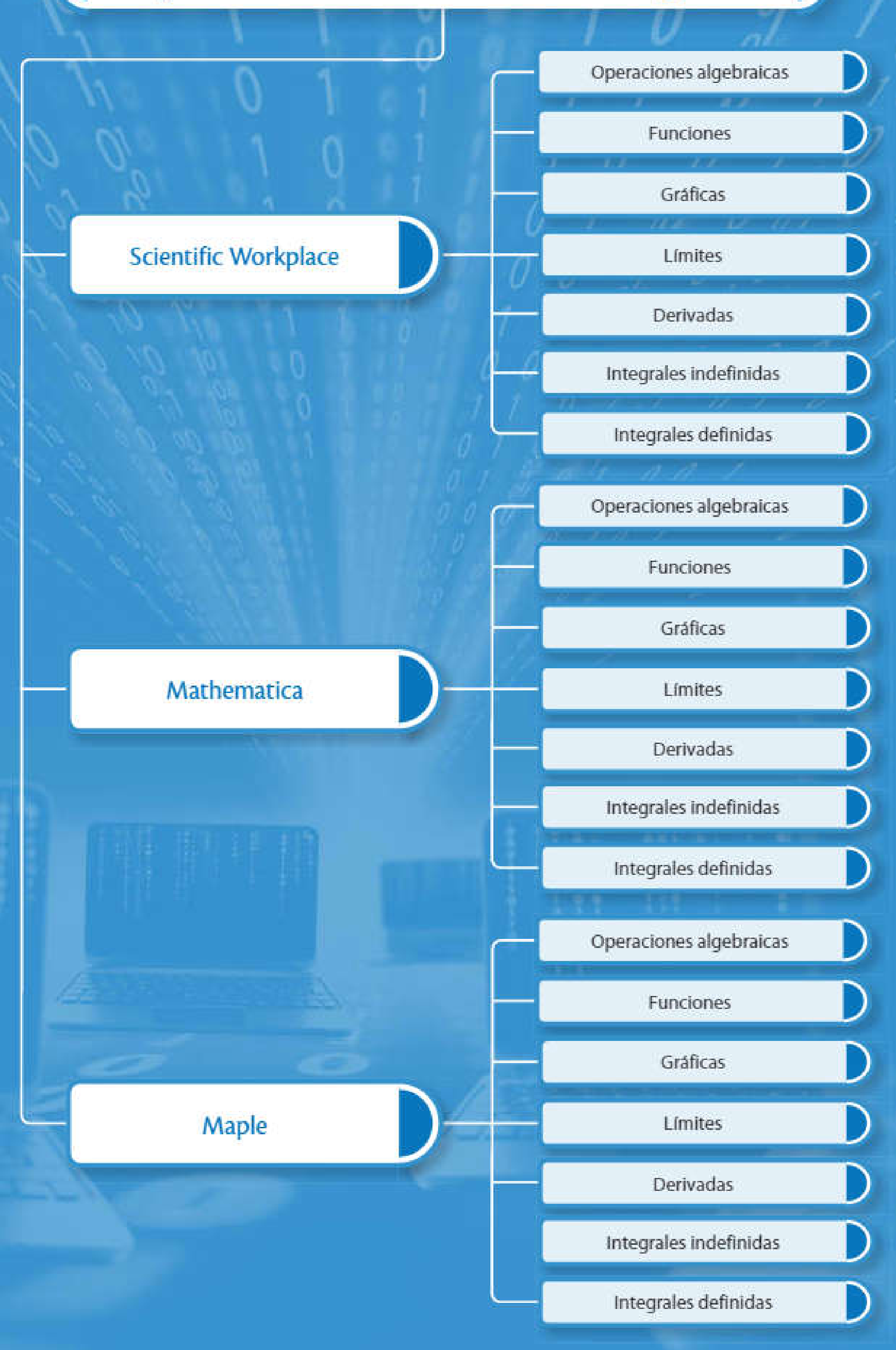
Estas primeras computadoras, como la Z3 alemana de 1941 y la Mark I de la Universidad de Harvard de 1944, fueron máquinas que se desarrollaron para resolver problemas específicos. La primera computadora electrónica de uso general fue la ENIAC, construida por la Universidad de Pensilvania en 1946.

A raíz del nacimiento de la computación se desarrolló la rama de las matemáticas conocida como "métodos numéricos" en la que se encuentran las soluciones de ecuaciones de una manera numérica, mediante aproximaciones sucesivas. Del mismo modo, se puede encontrar, por ejemplo, el valor de la derivada de una función en un punto sin conocer explícitamente la fórmula de dicha derivada.

A fines de la década de 1980 empezaron a surgir programas de cálculo simbólico, que no solo encontraban soluciones numéricas de ecuaciones, sino que podían deducir las fórmulas de las soluciones de una manera simbólica. En la actualidad dichos programas pueden calcular límites, derivar e integrar funciones e incluso resolver ecuaciones diferenciales con un grado de dificultad cada vez mayor.

En esta unidad damos una breve descripción de algunos de estos programas y mostramos la forma de hacer operaciones con ellos.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.



Scientific Workplace

El Scientific Workplace (SWP) es un editor de texto poderoso que produce documentos en formato LATEX, que es el formato estándar de todas las revistas de matemáticas. De hecho, este libro se hizo en Scientific Workplace.

Adicionalmente a sus capacidades de edición, el SWP tiene una máquina de cálculo simbólico, que puede ser Maple o MuPad, dependiendo de la versión de SWP, que le permite realizar operaciones matemáticas.

Operaciones algebraicas

Para efectuar una operación matemática, simplemente se escribe ésta en una caja de despliegue (ctrl-d) y se ejecuta "Evaluate" del menú "Compute". Por ejemplo

$$5x^2+6x+3x^2-8 \quad \boxed{\text{Evaluate}} \quad 6x+8x^2-8$$

SWP no siempre entrega el resultado de la manera en que nosotros deseamos, pero podemos pedir que simplifique, factorice o desarrolle mediante los comandos "simplify", "factor" o "expand". Para ello, si la expresión está en una caja de despliegue, se coloca el cursor encima de la expresión deseada y se elige el comando en el menú "compute".

$$\left(5x^2-8\right)\left(3x^2+2\right) \quad \boxed{\text{Expand}} \quad 15x^4-14x^2-16$$

$$15x^4-14x^2-16 \quad \boxed{\text{Factor}} \quad \left(5x^2-8\right)\left(3x^2+2\right)$$

Funciones

Si se va a trabajar mucho con una expresión algebraica, conviene definirla como función para poder usarla una y otra vez

$$f(x)=x^2-6x+9 \quad \boxed{\text{Define}} \quad \boxed{\text{New definition}}$$

y así,

$$f(4) \quad \boxed{\text{Evaluate}} \quad 1$$

$$(x-3)f(x) \quad \boxed{\text{Expand}} \quad 27x-9x^2+x^3-27$$

Gráficas

Para dibujar la gráfica de una función, (ver Figura 14.1), simplemente se pone el cursor sobre la regla de correspondencia de la función y se elige "Plot2D Rectangular".

$$\cos\left(x^2\right) \quad \boxed{\text{Plot2D}} \quad \boxed{\text{Rectangular}}$$

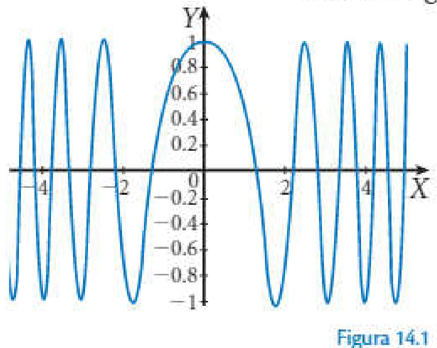


Figura 14.1

Límites

Para calcular un límite, se escribe la expresión y se elige "Evaluate" en el menú "Compute".

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2} \quad \boxed{\text{Evaluate}} \quad -4$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 8x^2 - 9}{5x + 7} \boxed{\text{Evaluate}} \infty$$

Si $f(x) = x^2 - 6x + 9$ ya está definida, puede utilizarse dentro de un límite

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{x - 3} \boxed{\text{Evaluate}} 0$$

Derivadas

Para derivar una función, se escribe la derivada usando la notación de Leibniz

$$\frac{d}{dx}(\tan x) \boxed{\text{Evaluate}} \tan^2 x + 1$$

Observa aquí que SWP no escribió $\sec^2 x$, pero recuerda la identidad

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

Integrales indefinidas

Para calcular integrales indefinidas, se escribe la integral y se pide que la evalúe

$$\int x \cos x dx \boxed{\text{Evaluate}} \cos x + x \sin x$$

En una integral que se resolvería por fracciones parciales, tenemos, que:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2 (x^2 + x + 1)} dx \boxed{\text{Evaluate}}$$

$$-\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{9} \sqrt{3} \arctan \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{3}$$

Para saber cómo se llegó a esa respuesta, se puede seleccionar el integrando y calcular primero las fracciones parciales;

$$\frac{1}{(x-1)^2 (x^2 + x + 1)} \boxed{\text{Calculus}} \boxed{\text{Partial fractions}}$$

$$\frac{1}{3(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{3} \frac{x+1}{x^2 + x + 1}$$

y después se puede calcular cada integral por separado.

Cuando una integral se resuelve por partes, se puede pedir que evalúe directamente la integral

$$\int x \ln x dx \boxed{\text{Evaluate}} \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2$$

O se puede pedir que la haga por partes

$$\int x \ln x dx \boxed{\text{Calculus}} \boxed{\text{Integrate by parts}} \frac{1}{2} x^2 \ln \mathbf{x} - \int \frac{1}{2} x dx$$

indicándole cuál es el factor que queremos derivar, en este caso, $\ln x$.

El proceso de integración puede ser muy complicado, aun para las computadoras, por lo que a veces hay que trabajar junto con ellas para hacer algún cálculo.

Ejemplo

1. Calcular $\int 2^x \sqrt{4^x - 1}\, dx$.

Solución:

SWP no puede efectuar esta integral, da como respuesta ella misma.

Si hacemos el cambio de variable $u = 2^x$, $du = 2^x \ln 2 dx$ transformamos la integral anterior en

$$\frac{1}{\ln 2}\int \sqrt{u^2 - 1} du$$

que ya puede ser resuelta por SWP

$$\frac{1}{\ln 2}\int \sqrt{u^2 - 1} du = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}u\sqrt{u^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right)\right)$$

Finalmente reemplazamos u por su valor 2^x haciendo

$$\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}u\sqrt{u^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right)\right)\Bigg|_{u=2^x} \quad \boxed{\text{Evaluate}}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}2^x\sqrt{2^{2x}-1} - \frac{1}{2}\ln\left(2^x + \sqrt{2^{2x}-1}\right)\right).$$

Integrales definidas

La integral definida es mucho más fácil de calcular para un programa de cómputo ya que puede encontrar el valor de la integral de manera aproximada sin necesidad de conocer la primitiva de la función, usando técnicas de análisis numérico.

Simplemente se escribe la integral y se pide que la evalúe.

$$\int_0^4 x^2 dx \quad \boxed{\text{Evaluate}} \quad \frac{64}{3}$$

Mathematica

El programa Mathematica posiblemente sea el programa de cálculo simbólico más conocido y es, sin duda, uno de los más poderosos.

Para efectuar operaciones en Mathematica, es necesario escribir las expresiones usando una sintaxis especial que no es difícil aprender.

Mathematica también tiene plantillas de símbolos que facilitan la escritura de expresiones algebraicas y de cálculo diferencial e integral.

Operaciones algebraicas

Una expresión algebraica se escribe en un solo renglón, utilizando el símbolo ^ para indicar la exponenciación y se oprimen simultáneamente las teclas Shift-Enter.

5x^2+6x+3x^2−8

$$-8 + 6x + 8x^2$$

(5*x^2−8)*(3*x^2+2)

$$(5x^2 - 8)(3x^2 + 2)$$

Para poder referirse al último resultado, sin necesidad de darle nombre o escribirlo nuevamente, se usa el símbolo %.

Expand[%]

$$15x^4-14x^2-16$$

Factor[%]

$$\left(2+3x^2\right)\left(-8+5x^2\right)$$

Funciones

Para definir una función se utiliza la notación $x_$ para indicar la variable y se encierra en paréntesis cuadrados

f[x−]=x^2−6x+9

Después se puede evaluar en cualquier número

f[4]

$$1$$

y utilizarla para formar otras expresiones;

Simplify[(x−3)f[x]]

$$(-3+x)^3$$

Gráficas

Para dibujar funciones de una variable se usa el comando Plot indicando la función, la variable y el rango de la variable (Figura 14.2).

Los nombres de las funciones predefinidas como Sin, Cos, Tan, Exp, etcétera se escriben empezando con *mayúscula*.

Plot[Cos[x^2],{x,−5,5}]

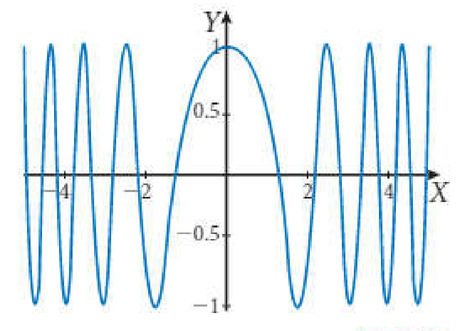


Figura 14.2

Límites

Para calcular límites se usa el comando *Limit*, al cual hay que indicarle la función y el punto donde se desea calcular el límite. La función puede estar definida de antemano o se puede escribir directamente dentro de Limit.

g[x_] = (x^2−4)/(x+2)

Limit[g[x],x−>−2]

$$-4$$

Limit[(3x^3−8x^2−9)/(5x+7),x−> Infinity]

$$\infty$$

Derivadas

Para calcular derivadas se usa el comando D, al que se le indica la función y la variable de derivación.

D[Tan[x],x]

$$\mathrm{Sec}[x]^2$$

Integrales indefinidas

Para calcular integrales indefinidas, se usa el comando *Integrate* al que se le indica la función que se quiere integrar y la variable de integración.

Integrate[1/((x−1)^2*(x^2+x+1)),x]

$$-\frac{1}{3(-1+x)}+\frac{\mathrm{ArcTan}[\frac{3+2(-1+x)}{\sqrt{3}}]}{3\sqrt{3}}+$$

$$\frac{1}{6}\mathrm{Log}[3+3(-1+x)+(-1+x)^2]-\frac{1}{3}\mathrm{Log}[-1+x]$$

La cual se puede simplificar, como

Simplify[%]

$$\frac{1}{18(-1+x)}\left(2\sqrt{3}(-1+x)\text{ArcTan}\left[\frac{3+2(-1+x)}{\sqrt{3}}\right]\right)+$$

$$\frac{1}{18(-1+x)}\left(3\left(2+2(-1+x)\text{Log}[-1+x]-(-1+x)\text{Log}\left[1+x+x^2\right]\right)\right)$$

Aunque Mathematica aparentemente sí resuelve la integral siguiente

$$\int 2^x\sqrt{4^x-1}dx$$

la expresión resultante es ininteligible,

Integrate[2^x*Sqrt[4^x−1],x]

$$(2^x(2^{1+2x}\text{Log}[2]-\text{Log}[4]-\sqrt{-1+4^x}$$

$$\text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{2},\frac{\text{Log}[2]}{\text{Log}[4]},\frac{\text{Log}[8]}{\text{Log}[4]},4^x\right]\text{Log}[4]))/$$

$$(\sqrt{-1+4^x}\text{Log}[2]\text{Log}[16])$$

Como explicamos en el caso de SWP, si hacemos un cambio de variable $u=2^x$, $du=2^x\ln 2dx$ podemos transformar la integral anterior en

$$\frac{1}{\ln 2}\int\sqrt{u^2-1}\,du$$

resp=Integrate[Sqrt[u^2−1],u]

$$\frac{1}{2}u\sqrt{-1+u^2}-\frac{1}{2}\text{Log}\left[u+\sqrt{-1+u^2}\right]$$

Después se reemplaza u por 2^x

s1/.u−>2^x

$$2^{-1+x}\sqrt{-1+2^{2x}}-\frac{1}{2}\text{Log}\left[2^x+\sqrt{-1+2^{2x}}\right]$$

y se multiplica por $\dfrac{1}{\ln 2}$

$$\frac{1}{\ln 2}\left(2^{-1+x}\sqrt{-1+2^{2x}}-\frac{1}{2}\text{Log}\left[2^x+\sqrt{-1+2^{2x}}\right]\right)$$

Integrales definidas

La integral definida utiliza el operador Integrate, solo que ahora además de la función a integrar, se indican los extremos de integración.

Integrate[x^2,{x,0,4}]

$$\frac{64}{3}$$

Maple

El programa canadiense Maple es la competencia más fuerte de Mathematica, y es difícil saber cuál de los dos es mejor. La sintaxis es muy parecida, con algunos

cambios: se usan paréntesis redondos $(\,)$ en lugar de paréntesis cuadrados $[\,]$, y para indicar multiplicaciones es necesario utilizar siempre el símbolo *, mientras que en Mathematica se puede escribir $(5x+1)(3x\wedge 2-2)$, en Maple debe escribirse $(5*x+1)*(3*x\wedge 2-2)$. Todas las expresiones deben acabar con "; " para indicar a Maple que efectúe la operación indicada.

A continuación mostramos los mismos ejemplos que hicimos con SWP y con Mathematica.

Operaciones algebraicas

(5*x^2−8)*(3*x^2+2);

$$(5x^2-8)(3x^2+2)$$

expand((5*x^2−8)*(3*x^2+2));

$$15x^4-14x^2-16$$

factor(15*x^4−14*x^2−16);

$$(5x^2-8)(3x^2+2)$$

Funciones

Definición de la función $f(x)=x^2-6x+9$: **f:=x−>x^2−6*x+9;**
Evaluación de la función anterior: **f(4);**

$$1$$

Operaciones con funciones: **(x^2−3^2)*f(x)/(x−3);**

$$\frac{(x^2-9)(x^2-6x+9)}{x-3}$$

Al igual que Mathematica, se utiliza el símbolo % para referirse al último resultado.
simplify(%);

$$(x+3)(x^2-6x+9)$$

expand(%);

$$x^3-3x^2-9x+27$$

Gráficas

Para dibujar la gráfica de una función se usa el comando plot, indicando el rango de x y opcionalmente el rango de *y*, Figura 14.3.

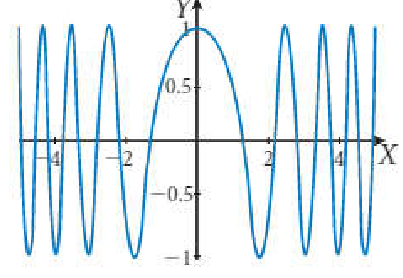


Figura 14.3

A diferencia de Mathematica, los nombres de las funciones predefinidas como sin, cos, tan, exp, etcétera, se escriben empezando con *minúscula*. Para indicar que x toma valores en $[a,b]$ escribimos **x=a..b**
plot(cos(x^2), x=−5..5);



Límites

Se escribe dentro del paréntesis la función y el valor donde se quiere evaluar.
limit((x^2−4)/(x+2),x=−2);

$$-4$$

También se puede definir previamente una función y después calcular su límite.
funcion:=(3*x^3−8*x^2−9)/(5*x+7);
limit(funcion, x=infinity);

$$\infty$$

limit(f(x)/(x−3),x=3);

$$0$$

Derivadas

Para derivar se usa el operador diff, indicando la función que se va a derivar y la variable con respecto a la cual se va a derivar.

diff(tan(x),x);

$$1+\tan(x)^2$$

Integrales indefinidas

Para calcular una integral indefinida, se usa el operador int, indicando la función que se va a integrar y la variable de integración.

int(x*cos(x),x);

$$\cos(x)+x\sin(x)$$

Para descomponer en fracciones parciales una expresión racional, por ejemplo:

$$\frac{1}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}$$

Escribimos:

convert(1/((x−1)^2*(x^2+x+1)), parfrac, x);

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Integral indefinida

Maple sí puede efectuar la integral

$$\int 2^x\sqrt{4^x-1}dx$$

int(2^x*sqrt(4^x−1),x);

$$\frac{1}{2}\frac{e^{x\ln 2}\sqrt{\left(e^{x\ln 2}\right)^2-1}}{\ln 2}-\frac{1}{2}\frac{\ln\left(e^{x\ln 2}+\sqrt{\left(e^{x\ln 2}\right)^2-1}\right)}{\ln 2}$$

que se puede simplificar:

simplify(%);

$$\frac{1}{2}\frac{2^x\sqrt{4^x-1}-\ln\left(2^x+\sqrt{4^x-1}\right)}{\ln 2}$$

También se puede efectuar el cambio de variable $u=2^x$ en la integral anterior;

changevar(2^x=u,Int(2^x*sqrt(4^x−1),x),u);

simplify(%);

$$\frac{1}{\ln 2}\int\sqrt{u^2-1}du$$

y después calcular la integral;

1/ln(2)*Int(sqrt(u^2−1),u);

simplify(%);

$$\frac{1}{2}\frac{u\sqrt{u^2-1}-\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)}{\ln 2}$$

y finalmente sustituir $u=2^x$ para obtener el mismo resultado.

Integrales definidas

Como antes, la integral definida es más sencilla para la computadora. Se usa el operador int, indicando la función a integrar y los límites de integración.

int(x^2,x=0..4);

$$\frac{64}{3}$$

Existen otros programas no tan poderosos, como Derive, pero más baratos que son capaces de efectuar cálculos simbólicos de una manera similar a las de Mathematica o Maple.

Utilizando cualquiera de los programas anteriores podemos resolver problemas como los siguientes.



1. Encontrar el área entre las funciones $f(x)=5-x^2$ y $g(x)=x^4-5x$

Solución:

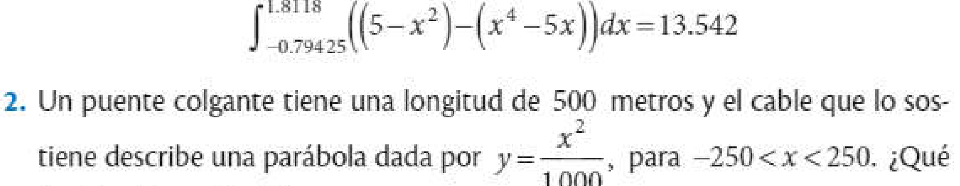
Con el programa de cálculo simbólico que se elija dibujamos las funciones y nos damos cuenta de que se cortan para x un poco mayor que -1 y x un poco menor que dos.

$$5-x^2=x^4-5x$$

Las soluciones numéricas son,

$$\text{Solution is : }\{x=-0.79425\},\{x=1.8118\}$$

Calculamos el área entre las curvas integrando la diferencia de las dos funciones entre estos dos valores:

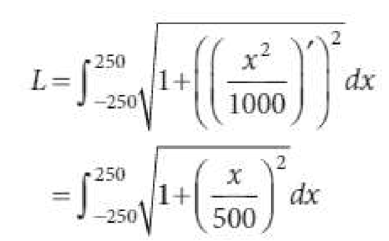


$$\int_{-0.79425}^{1.8118}\left(\left(5-x^2\right)-\left(x^4-5x\right)\right)dx=13.542$$

2. Un puente colgante tiene una longitud de 500 metros y el cable que lo sostiene describe una parábola dada por $y=\dfrac{x^2}{1000}$, para $-250<x<250$. ¿Qué longitud tiene el cable?

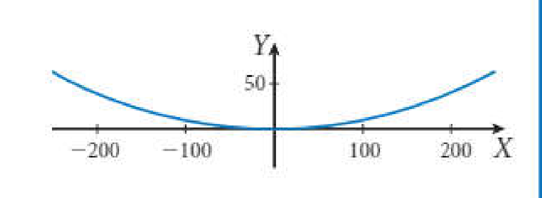
Solución:

Calculamos



$$L=\int_{-250}^{250}\sqrt{1+\left(\left(\frac{x^2}{1000}\right)'\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{-250}^{250}\sqrt{1+\left(\frac{x}{500}\right)^2}\,dx$$



Esta integral se resuelve mediante sustitución trigonométrica, pero si únicamente queremos encontrar su valor numérico, utilizamos cualquiera de los paquetes mencionados anteriormente y obtenemos

$$L=520.11$$

Por lo tanto el cable del puente mide 520.11 metros.

Apéndice A

Comentarios sobre la definición de función continua

En este Apéndice, cuya lectura es opcional, haremos algunas demostraciones usando la definición formal de función continua en un punto, la cual ahora recordamos:

Definición:
$f: A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, es *continua* en $a \in A$ si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ con la siguiente propiedad:

$$x \in A \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{(A.1)}$$

La definición anterior precisa la siguiente idea, ya presentada en la penúltima sección de la unidad 3:

Una función $f: A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, es continua en $a \in A$ si podemos lograr que $f(x)$ y $f(a)$ difieran en tan poco como establezcamos para todos los puntos $x \in A$ que estén suficientemente cercanos a a.

Para cuantificar propiedades matemáticas usamos números. Una medida de en cuánto difieren dos números r y s es el valor $|r-s|$, que es llamado la distancia entre r y s. Mientras más pequeña es esa distancia, más parecidos son r y s, o sea, difieren poco.

Así, para establecer en qué tan poco queremos que difieran $f(x)$ y $f(a)$, debemos dar un número positivo, pero como deseamos que la propiedad se cumpla cualquiera que haya sido el número dado, en lugar de dar un número particular usamos una letra para representarlo; se acostumbra usar ε. Al dar ε estamos estableciendo el grado de parecido que pedimos entre $f(x)$ y $f(a)$: queremos que difieran en menos que ε; o sea, que se cumpla que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Por otra parte, la frase "para todos los puntos $x \in A$ que estén suficientemente cercanos a a" se traduce en "existe (hay) un número positivo en general denotado por δ, que es adecuado para que suceda lo que queremos", es decir, se cumplirá lo que deseamos siempre que los números $x \in A$ difieran de a en menos que el número δ que escogimos, o sea, siempre que $|x-a| < \delta$.

Demostraciones de la continuidad de algunas de las funciones de uso frecuente

- **La función identidad $f(x) = x$ es continua en su dominio, $\mathbb{R}$.**

Demostración: Tomamos $a \in \mathbb{R}$. Probaremos que $f(x)$ es continua en a.
Sea $\varepsilon > 0$, queremos encontrar un número real $\delta > 0$ que haga verdadera la siguiente implicación:

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Como $f(x) = x$ y $f(a) = a$, es claro que si escogemos $\delta = \varepsilon$ entonces se tiene que

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} \text{ y } |x-a| < \varepsilon \text{ entonces } |f(x) - f(a)| = |x-a| < \varepsilon$$

Así, $f(x)$ es continua en a y como a es un elemento cualquiera de su dominio, entonces $f(x)$ es continua en su dominio.

- **La función constante $C(x) = c$ es continua en su dominio, $\mathbb{R}$.**

Demostración: Tomamos $a \in \mathbb{R}$. Probaremos que $C(x)$ es continua en a.
Sea $\varepsilon > 0$, queremos encontrar un número real $\delta > 0$ que haga verdadera la siguiente implicación:

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonces } |C(x) - C(a)| < \varepsilon$$

Como $C(x) = c$ para cualquier x y $C(a) = c$, es claro que si escogemos $\delta = \varepsilon$ entonces se tiene

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} \text{ y } |x-a| < \varepsilon$$
$$\text{entonces } |C(x) - C(a)| = |c-c| = 0 < \varepsilon$$

Así, $C(x)$ es continua en a y como a es un elemento cualquiera de su dominio, entonces $C(x)$ es continua en su dominio.

Para las dos funciones anteriores fue muy fácil determinar el número δ, una vez que había sido propuesto el número ε. A partir de ahora será más elaborado ese proceso; para poder seguirlo deberemos tener en consideración las propiedades que se irán presentando de modo numerado. Todas se refieren a una función $f: A \to \mathbb{R}$ y a un punto $a \in A$.

Propiedad 1. Si δ_0 sirve para que se cumpla (A.1), entonces cualquier δ menor que δ_0 también sirve. Es decir, si

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a| < \delta_0 \text{ entonces } |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

y $0 < \delta < \delta_0$, entonces:

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonces } |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

Demostración: Tomamos $0 < \delta < \delta_0$. Si

$$x \in A \text{ y } |x-a| < \delta$$

entonces, por la transitividad del orden,

$$x \in A \text{ y } |x-a| < \delta_0$$

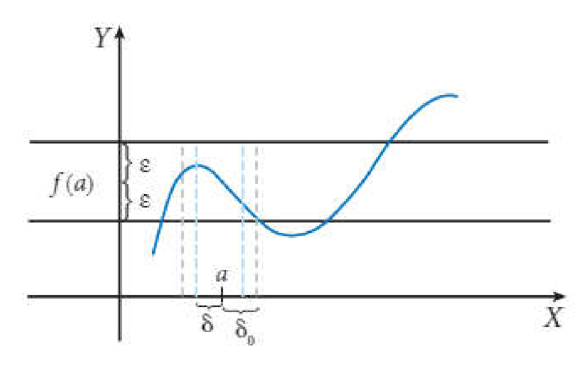
y por la hipótesis, tenemos:

$$|f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

Así que

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonces } |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

Más en general, si los puntos $x \in A$ que satisfacen $|x-a| < \delta_0$ cumplen una propiedad, entonces ésta también se cumple si $x \in A$ y $|x-a| < \delta$ para cualquier $0 < \delta < \delta_0$.



En el ajedrez se puede "cantar" el jaque mate antes de realizarlo de manera efectiva, así también es posible establecer la continuidad de una función sin necesidad de trabajar con los números ε y δ de la definición de función continua. La siguiente propiedad sirve para ese propósito.

Propiedad 2. Si existen $\delta_1 > 0$ y $M > 0$ tales que

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a| < \delta_1$$

$$\text{entonces } |f(x)-f(a)| \le M|x-a|, \qquad \text{(A.2)}$$

entonces f es continua en a.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$ tomamos un número positivo δ que sea menor que δ_1 y que $\frac{\varepsilon}{M}$. Como

$$|x-a| < \delta < \delta_1$$

entonces:

$$|f(x)-f(a)| \le M|x-a|$$

Además, como $M > 0$, entonces:

$$|x-a| < \delta$$
$$M|x-a| < M\delta$$

y como:

$$\delta < \frac{\varepsilon}{M}$$
$$M\delta < \varepsilon$$

Así,

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonces}$$
$$|f(x)-f(a)| \le M|x-a| < M\delta < \varepsilon$$

Por lo tanto: f es continua en a.

La función $f(x) = x^2$ es continua en su dominio ($\mathbb{R}$).

Demostración: Tomamos $a \in \mathbb{R}$. Probaremos que $f(x)$ es continua en a.

Por la propiedad 2 descrita en esta página, es suficiente probar que se satisface (A.2), es decir, que existen $\delta_1 > 0$ y $M > 0$, tales que:

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} \text{ y } |x-a| < \delta_1 \text{ entonces}$$
$$|f(x)-f(a)| = |x^2-a^2| \le M|x-\mathbf{a}|$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}|x^2-a^2| &= |(x+a)(x-a)| \\ &= |x+a||x-a| \\ &\le (|x|+|a|)|x-a|\end{aligned}$$

Además,

$$|x|-|a| \le |x-a|$$

Si $|x-a| < 1$, entonces:

$$|x|-|a| < 1$$

y por lo tanto,

$$|x| < |a| + 1$$
$$|x| + |a| < 2|a| + 1;$$

de donde

$$\text{Si } |x-a| < 1 \text{ entonces } |x| + |a| < 2|a| + 1$$

Escojamos $\delta_1 = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \left|x^2 - a^2\right| &\le (|x| + |a|)|x-a| \\ &\le (2|a|+1)|x-a| \\ &\le M|x-a| \end{aligned}$$

con $M = 2|a| + 1$; o sea, se satisface (A.2).

- **La función $\operatorname{sen} x$ es continua en su dominio $\mathbb{R}$.**

Demostración: Tomamos $a \in \mathbb{R}$. Probaremos que $\operatorname{sen} x$ es continua en a.
La función $\operatorname{sen} x$ tiene la siguiente propiedad:

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \le |x-y| \quad \text{(A.3)}$$

para cualesquiera de los dos números reales x, y. En particular,

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| \le |x-a|$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que se cumple (A.2) escogiendo un número real positivo δ_1 cualquiera. Entonces $\operatorname{sen} x$ es continua en a.

- **La función $\sqrt{x}$ es continua en su dominio $[0, \infty)$.**

Demostración: Tomamos $a \in [0, \infty)$. Probaremos que la función $h(x) = \sqrt{x}$ es continua en a.

Usaremos la desigualdad que a continuación probamos:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \le \sqrt{|x-a|} \quad \text{(A.4)}$$

para todo $x \in [0, \infty)$.

Notamos que esta desigualdad es equivalente a la que obtenemos elevando al cuadrado ambos lados:

$$\left(\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right|\right)^2 \le |x-a|$$

Como el lado izquierdo coincide con $\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)^2 = x - 2\sqrt{ax} + a$, entonces para probar (A.4) debemos probar, que:

$$x - 2\sqrt{ax} + a \le |x-a| \quad \text{(A.5)}$$

Supongamos, $a \le x$ entonces:

$$\begin{aligned} a &\le x \\ a^2 &\le ax \\ 2\sqrt{a^2} &\le 2\sqrt{ax} \\ -2\sqrt{a^2} &\ge -2\sqrt{ax} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} x - 2\sqrt{ax} + a &\le x - 2\sqrt{a^2} + a \\ &= x - 2a + a \\ &= x - a \\ &= |x-a| \end{aligned}$$

Si por el contrario $0 \le x \le a$, entonces:

$$\begin{aligned} x &\le a \\ x^2 &\le ax \\ -2\sqrt{x^2} &\ge -2\sqrt{ax} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} x - 2\sqrt{ax} + a &\le x - 2\sqrt{x^2} + a \\ &= x - 2x + a \\ &= -x + a \\ &= |-x+a| \\ &= |x-a| \end{aligned}$$

y está probado (A.5).

Regresamos a la prueba de la continuidad de $h(x) = \sqrt{x}$.

Sea $\varepsilon > 0$, queremos encontrar un número real $\delta > 0$, tal que:

$$\text{Si } x \in [0, \infty) \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonces } \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon$$

Por lo anterior, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \le \sqrt{|x-a|}$ si $x \in [0, \infty)$. Entonces, para obtener la desigualdad que queremos basta con lograr que $\sqrt{|x-a|} < \varepsilon$, que equivale a $|x-a| < \varepsilon^2$. Por lo tanto, tomamos $\delta = \varepsilon^2$ y se tiene:

$$\text{Si } x \in [0, \infty) \text{ y } |x-a| < \varepsilon^2$$

entonces $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \le \sqrt{|x-a|} < \varepsilon$.

Así, $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en a.

Pruebas de la continuidad de funciones obtenidas al operar con funciones continuas

En todo lo que sigue usaremos dos funciones $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ ambas continuas en $a \in A \cap B$.

La suma de funciones continuas en a es continua en a.

Demostración: El dominio de la función suma $h(x) = f(x) + g(x)$ es $A \cap B$.

Sea $\varepsilon > 0$, queremos encontrar un número real $\delta > 0$, tal que:

$$\text{Si } x \in A \cap B \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonces } |h(x) - h(a)| < \varepsilon$$

Es decir,

$$\text{Si } x \in A \cap B \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonces}$$
$$\left|f(x) + g(x) - \left(f(a) + g(a)\right)\right| < \varepsilon$$

Para cualquier $x \in A \cap B$ tenemos:

$$\begin{aligned}
&\left|f(x) + g(x) - \left(f(a) + g(a)\right)\right| \\
&= \left|f(x) - f(a) + g(x) - g(a)\right| \\
&\leq \left|f(x) - f(a)\right| + \left|g(x) - g(a)\right|
\end{aligned}$$

Observamos que si los dos últimos sumandos son menores que $\frac{\varepsilon}{2}$, entonces la suma es menor que ε y por tanto, tendremos la desigualdad que deseamos:

$$\left|f(x) + g(x) - \left(f(a) + g(a)\right)\right| < \varepsilon$$

Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en a, si proponemos $\frac{\varepsilon}{2}$, entonces existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que:

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a| < \delta_1 \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Si } x \in B \text{ y } |x-a| < \delta_2 \text{ entonces } |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si escogemos un número positivo δ menor que δ_1 y δ_2, entonces tenemos:

$$\text{Si } x \in A \cap B \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonce}$$
$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De donde,

$$\text{Si } x \in A \cap B \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonces}$$
$$\left|f(x) + g(x) - \left(f(a) + g(a)\right)\right| < \overbrace{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon}$$

y está probado que la función suma $h(x) = f(x) + g(x)$ es continua en a.

El producto de una constante c por una función continua en a es continua en a.

Demostración: Llamamos A al dominio de la función $h(x) = cf(x)$ que coincide con el de la función f.

Si $c = 0$, entonces h es la función 0, por lo tanto es continua en a.

Supongamos que $c \neq 0$ y sea $\varepsilon > 0$.

Para cualquier $x \in A$ tenemos:

$$|cf(x) - cf(a)| = \left|c\left(f(x) - f(a)\right)\right| = |c|\,|f(x) - f(a)|$$

Para que esta expresión sea menor que ε basta que

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

Como f es continua en a hay un $\delta > 0$, tal que:

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

De donde,

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a| < \delta \text{ entonces } |cf(x) - cf(a)| < \varepsilon$$

y está probado que la función $h(x) = cf(x)$ es continua en a.

La función simétrica de una función continua en a es continua en a.

Demostración: La función simétrica de $f(x)$ es la función $h(x) = -f(x)$, cuyo dominio es también A. Así, $h(x)$ es el producto de la constante -1 por la función $f(x)$ que es continua en $a \in \mathbb{R}$. De acuerdo con el apartado anterior, $h(x)$ es continua en a.

La diferencia de dos funciones continuas en a es una función continua en a

Demostración: La función diferencia

$h(x) = f(x) - g(x)$ es la suma $f(x) + \left(-g(x)\right)$ y la función $-g(x)$ es la función simétrica de la fun-

ción $g(x)$. De acuerdo con los resultados previos tenemos que $-g(x)$ es continua en a y la suma $h(x)=f(x)+(-g(x))$ es continua en a.

La composición de dos funciones continuas es una función continua.

Demostración: Supongamos como hasta ahora que $f: A \to \mathbb{R}$ es continua en A y que $g: B \to \mathbb{R}$ es una función tal que la imagen $f(A)$ está contenida en B y que $g(y)$ es continua en $b=f(a)$. Entonces, el dominio de $g \circ f$ es A. Se probará que la función $(g \circ f)(x)=g(f(x))$ es continua en a.

Sea $\varepsilon>0$, queremos encontrar un número real $\delta>0$, que:

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a|<\delta \text{ entonces } |(g \circ f)(x)-(g \circ f)(a)|<\varepsilon$$

es decir,

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a|<\delta \text{ entonces } |g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon$$

Como $g(y)$ es continua en $b=f(a)$, si proponemos $\varepsilon>0$, entonces existe $\delta_1>0$, tal que:

$$\text{Si } y \in B \text{ y } |y-b|<\delta_1 \text{ entonces } |g(y)-g(b)|<\varepsilon \quad \text{(A6)}$$

Y por ser $f(x)$ continua en a, si proponemos $\varepsilon_1=\delta_1$, entonces existe $\delta>0$, tal que:

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a|<\delta \text{ entonces } |f(x)-f(a)|<\delta_1$$

Es decir, $x \in A$ y $|x-a|<\delta$ entonces

$$\left|\overbrace{f(x)}^{y}-\overbrace{f(x)}^{b}\right|<\delta_1$$

y como $\overbrace{f(x)}^{y} \in B$ entonces por (A.6) obtenemos $|g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon$.

En resumen,

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a|<\delta \text{ entonces } |(g \circ f)(x)-(g \circ f)(a)|<\varepsilon$$

por lo que $(g \circ f)(x)$ es continua en a.

El producto de dos funciones continuas en a es continuo en a.

Demostración: A partir de la fórmula del cuadrado de una suma tenemos que:

$$(f(x)+g(x))^2=f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)$$

Despejamos $f(x)g(x)$ de la igualdad anterior

$$2f(x)g(x)=(f(x)+g(x))^2-f^2(x)-g^2(x)$$

$$f(x)g(x)=\frac{1}{2}\left((f(x)+g(x))^2-f^2(x)-g^2(x)\right)$$

La función $f^2(x)$ es la composición $h \circ f$, con $h(y)=y^2$. Como ambas son continuas y la composición de funciones continuas es continua entonces $f^2(x)$ es continua. Similarmente, $g^2(x)$ es continua.

Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas entonces $f(x)+g(x)$ es continua, y por el argumento anterior, $(f(x)+g(x))^2$ es continua.

Como la suma y resta de funciones continuas son continuas, entonces,

$$(f(x)+g(x))^2-f^2(x)-g^2(x)$$

es continua y como el producto de una función continua por una constante es continua, entonces:

$$\frac{1}{2}\left((f(x)+g(x))^2-f^2(x)-g^2(x)\right)$$

es continua, pero esta última es igual a $f(x)g(x)$, así que $f(x)g(x)$ es continua.

Para la prueba del siguiente resultado, necesitamos la propiedad que se describe.

Propiedad 3. Si $f: A \to \mathbb{R}$ es continua en a y $f(a) \neq 0$, entonces existen $\delta_2>0$ y $M_2>0$, tales que:

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a|<\delta_1 \text{ entonces } \frac{1}{|f(x)|}<M_1$$

Demostración: Como $f(a) \neq 0$, entonces $|f(a)|>0$. Por ser $f(x)$ continua en a, para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ para el cual se satisface:

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a|<\delta \text{ entonces } |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

En particular para $\varepsilon=\frac{|f(a)|}{2}$ existe un número real positivo, que llamamos δ_1, tal que:

$$\text{Si } x \in A \text{ y } |x-a|<\delta_1 \text{ entonces } |f(x)-f(a)|<\frac{|f(a)|}{2}$$

Por otra parte, sabemos que:

$$|f(a)|-|f(x)| \le |f(x)-f(a)|$$

Si,

$$|f(x)-f(a)|<\frac{|f(a)|}{2}$$

entonces:

$$|f(a)|-|f(x)|<\frac{|f(a)|}{2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{|f(a)|}{2}<|f(x)|$$

De donde,

$$\frac{1}{|f(x)|}<\frac{2}{|f(a)|}$$

Llamamos $M_1=\frac{2}{|f(a)|}$

Al pasar al otro lado los términos de esta desigualdad obtenemos $\frac{1}{|f(x)|}<M_1$. En resumen,

Si $x\in A$ y $|x-a|<\delta_1$ entonces $\frac{1}{|f(x)|}<M_1$,

donde $M_1=\frac{2}{|f(a)|}$.

Si una función es continua en a y no se anula en a, entonces su recíproca es continua en a.

Demostración: La función recíproca de $f(x)$ es $h(x)=\frac{1}{f(x)}$ la cual tiene por dominio al conjunto $D=A\setminus\{x\in A:\ f(x)=0\}$, donde A es el dominio de f.

Si $f(a)\neq 0$, entonces a está en el dominio de $h(x)$. Se probará que $h(x)$ es continua en a.

Sea $\varepsilon>0$, queremos encontrar un número real $\delta>0$, tal que:

Si $x\in D$ y $|x-a|<\delta$ entonces $|h(x)-h(a)|<\varepsilon$

Es decir,

Si $x\in D$ y $|x-a|<\delta$ entonces $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}\right|<\varepsilon$

Para cualquier $x\in D$ tenemos:

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}\right|=\left|\frac{f(x)-f(a)}{f(x)f(a)}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{f(x)f(a)}\right||f(x)-f(a)|$$

$$=\frac{1}{|f(x)|}\frac{1}{|f(a)|}|f(x)-f(a)|$$

De acuerdo con la propiedad 3 de la página 508, por ser $f(x)$ continua en a, existen $\delta_1>0$ y $M_1>0$ tales que:

Si $x\in A$ y $|x-a|<\delta_1$ entonces $\frac{1}{|f(x)|}<M_1$

Como $f(x)$ es continua en a, si proponemos $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon|f(a)|}{M_1}$, entonces existe $\delta_2>0$ tal que:

Si $x\in A$ y $|x-a|<\delta_2$ entonces $|f(x)-f(a)|<\varepsilon_1$

Si escogemos un número positivo δ menor que δ_1 y δ_2, entonces tenemos que $x\in D$ y $|x-a|<\delta$ implican

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}\right|=\frac{1}{|f(x)|}\frac{1}{|f(a)|}|f(x)-f(a)|$$

$$<M_1\left(\frac{1}{|f(a)|}\right)\varepsilon_1$$

es decir,

$$\frac{1}{|f(x)|}\frac{1}{|f(a)|}|f(x)-f(a)|<M_1\left(\frac{1}{|f(a)|}\right)\frac{\varepsilon|f(a)|}{M_1}=\varepsilon$$

O sea,

Si $x\in D$ y $|x-a|<\delta$ entonces $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}\right|<\varepsilon$

Probando de esta forma que la función recíproca $h(x)=\frac{1}{f(x)}$ es continua en a.

El cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ de dos funciones continuas en a, cuyo denominador no se anula en a, es continuo en a.

Demostración: Como $g(x)$ es continua en a y $g(a)\neq 0$, entonces la función $\frac{1}{g(x)}$ es continua en a, según el apartado anterior; y como $f(x)$ también es continua en a se concluye que el producto $h(x)=f(x)\frac{1}{g(x)}$ es continuo en a; o lo que es lo mismo, el cociente $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ es continuo en a.

La función $\cos x$ es continua.

Demostración: El coseno satisface la siguiente identidad;

$$\cos x=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

ya que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)&=\operatorname{sen}x\cos\frac{\pi}{2}+\cos x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\\&=\operatorname{sen}x\cdot 0+\cos x\cdot 1\end{aligned}$$

entonces $\cos x$ es continua, ya que es la composición de $f(x)=x+\frac{\pi}{2}$ y $g(x)=\operatorname{sen}x$, y éstas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

Apéndice B

Por resultar menos engorrosa la notación, en este apéndice usaremos los cocientes de Fermat:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Excepto en la parte final donde aparecen las pruebas de la regla de la cadena y las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas, en las que usaremos los cocientes de Newton:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Continuidad de las funciones derivables. Si una función f es derivable en un punto x, entonces es continua en x.

Demostración: Si f es derivable en x entonces existe el límite:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

de donde:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to x}\left(f(y)-f(x)\right)&=\lim_{y\to x}\left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}(y-x)\right)\\&=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\lim_{y\to x}(y-x)\\&=f'(x)(0)=0\end{aligned}$$

Así que:

$$\lim_{y\to x}\left(f(y)-f(x)\right)=0$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to x}f(y)&=\lim_{y\to x}\left(f(y)-f(x)+f(x)\right)\\&=\lim_{y\to x}\left(f(y)-f(x)\right)+\lim_{y\to x}f(x)\\&=f(x)\end{aligned}$$

Así que:

$$\lim_{y\to x}f(y)=f(x)$$

Por lo tanto, f es continua en x (ver el recuadro de la página 122).

Derivada del producto de una función por una constante. Si $f(x)$ es derivable y c es una constante, entonces cf es derivable y $(cf)'=cf'$.

Demostración:

$$\begin{aligned}(cf)'(x)&=\lim_{y\to x}\frac{cf(y)-cf(x)}{y-x}\\&=\lim_{y\to x}c\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\\&=c\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\\&=cf'(x)\end{aligned}$$

Así que:

$$(cf)' = cf'$$

Derivada de x^n. Si n es cualquier número real, entonces $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.

Demostración para n natural:

$$\left(x^n\right)' = \lim_{y \to x} \frac{y^n - x^n}{y - x}. \qquad \text{(B.1)}$$

Factorizamos:

$$y^n - x^n = (y - x)\left(y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

Entonces:

$$\frac{y^n - x^n}{y - x} = y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

Los límites de los sumandos son:

$$\lim_{y \to x} y^{n-1} = x^{n-1}$$

$$\lim_{y \to x} y^{n-2}x = x^{n-2}x = x^{n-1}$$

$$\lim_{y \to x} y^{n-3}x^2 = x^{n-3}x^2 = x^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$\lim_{y \to x} x^{n-1} = x^{n-1}$$

Como hay n sumandos, entonces:

$$\lim_{y \to x} \frac{y^n - x^n}{y - x} = \lim_{y \to x}\left(y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

$$= nx^{n-1}$$

Por lo tanto,

$$\left(x^n\right)' = \lim_{y \to x} \frac{y^n - x^n}{y - x} = nx^{n-1}$$

Derivada de la suma de dos funciones. Si f y g son funciones derivables entonces $f + g$ es derivable y

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Demostración:

$$(f + g)'(x) = \lim_{y \to x} \frac{(f + g)(y) - (f + g)(x)}{y - x} \qquad \text{(B.2)}$$

Aplicando la definición de suma de funciones obtenemos:

$$\frac{(f + g)(y) - (f + g)(x)}{y - x} = \frac{f(y) + g(y) - f(x) - g(x)}{y - x}$$

$$= \frac{f(y) - f(x) + g(y) - g(x)}{y - x}$$

Podemos ahora separar en dos fracciones:

$$\frac{(f + g)(y) - (f + g)(x)}{y - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \frac{g(y) - g(x)}{y - x}$$

Sustituyendo en (B.2) tenemos:

$$(f + g)'(x) = \lim_{y \to x}\left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \frac{g(y) - g(x)}{y - x}\right)$$

Ahora usamos la regla de suma de límites (ver la página 124):

$$(f + g)'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \lim_{y \to x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x}$$

$$= f'(x) + g'(x),$$

así que hemos probado que para cualquier x:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Es decir,

$$(f + g)' = f' + g'$$

Derivada de un producto de funciones. Si f y g son funciones derivables entonces fg es derivable y

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Demostración:

$$(fg)'(x) = \lim_{y \to x} \frac{(fg)(y) + (fg)(x)}{y - x} \qquad \text{(B.3)}$$

Aplicamos la definición del producto de funciones:

$$\frac{(fg)(y) + (fg)(x)}{y - x} = \frac{f(y)g(y) + f(x)g(x)}{y - x}$$

Sumamos y restamos el término $f(y)g(x)$ en el numerador, el valor de la expresión no cambia, pues estamos sumando 0.

$$\frac{f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) + f(x)g(x)}{y - x}$$

Acomodamos los términos y separamos en dos sumandos:

$$\frac{f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) + f(x)g(x)}{y - x}$$

$$= f(y)\left(\frac{g(y) - g(x)}{y - x}\right) + g(x)\left(\frac{f(y) + f(x)}{y - x}\right)$$

Así que:

$$(fg)'(x)=\lim_{y\to x}\left[f(y)\left(\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right)+\right.$$
$$\left.g(x)\left(\frac{f(y)+f(x)}{y-x}\right)\right]$$

Ahora usamos las reglas de suma y producto de límites (ver la página 124):

$$\lim_{y\to x}f(y)\lim_{y\to x}\frac{g(y)-g(x)}{y-x}+\lim_{y\to x}\frac{f(y)+f(x)}{y-x}\lim_{y\to x}g(x)$$

Calculando el primer límite:

$$\lim_{y\to x}f(y)=f(x),$$

ya que como f es derivable en x, entonces f es continua en x.

El segundo y tercer límites son la derivada de g y de f respectivamente, y el último límite vale $g(x)$, ya que no depende de y, ver la página 124 (límite de una constante). Entonces:

$$(fg)'(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

Así que:

$$(fg)'=fg'+f'g$$

- **Derivada del inverso multiplicativo.** Si f es una función derivable entonces $1/f$ es derivable, en los puntos donde $f(x)\neq 0$ y

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}.$$

Demostración:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\lim_{y\to x}\frac{\frac{1}{f(y)}-\frac{1}{f(x)}}{y-x}. \qquad \text{(B.4)}$$

Simplificamos la expresión:

$$\frac{\frac{1}{f(y)}-\frac{1}{f(x)}}{y-x}=\frac{f(x)-f(y)}{f(y)f(x)(y-x)}$$
$$=\left(\frac{-1}{f(y)f(x)}\right)\left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)$$

Sustituyendo en (B.4),

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\lim_{y\to x}\left(\left(\frac{-1}{f(y)f(x)}\right)\left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)\right).$$

Aplicamos la regla del producto de límites (ver la página 124):

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\lim_{y\to x}\left(\frac{-1}{f(y)f(x)}\right)\lim_{y\to x}\left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)$$

y evaluamos los límites.

Como la función f es derivable en x, entonces es continua en x, así que:

$$\lim_{y\to x}f(y)=f(x)$$

Como $f(x)\neq 0$, entonces:

$$\lim_{y\to x}\left(\frac{-1}{f(y)f(x)}\right)=-\frac{1}{f(x)^2}$$

El segundo límite es la definición de la derivada de f. Así que;

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=-\frac{1}{(f(x))^2}f'(x)$$
$$=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}.$$

- **Derivada de un cociente de funciones.** Si f y g son funciones derivables entonces f/g es derivable, en los puntos donde $g(x)\neq 0$ y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

Demostración: Escribimos el cociente como un producto:

$$\frac{f}{g}=f\left(\frac{1}{g}\right)$$

Aplicamos la regla de la derivada de un producto:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\left(f\left(\frac{1}{g}\right)\right)'$$
$$=f'\left(\frac{1}{g}\right)+f\left(\frac{1}{g}\right)'$$

Usamos la fórmula de la derivada del inverso multiplicativo que acabamos de probar, aplicándosela a la función g y simplificamos:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}$$

Escribimos con un denominador común y obtenemos el resultado deseado:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

- **Regla de la cadena.** Si f es derivable en x y g es derivable en $y = f(x)$ entonces la composición $H(x) = g(f(x))$ es derivable en x y

$$H'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Demostración: Haremos la demostración para un caso simplificado en el que supondremos que $f(x+h) \neq f(x)$ para todo h suficientemente parecido a 0. Lo cual no es una restricción muy grande, ya que todas las funciones que estamos estudiando satisfacen esta propiedad, excepto las funciones constantes en intervalos, en cuyo caso las funciones H correspondientes también son constantes y se satisface la fórmula deseada ya que sus dos lados valen cero. Debemos calcular:

$$H'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{H(x+h) - H(x)}{h}$$

Multiplicamos y dividimos por $f(x+h) - f(x)$, sabemos por la hipótesis adicional que es distinta de cero:

$$H'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{H(x+h) - H(x)}{h}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x+h) - f(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{H(x+h) - H(x)}{f(x+h) - f(x)}\right)\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

Ahora calculamos el límite de cada factor por separado. Para el primero, llamemos $y = f(x)$ y

$$k = f(x+h) - f(x) = f(x+h) - y$$

entonces:

$$\frac{H(x+h) - H(x)}{f(x+h) - f(x)} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{k} = \frac{g(y+k) - g(y)}{k}.$$

Como la función f es continua en x, si $h \to 0$, entonces $f(x+h)$ tiende a $y = f(x)$ y por lo tanto k tiende a cero, así que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{H(x+h) - H(x)}{f(x+h) - f(x)} = \lim_{k\to 0}\frac{g(y+k) - g(y)}{k} = g'(y)$$

El segundo límite es inmediato, pues es la derivada de f en x:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Multiplicando estos dos límites obtenemos la expresión deseada:

$$H'(x) = g'(y)f'(x)$$

Para calcular las derivadas de las funciones seno y coseno, necesitamos recordar dos identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

y dos límites importantes vistos en la unidad de límites en las páginas 142 y 143:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\frac{1 - \cos h}{h} = 0.$$

- **Derivada de la función seno:** $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

Demostración: En esta prueba utilizamos primero la fórmula del seno de una suma para reescribir $\operatorname{sen}(x+h)$ y posteriormente utilizamos los dos límites mencionados anteriormente.

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h}\right)\\ &= \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\\ &= (\operatorname{sen} x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

- **Derivada de la función coseno:** $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

Demostración: En esta prueba utilizamos primero la fórmula del coseno de una suma para reescribir

$\cos(x+h)$ y después utilizamos de nuevo los límites mencionados anteriormente.

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}h-\cos x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}h}{h}\right)\\ &= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\operatorname{sen}x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}\\ &= (\cos x)\cdot 0-(\operatorname{sen}x)\cdot 1\\ &= -\operatorname{sen}x\end{aligned}$$

- **Derivada de la función tangente:** $(\tan x)'=\sec^2 x$.

Demostración: Para esta función y las siguientes utilizamos la derivada de un cociente y las derivadas del seno y el coseno.

Expresamos $\tan x$ como cociente de $\operatorname{sen}x$ entre $\cos x$ y derivamos usando la regla del cociente:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)'\\ &= \frac{(\operatorname{sen}x)'(\cos x)-(\cos x)'(\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{(\cos x)(\cos x)-(-\operatorname{sen}x)(\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Ahora utilizamos la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}\\ &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2\\ &= \sec^2 x\end{aligned}$$

- **Derivada de la función cotangente:**

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

Demostración: Expresamos $\cot x$ como cociente de $\cos x$ entre $\operatorname{sen}x$ y derivamos usando la regla del cociente.

$$\begin{aligned}(\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)'\\ &= \frac{(\cos x)'(\operatorname{sen}x)-(\operatorname{sen}x)'(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}\\ &= \frac{(-\operatorname{sen}x)(\operatorname{sen}x)-(\cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}\\ &= -\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\end{aligned}$$

nuevamente utilizamos la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}(\cot x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\\ &= -\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)^2\\ &= -\csc^2 x\end{aligned}$$

- **Derivada de la función secante:**

$$(\sec x)'=\tan x\sec x.$$

Demostración: Expresamos $\sec x$ como $1/\cos x$ y derivamos usando la regla del inverso multiplicativo.

$$\begin{aligned}(\sec x)' &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)'\\ &= -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}\\ &= -\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\\ &= \left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)\\ &= \tan x\sec x\end{aligned}$$

- **Derivada de la función cosecante:**

$$(\csc x)'=-\cot x\csc x.$$

Demostración: Expresamos $\csc x$ como $1/\operatorname{sen}x$ y derivamos usando la regla del inverso multiplicativo:

$$\begin{aligned}(\csc x)' &= \left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)'\\ &= -\frac{(\operatorname{sen}x)'}{\operatorname{sen}^2 x}\\ &= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\\ &= -\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)=-\cot x\csc x\end{aligned}$$

Apéndice C

Prueba de las fórmulas para las derivadas de las funciones inversas y trigonométricas inversas

Derivada de la función inversa Si g es una función derivable y f es la inversa de g entonces f es derivable y

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))} \qquad \text{(C.1)}$$

siempre que $g'(f(x))\neq 0$.

Demostración: Haremos una demostración simplificada en la que supondremos que tanto f como g son derivables y simplemente calcularemos la derivada de f en función de la derivada de g. Si $y=f(x)$ y $x=g(y)$ son funciones inversas una de la otra, entonces:

$$y=f(g(y))$$

Derivamos de ambos lados de la igualdad usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}1&=f'(g(y))g'(y)\\&=f'(x)g'(y)\end{aligned}$$

Así que:

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$$

Como $y=f(x)$, podemos escribir todo en términos de x

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$$

Derivada de $x^{1/n}$ si n es un número natural. Si n es un número natural entonces:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

Es decir, se sigue la misma regla que cuando derivamos x^n, *"Poner el exponente como coeficiente y restar uno al exponente"*.

Demostración: Si n es par, entonces $x^{\frac{1}{n}}$ está definida únicamente para $x\geq 0$, en cambio, si n es impar $x^{\frac{1}{n}}$ está definida para todo x real.

La función $y=f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ es la inversa de la función $x=g(y)=y^n$.

Por la fórmula de la derivada de la función inversa

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$$

Obtenemos:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{ny^{n-1}}$$

Ahora sustituimos y por $x^{\frac{1}{n}}$:

$$\begin{aligned}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'&=\frac{1}{n\left(x^{1/n}\right)^{n-1}}\\&=\frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}}\\&=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}$$

Derivada de la función arco seno:

$$(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demostración: Si $y=\operatorname{arcsen} x$ entonces $x=\operatorname{sen} y$ y $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. Por la fórmula (C.1) obtenemos:

$$(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{(\operatorname{sen} y)'}=\frac{1}{\cos y}$$

De la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^2 y+\cos^2 y=1$$

obtenemos que:

$$\cos y=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

Por lo tanto,

$$(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivada de la función arco coseno:

$$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demostración: Si $y=\arccos x$, entonces $x=\cos y$ y $0<y<\pi$. Por la fórmula (C.1) obtenemos:

$$(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=\frac{1}{-\operatorname{sen} y}$$

De la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$$

obtenemos que:

$$\operatorname{sen} y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

Por lo tanto,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- **Derivada de la función arco tangente:**

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Demostración: Si $y = \arctan x$, entonces $x = \tan y$ y $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Por la fórmula (C.1) obtenemos:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

De la identidad trigonométrica:

$$1 + \tan^2 y = \sec^2 y$$

obtenemos que:

$$1 + x^2 = \sec^2 y$$

Por lo tanto,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

- **Derivada de la función arco cotangente:**

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Demostración: Si $y = \operatorname{arccot} x$, entonces $x = \cot y$ y $0 < y < \pi$. Por la fórmula (C.1) obtenemos:

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{-\csc^2 y}$$

De la identidad trigonométrica:

$$1 + \cot^2 y = \csc^2 y$$

obtenemos que:

$$1 + x^2 = \cot^2 y.$$

Por lo tanto:

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

- **Derivada de la función arco secante:**

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Demostración: Si $y = \operatorname{arcsec} x$, entonces $x = \sec y$, con $0 < y < \pi$, $y \neq \frac{\pi}{2}$. Podemos usar un argumento similar a los anteriores, pero es un poco más complicado, pues hay que considerar por separado cuando y está en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ o en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Mejor procedemos del modo siguiente. De la identidad trigonométrica:

$$\sec y = \frac{1}{\cos y}$$

obtenemos:

$$x = \frac{1}{\cos y}$$

$$\cos y = \frac{1}{x}$$

$$y = \arccos\frac{1}{x}$$

entonces:

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Derivamos aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{arcsec} x)' &= \left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{-1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{\frac{x^2}{|x|}\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

En el tercer renglón, recuerda que $\sqrt{x^2}=|x|$. Por lo tanto,

$$(\operatorname{arc}\sec x)'=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

La derivada de arcsec no existe en 1 ni en −1.

Derivada de la función arco cosecante:

$$(\operatorname{arc}\csc x)'=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Demostración: Si $y=\operatorname{arc}\csc x$, entonces $x=\csc y$, y $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, $y\neq 0$. Usaremos un argumento similar al que usamos para el arco secante. Como:

$$\csc y=\frac{1}{\operatorname{sen} y}$$

Entonces:

$$\operatorname{arc}\csc x=\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Derivamos aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}(\operatorname{arc}\csc x)'&=\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'\\
&=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\\
&=-\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&=-\frac{1}{\frac{x^2}{|x|}\sqrt{x^2-1}}\\
&=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\operatorname{arc}\csc x)'=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

La derivada de arccsc no existe en 1 ni en −1.

Apéndice D

Demostración de las propiedades de la función logaritmo natural

Propiedad del exponente: Si x es un número real no negativo y r es un número real entonces:

$$\ln x^r=r\ln x$$

Demostración:

1. Si n es un número natural, ya vimos en (10.6) que:

$$\ln x^n=n\ln x$$

2. Supongamos que $n=0$. Por convención, $x^0=1$ y entonces:

$$\begin{aligned}\ln x^n&=\ln 1\\&=0\\&=n\ln x\end{aligned}$$

3. Si n es un número natural, entonces $-n$ es un entero negativo y

$$\ln x^{-n}=\ln\frac{1}{x^n}$$

Por la propiedad del logaritmo del cociente (10.7), obtenemos:

$$\ln x^{-n}=-\ln x^n$$

y como n es un número natural, podemos pasar el exponente a ser coeficiente usando (10.6):

$$\ln x^{-n}=-n\ln x$$

4. Si r es de la forma $r=\frac{1}{m}$ donde m es un número natural, entonces:

$$\ln\left(\left(x^{1/m}\right)^m\right)=m\ln x^{1/m}$$

por otro lado:

$$\begin{aligned}\ln\left(\left(x^{1/m}\right)^m\right)&=\ln x^{m/m}\\&=\ln x\end{aligned}$$

así que:

$$\ln x = m \ln x^{1/m}$$

despejando $\ln x^{1/m}$ tenemos:

$$\ln x^{1/m} = \frac{1}{m}\ln x$$

5. Si r es de la forma $r = \frac{n}{m}$ con n entero y m natural,

$$\ln x^{n/m} = \ln\left(x^n\right)^{1/m}$$

por el inciso anterior

$$\ln x^{n/m} = \frac{1}{m}\ln x^n$$

y por el inciso 1

$$\ln x^{n/m} = \frac{n}{m}\ln x$$

6. Si r es irracional, es necesaria la definición (10.19):

$$x^r = e^{r \ln x}$$

y aplicar (10.15):

$$\ln x^r = r \ln x,$$

como se vio para probar este caso en la página 335.

Los siguientes dos resultados nos sirvieron para probar que el número e está entre 2 y 3 (página 338).

1. Probar que para cada natural n se cumple;

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1, \qquad \text{(D.1)}$$

en particular, cuando $n = 1$, tenemos:

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$$

Demostración: Por (10.6) tenemos:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Por lo tanto, para obtener (D.1) basta probar que:

$$\frac{n}{n+1} < n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$$

O lo que es lo mismo, al dividir entre n

$$\frac{n}{n+1} < n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \qquad \text{(D.2)}$$

Para probarlo, recordamos que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ es el área de la región por debajo de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y encima del intervalo $\left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$.

Consideremos los rectángulos por abajo y por arriba de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, con base en ese intervalo $\left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$.

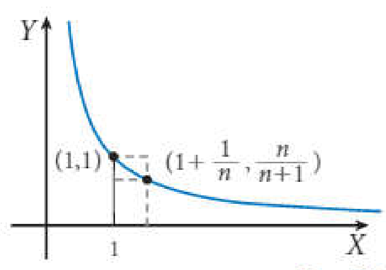


Figura D.1

El primero de ellos tiene un área menor que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ y dicha área vale:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

(Figura D.1); o sea,

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

En tanto, que el segundo tiene un área mayor que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ y vale:

$$1\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

(Figura D.1); es decir,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Tomando $n = 1$, obtenemos la segunda afirmación que queríamos probar:

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

2. Probar que

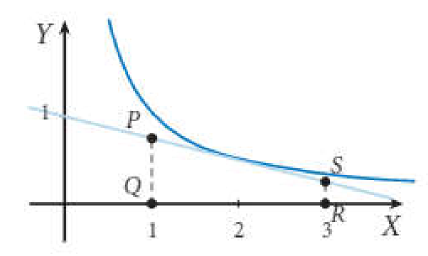
$$1 < \ln(3). \qquad \text{(D.3)}$$

Demostración: Consideramos la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\frac{1}{x}$ por el punto $\left(2,\frac{1}{2}\right)$, calculando la derivada de f en $x=2$ vemos que esta recta tiene pendiente $-\frac{1}{4}$ y su ecuación es:

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)$$

y corta a las rectas verticales $x=1$ y $x=3$ en los puntos $P\left(1,\frac{3}{4}\right)$ y $S\left(3,\frac{1}{4}\right)$, respectivamente.

En la figura siguiente se tiene el trapecio $PQRS$ con área A_T menor que $\ln(3) = A_{[1,3]}$.



Además, de acuerdo con la fórmula para el área de un trapecio, tenemos:

$$A_T=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)2=1$$

Por lo tanto,

$$1<\ln(3)$$

Demostración de las propiedades de la función exponencial

1. Regla de los exponentes. Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,

$$e^{x+y}=e^x e^y$$

Demostración: Por la propiedad logarítmica (10.3),

$$\begin{aligned}\ln\left(e^x e^y\right)&=\ln e^x+\ln e^y\\&=x+y\end{aligned}$$

Por la definición de la función exponencial (10.17):

$$e^x e^y=e^{x+y}$$

2. Regla de los exponentes. Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\left(e^y\right)^x=\left(e^x\right)^y=e^{xy}$$

Demostración: Por la propiedad (10.15):

$$\ln e^{xy}=xy$$

Por la propiedad logarítmica (10.20):

$$\ln\left(e^y\right)^x=x\ln e^y=xy$$

De la misma manera:

$$\ln\left(e^x\right)^y=y\ln e^x=yx$$

Igualando las tres ecuaciones anteriores tenemos:

$$\ln e^{xy}=\left(\ln e^y\right)^x=\ln\left(e^x\right)^y$$

Por tener los mismos logaritmos, concluimos por (10.10) que:

$$e^{xy}=\left(e^y\right)^x=\left(e^x\right)^y$$

3. $e^0=1$.

Demostración: Como

$$\ln 1=0$$

por (10.12):

$$1=\exp(0)=e^0$$

4. La función exponencial es derivable para todo $x\in\mathbb{R}$ y su derivada es ella misma:

$$(\exp x)'=(\exp x)$$

o con la notación e debe ser:

$$\left(e^x\right)'=e^x.$$

Demostración: Si $y=\exp x$ y $x=\ln y$, por la fórmula (C.1) de la página 515, tenemos:

$$\begin{aligned}(\exp x)'&=\frac{1}{(\ln y)'}\\&=\frac{1}{1/y}\\&=y\\&=\exp x\end{aligned}$$

5. Si g es derivable, entonces

$$\left(e^{g(x)}\right)'=g'(x)e^{g(x)}$$

Demostración: Hagamos $f(x) = e^{g(x)}$, entonces $f = h\circ g$ donde $h(y) = e^y$. Por la regla de la cadena $f'(x)=h'(g(x))\,g'(x)$.

Como $h'(y)=e^y$, tenemos que:

$$f'(x)=\left(e^{g(x)}\right)'=g'(x)e^{g(x)}$$

Demostración de las propiedades de las funciones logarítmicas

Si $a \neq 1$ y $a>0$, entonces:

1. $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$, si $x, y>0$.

Demostración: Como;

$$\log_a(xy)=\frac{\ln xy}{\ln a}$$

Por la propiedad (10.3) del logaritmo natural tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\ln xy}{\ln a}&=\frac{\ln x+\ln y}{\ln a}\\&=\frac{\ln x}{\ln a}+\frac{\ln y}{\ln a}\\&=\log_a(x)+\log_a(y).\end{aligned}$$

2. $\log_a(xr)=\log_a(x)$, si $x>0$ y r es un real arbitrario.

Demostración: Utilizando la propiedad (10.26) tenemos que:

$$\begin{aligned}\log_a\left(x^r\right)&=\frac{\ln x^r}{\ln a}\\&=\frac{r\ln x}{\ln a}\\&=r\log_a x.\end{aligned}$$

3. $\log_a(1)=0$.

Demostración: Por la definición del logaritmo base a se sigue que:

$$\log_a(1)=\frac{\ln 1}{\ln a}=0$$

4. $\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$, si $x>0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}\log_a\left(\frac{1}{x}\right)&=\frac{\ln\frac{1}{x}}{\ln a}\\&=\frac{-\ln x}{\ln a}\\&=\log_a(x).\end{aligned}$$

5. $\log_a(a)=1$.

Demostración: Por la definición del logaritmo base a, se sigue que:

$$\log_a(a)=\frac{\ln a}{\ln a}=1$$

6. $\log_a:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ es uno a uno y su imagen es $\mathbb{R}$.

Demostración: Debemos probar que la función $\log_a(x)$ es uno a uno y suprayectiva.
La propiedad (10.10) de la página 337 nos dice que $\log_a(x)$ es uno a uno.
Por otro lado, si $r\in\mathbb{R}$, entonces $x=a^r$ es tal que $\log_a(x)=r$. O sea, $\mathbb{R}$ es la imagen de la función $\log_a$.

Demostración de las propiedades de las funciones exponenciales

Si $a>0$, $b>0$ y para cualesquiera números reales x y y se tiene:

1. $a^{x+y}=a^x a^y$.

Demostración: Recordamos la definición de a^x, ver (10.19):

$$a^x=e^{x\ln a} \quad \text{para } a>0 \text{ y } x \text{ un real cualquiera} \quad (D.4)$$

Aplicando la definición anterior:

$$\begin{aligned}a^{x+y}&=e^{(x+y)\ln a}\\&=e^{x\ln a+y\ln a}.\end{aligned}$$

Por la regla de los exponentes (10.17):

$$e^{x\ln a+y\ln a}=e^{x\ln a}\,e^{y\ln a}$$

Nuevamente, por la definición (D.4):

$$e^{x\ln a}\,e^{y\ln a}=a^x a^y.$$

2. $(a^x)^y=a^{xy}$.

Demostración: Aplicando la definición (D.4):

$$(a^x)^y=(e^{x\ln a})^y$$

Por la regla de los exponentes (10.18):

$$(e^{x\ln a})^y=e^{xy\ln a}$$

y por la definición (D.4):

$$e^{xy\ln a}=a^{xy}$$

3. $(ab)^x = a^x b^x$.

Demostración: Aplicando la definición (D.4):

$$(ab)^x = e^{x\ln(ab)}$$

Por la propiedad logarítmica (10.3)

$$e^{x\ln(ab)} = e^{x(\ln a + \ln b)}$$
$$= e^{x\ln a + x\ln b}$$

Por la regla de los exponentes (10.17):

$$e^{x\ln a + x\ln b} = e^{x\ln a} e^{x\ln b}$$

Y por la definición (D.4):

$$e^{x\ln a} e^{x\ln b} = a^x b^x$$

4. $a_0 = 1$.

Demostración: Aplicamos la definición de a_0

$$a^0 = e^{0\ln a}$$
$$= e^0$$
$$= 1.$$

5. $a_1 = a$.

Demostración: Aplicamos la definición de a_1

$$a^1 = e^{1\ln a}$$
$$= e^{\ln a}$$
$$= a$$

6. $a^{-x} = \dfrac{1}{ax}$.

Demostración: Aplicamos la definición de a^{-x}

$$a^{-x} = e^{-x\ln a}$$
$$= \frac{1}{e^{x\ln a}}$$
$$= \frac{1}{a^x}.$$

Respuestas de los ejercicios impares

Unidad 1. Introducción

Ejercicios de la página 11.

1. $x>-3$. **3.** $z\le 2$. **5.** $x\ge -\frac{7}{6}$. **7.** $a>1$. **9.** $x<\frac{14}{3}$. **11.** No tiene solución. **13.** $1<x<\frac{11}{4}$. **15.** $\frac{14}{5}\le x<9$. **17.** $-11\le w\le 1$. **19.** $y<\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ o $y>\frac{5+\sqrt{13}}{2}$. **21.** No tiene solución. **23.** $-7\le w<-2$ o $-2<w\le 5$. **25.** $-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{6}$. **27.** $-2<x<-1$. **29.** $-2<x<-\frac{1}{2}$ o $4<x<9$. **31.** $x<-\frac{5}{2}$ o $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$ o $x>6$. **33.** $-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{4}$ o $\frac{2}{3}\le x<\frac{6}{5}$.

Ejercicios de la página 15.

1. $x\in(-4,4)$. **3.** $z\in\left(\frac{4}{3},9\right]$. **5.** $a\in[-8.74,\infty)$. **7.** $x\in\left(-\frac{11}{2},2\right)$. **9.** $x\in(-\infty,10)$. **11.** $[-3,5)$. **13.** $\varnothing$ **15.** $(-\infty,-4]\cup\left(0,\frac{12}{7}\right]$. **17.** $(-\infty,-\infty)$. **19.** $(-\infty,-9.7)$. **21.** $\varnothing$ **23.** $\varnothing$ **25.** $\left(\frac{3}{4},6\right)$. **27.** $(-\infty,\infty)$. **29.** $(-8,-7)\cup\left(-\frac{9}{2},2\right)$. **31.** $\left(\frac{7}{5},\frac{1}{2}\right)$. **33.** $x\in(-\infty,-5)\cup(0,\infty)$. **35.** $x\in\left(\frac{2}{3},1\right)$.

Ejercicios de la página 19.

1. 19. **3.** 0.63. **5.** $\frac{21}{13}$. **7.** $\sqrt{3}$. **9.** $-\sqrt{2}$. **11.** π. **13.** 0.25. **15.** 9. **17.** -1.3. **19.** $\frac{23}{4}$. **21.** Punto medio $x_0=5$; radio $r=3$. **23.** Punto medio $x_0=\frac{3}{2}$; radio $r=\frac{15}{2}$. **25.** Punto medio $x_0=\pi$; radio $r=2\pi$. **27.** $[21-6,21+6]$. **29.** $[1-0.4,1+0.4)$.

Ejercicios de la página 23.

1. $x\in(6,12)$. **3.** $z\in[-20,-4]$. **5.** $x\in\left(-1,\frac{9}{5}\right)$. **7.** $x\in\left[1,\frac{8}{3}\right]$. **9.** $x\in(-\infty,0]\cup\left[\frac{2}{9},\infty\right)$.

Unidad 2. Funciones

Ejercicios de la página 31.

1. $Dom f=\{-4,0,2\}$, $\operatorname{Im} f=\{1,2,3\}$, la regla es $\begin{array}{c}-4\to 1\\ 0\to 2\\ 2\to 3\end{array}$. **3.** $Dom f=\{6,8,10\}$, $\operatorname{Im} f=\{-9,2.5,0.8\}$, la regla es $\begin{array}{c}6\to -9\\ 8\to 2.5\\ 10\to 0.8\end{array}$. **5.** $Dom f=\{-3,-1,2,12,25\}$, $\operatorname{Im} f=\{11,21,-15,-6,11\}$, la regla es $\begin{array}{lcl}-3&\to&11\\ -1&\to&21\\ 2&\to&-15\\ 12&\to&-6\\ 25&\to&11\end{array}$.

7. $f(-9)-42$, $f(\pi)=5\pi+3$, $f(5)=28$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{2}$. **9.** $f(-2)=1$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{6}$, $f(0)=\sqrt{3}$,

$f(-3)=0$. **11.** $f(-4)=1,\ f(-1)=4,\ f(3)=36,\ f(7)=100$. **13.** $f(-6.25)=-6.25,\ f(0)=0,$ $f(2)=8,\ f(11)=35$. **15.** $f(-3.5)=12.25,\ f(-2)=4,\ f(12)=75,\ f(18)=117$. **17.** Las funciones no son iguales. **19.** Las funciones son iguales.

Ejercicios de la página 34.

1. $Dom f=\mathbb{R}$. **3.** $Dom\, h=\mathbb{R}$. **5.** $Dom\, h=\left(-\infty,\frac{3}{4}\right]$. **7.** $Dom f=\mathbb{R}\setminus\{-4,4\}$. **9.** $Dom f=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$. **11.** $Dom\, h=\mathbb{R}\setminus\{-6,1\}$. **13.** $Dom f=(-\infty,-5]\cup[2,\infty)$. **15.** $Dom f=(-\infty,6)\cup(8,\infty)$. **17.** $Dom g=\mathbb{R}\setminus\{-12,12\}$.

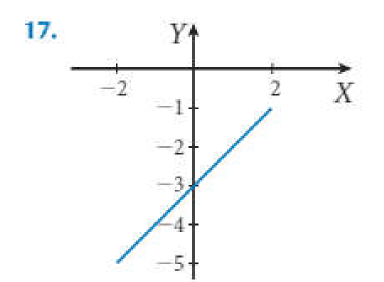
Ejercicios de la página 40.

1. No es la gráfica de una función. **3.** Sí es la gráfica de una función. **5.** No es la gráfica de una función. **7.** No es la gráfica de una función. **9.** $f(-3)=64$. **11.** $h(0)=1$. **13.** $f(-2)=1$. **15.** $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{13}$. **17.** $h(-6)=\frac{35}{19}$. **19.** $f(x-1)=4x^2-9x-16$. **21.** $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{9}{x^2}-\frac{19}{x}+29$. **23.** $g\left(x^2\right)=\frac{2x^4-11x^2+25}{x^2}$. **25.** $h\left(\frac{1}{x+3}\right)=\sqrt{25-\left(\frac{1}{x+3}\right)^2}$. **27.** $g\left(x^2+1\right)=\frac{x^4-7x^2+28}{\sqrt{5-\left(x^2+1\right)^2}}$. **29.** $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{x+1}{9x+8}$. **31.** $f(-8)=-16,$ $f(-4)=-12,\ f(0)=-1,\ f(10)=29,\ f(-7.5)=-15.5$. **33.** $h(-4)=0,\ h(1)=14,\ h(-6)=20,$ $h(0)=-16$. **35.** $f(-12)=\sqrt{147},\ f(-2)=28,\ f(4)=-8,\ f(9)=0,\ f(6)$ no está definido.

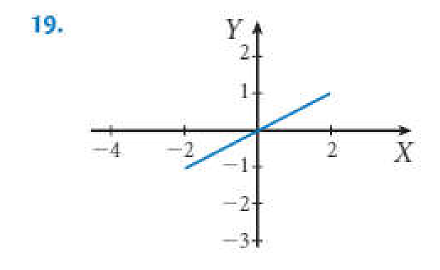
Ejercicios de la página 63.

1. $V=175\,000\ \text{cm}^3$. **3.** 53.027 cm. **5.** $P=1.4$ s. **7.** $v=344.21$ m/s. **9.** $f(-5)=-44,\ f(0)=1,$ $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{2},\ f(10)=91,\ f(a)=9a+1,\ f(-x)=-9x+1,\ f\left(x^2\right)=9x^2+1$. **11.** $g(9)=\sqrt{3},\ g(15)=3,$ $g\left(\frac{29}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{34},\ g\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{\frac{1}{x}-6},\ g(x+5)=\sqrt{x-1},\ g\left(\sqrt{x+5}\right)=\sqrt{\sqrt{x+5}-6},\ g(x-6)=\sqrt{x-12}$.
13. $g(2)=0,\ g(x+1)=\ln x,\ g(e+2)=\ln(e+1),\ g\left(\frac{2}{x}\right)=\ln\left(\frac{2}{x}-1\right),\ g(x+3)=\ln(x+2),$ $g\left(\sqrt{x}\right)=\ln\left(\sqrt{x}-1\right),\ g(3w)=\ln(3w-1)$. **15.** $f(-2)=\cos 4,\ f(0)=1,\ f(-1)=\cos\sqrt{7},$ $f(b)=\cos\sqrt{b^2-6b},\ f(-x)=\cos\sqrt{x^2+6x},\ f(6a)=\cos\sqrt{36a^2-36a},$ $f\left(x^2+6x\right)=\cos\sqrt{x^4+12x^3+30x^2-36x}$.

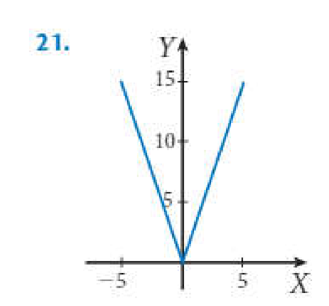
17.



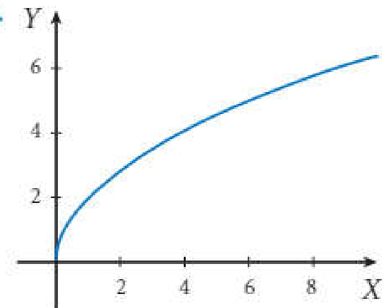
19.



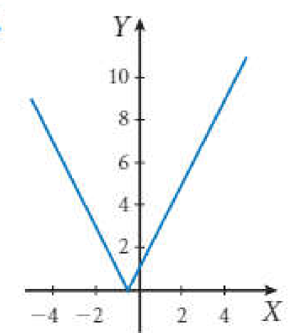
21.



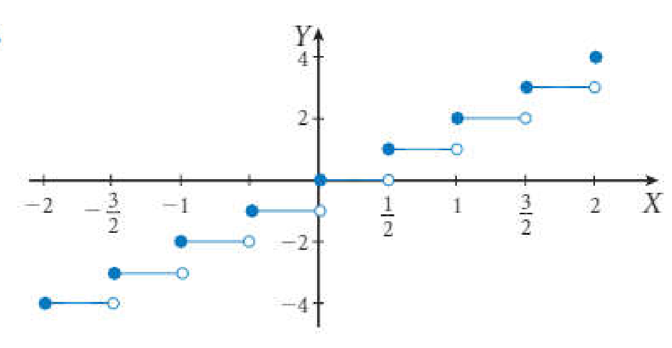
23.



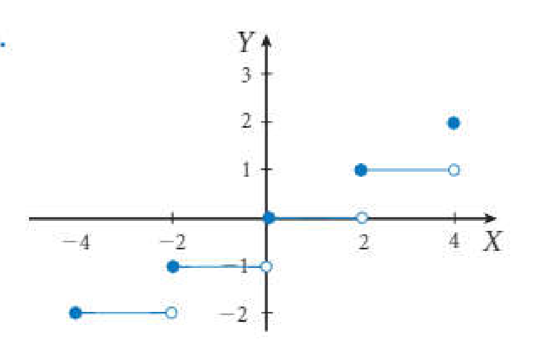
25.



27.



29.



Ejercicios de la página 72.

1. $(f+g)(-1)=-8$, $(f-g)\left(\frac{1}{3}\right)=-12$, $(fg)(-2)=-48$, $\left(\frac{f}{g}\right)(0)=-\frac{8}{5}$. **3.** $(f+g)(-1)=\frac{35}{2}$, $(f-g)\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{35}{6}$, $(fg)(-2)=22$, $\left(\frac{f}{g}\right)(0)=\frac{1}{5}$. **5.** $(f+g)(-1)=2$, $(f-g)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{9}$, $(fg)(-2)=-27$, $\left(\frac{f}{g}\right)(0)=-1$. **7.** $(f+g)(-1)=9$, $(f-g)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{21}-\frac{20}{9}$, $(fg)(-2)=0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(0)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

9. $(f+g)(-1)=\frac{17}{3}$, $(f-g)\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{11}{3}$, $(fg)(-2)=\frac{45}{4}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(0)=\frac{2}{7}$. **11.** $(f+g)(-1)=-\frac{19}{4}$, $(f-g)\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{49}{24}$, $(fg)(-2)=-2$, $\left(\frac{f}{g}\right)(0)=0$. **13.** $(f+g)(-1)=-2$, $(f-g)\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{3}$, $(fg)(-2)=6$, $\left(\frac{f}{g}\right)(0)=0$. **15.** $(f+g)(\pi)=-1$. **17.** $(fg)\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. **19.** $(f+g)\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

21. $(f+g)(x)=15x+2$, $Dom(f+g)=\mathbb{R}$, $(fg)(x)=56x^2+13x-3$, $Dom(fg)=\mathbb{R}$.

23. $(f+g)(x)=x^3-4x-8$, $Dom(f+g)=\mathbb{R}$, $(fg)(x)=2x^5-8x^4+20x^3-64x^2+80x-240$, $Dom(fg)=\mathbb{R}$. **25.** $(f+g)(x)=\frac{4x^3-x^2-17x+5}{4x-9}$, $Dom(f+g)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{9}{4}\right\}$, $(fg)(x)=\frac{x^3+7x^2+10x}{4x-9}$, $Dom(fg)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{9}{4}\right\}$ **27.** $(f+g)(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$, $Dom(f+g)=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $(fg)(x)=\frac{x}{x-1}$, $Dom(fg)=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. **29.** $(f+g)(x)=x^3-x+\sqrt{x+8}$, $Dom(f+g)=[-8,\infty)$, $(fg)(x)=\left(x^3-x\right)\sqrt{x+8}$, $Dom(fg)=[-8,\infty)$. **31.** $(f+g)(x)=\frac{x+12}{\sqrt{x-7}}+\sqrt{x-4}$, $Dom(f+g)=(7,\infty)$, $(fg)(x)=\frac{(x+12)\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-7}}$, $Dom(fg)=(7,\infty)$. **33.** $(f+g)(x)=\sqrt{x+5}+\frac{x}{x^2-4}$, $Dom(f+g)=[-5,\infty)\setminus\{-2,2\}$, $(fg)(x)=\frac{x\sqrt{x+5}}{x^2-4}$,

$Dom(fg)=[-5,\infty)\setminus\{-2,2\}$. **35.** $(f+g)(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}+\frac{x-9}{\sqrt{16-x^2}}$, $Dom(f+g)=(-4,-3)\cup(3,4)$, $(fg)(x)=\frac{x^2-8x-9}{\sqrt{(x^2-9)(16-x^2)}}$, $Dom(fg)=(-4,-3)\cup(3,4)$.

37. $(f+g)(x)=\begin{cases} x+\ln(x+6) & \text{si } x\in(-6,1) \\ 2+\ln(x+6) & \text{si } x\in[2,12) \end{cases}$, $Dom(f+g)=(-6,1)\cup[2,12)$,

$(fg)(x)=\begin{cases} x\ln(x+6) & \text{si } x\in(-6,1) \\ 2\ln(x+6) & \text{si } x\in[2,12) \end{cases}$, $Dom(fg)=(-6,1)\cup[2,12)$.

39. $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{4x-9}$, $Dom\frac{1}{f}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{9}{4}\right\}$ **41.** $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{4x^2-49}$, $Dom\frac{1}{f}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right\}$. **43.** $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{9x^2-64}}$, $Dom\frac{1}{f}=\left(-\infty,-\frac{8}{3}\right)\cup\left(\frac{8}{3},\infty\right)$. **45.** $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{3x-15}{x-11}$, $Dom\frac{1}{f}=\mathbb{R}\setminus\{5,11\}$. **47.** $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{x^2+16x+60}{x^2+4x-45}$, $Dom\frac{1}{f}=\mathbb{R}\setminus\{-10,-9,-6,5\}$. **49.** $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\sqrt{\frac{x+13}{x-8}}$, $Dom\frac{1}{f}=(-\infty,-13)\cup(8,\infty)$.

51. $(f-g)(x)=x^2+3x-3$, $Dom(f-g)=\mathbb{R}$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+7}$, $Dom\left(\frac{f}{g}\right)=\mathbb{R}\setminus\{-7\}$.

53. $(f-g)(x)=-5x-2$, $Dom(f-g)=\mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+12}{6x+14}$, $Dom\left(\frac{f}{g}\right)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{7}{3}\right\}$.

55. $(f-g)(x)=\frac{x^3-6}{2x+9}-\sqrt{4x-14}$, $Dom(f-g)=\left[\frac{7}{2},\infty\right)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^3-6}{(2x+9)\sqrt{4x-14}}$, $Dom\left(\frac{f}{g}\right)=\left(\frac{7}{2},\infty\right)$.

57. $(f-g)(x)=e^{x+10}-x^3+2x^2+15x$, $Dom(f-g)=\mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{e^{x+10}}{x^3-2x^2-15x}$, $Dom\left(\frac{f}{g}\right)=\mathbb{R}\setminus\{-3,0,5\}$.

59. $Dom(f-g)=\mathbb{R}\setminus\{-6\}$, $(f-g)(x)=\ln(x^2+12x+36)-\sqrt{x^4+9}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ln(x^2+12x+36)}{\sqrt{x^4+9}}$, $Dom\left(\frac{f}{g}\right)=\mathbb{R}\setminus\{-6\}$. **61.** $(f-g)(x)=\begin{cases} -3 & \text{si } x\in[-10,4] \\ 1 & \text{si } x\in(7,13) \end{cases}$, $Dom(f-g)=[-10,4]\cup(7,13)$,

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3}{x} & \text{si } x\in[-10,4]\setminus\{0\} \\ \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x\in(7,13) \end{cases}$, $Dom\left(\frac{f}{g}\right)=([-10,4]\cup(7,13))\setminus\{0\}$.

Ejercicios de la página 81.

1. $f(x)=x^{12}$, $g(x)=x^3+6x^2$. **3.** $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2-6$. **5.** $f(x)=\cos x$, $g(x)=\ln x$.

7. $f(x)=e^x$, $g(x)=\tan x$. **9.** $f(x)=\operatorname{sen}(x)$, $g(x)=\sqrt{x}$. **11.** $f(x)=x+7$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

13. $(f\circ g)(x)=\operatorname{sen}(x^2-3x-13)$, $Dom(f\circ g)=\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=\operatorname{sen}^2 x-3\operatorname{sen}x-13$, $Dom(g\circ f)=\mathbb{R}$.

15. $(f\circ g)(x)=\ln(x^2+7)$, $Dom(f\circ g)=\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=(\ln x)^2+7$, $Dom(g\circ f)=(0,\infty)$.

17. $(f\circ g)(x)=|2x+5|$, $Dom(f\circ g)=\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=2|x|+5$, $Dom(g\circ f)=\mathbb{R}$.

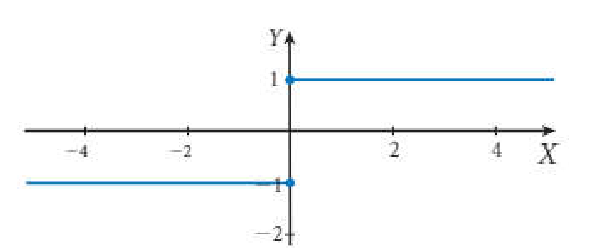
19. $(f\circ g)(x)=16x^4+112x^3+196x^2+7$, $Dom\,(f\circ g)=\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=4x^4+70x^2+294$, $Dom\,(g\circ f)=\mathbb{R}$. **21.** $(f\circ g)(x)=x+10$, $Dom\,(f\circ g)=[-9,\infty)$, $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2+10}$, $Dom\,(g\circ f)=\mathbb{R}$. **23.** $(f\circ g)(x)=\frac{6x+4}{36x^2-60x+21}$, $Dom(f\circ g)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7}{6},\frac{1}{2}\right\}$, $(g\circ f)(x)=\frac{-5x^2+6x+74}{x^2-4}$, $Dom\,(g\circ f)=\mathbb{R}\setminus\{2,2\}$. **25.** $(f\circ g)(x)=\frac{x^2+3x-9}{\sqrt{x^2+3x-10}}$, $Dom\,(f\circ g)=(-\infty,-5)\cup(2,\infty)$, $(g\circ f)(x)=\frac{x^2}{x-1}+\frac{3x}{\sqrt{x-1}}-9$, $Dom\,(g\circ f)=(1,\infty)$. **27.** $(f\circ g)(x)=\frac{\left(\sqrt{25+x^2}\right)^2+3\left(\sqrt{25+x^2}\right)-1}{\left(\sqrt{25+x^2}\right)^2+\left(\sqrt{25+x^2}\right)-12}$, $Dom\;(f\circ g)=\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=\sqrt{25+\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+x-12}\right)^2}$, $Dom\,(g\circ f)=\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}$. **29.** $(f\circ g)(x)=\frac{\frac{2x}{\sqrt{x-6}}+3}{\sqrt{\frac{2x}{\sqrt{x-6}}-4}}$, $Dom\;(f\circ g)=(6,\infty)$, $(g\circ f)(x)=\frac{2\left(\frac{x+3}{\sqrt{x-4}}\right)}{\sqrt{\frac{x+3}{\sqrt{x-4}}-6}}$, $Dom\,(g\circ f)=\left(4,15-6\sqrt{2}\right)\cup\left(15+6\sqrt{2},\infty\right)$.

Ejercicios de la página 85.

1. $\frac{\cos u}{u}$. **3.** $\operatorname{sen} u$. **5.** 5^{-u}. **7.** $u\sqrt{u+2}$. **9.** $\frac{u^3}{1+u}$.

Ejercicios de repaso de la página 87.

1. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\geq 0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$



3. 5. **5.** $2x+h$.

7. $-\frac{1}{(x+h)x}$. **9.** $(f\circ g)(x)=4x^6-32x^4+6x^3+64x^2-24x$, $Dom\;(f\circ g)=\mathbb{R}$. **11.** $(f\circ g)(x)=\frac{x+7}{4x+4}$, $Dom\;(f\circ g)=\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$. **13.** $(f\circ g)(x)=\frac{\frac{1}{x+5}+\frac{4}{\sqrt{x+5}}-1}{\frac{1}{x+5}-\frac{1}{\sqrt{x+5}}-6}$, $Dom\;(f\circ g)=(-5,\infty)\setminus\left\{-\frac{44}{9}\right\}$.

15. $(f\circ g)(x)=\begin{cases}(x+5)^2 & \text{si } -3\leq x<2\\ (2x-3)^2 & \text{si } 2\leq x<6\end{cases}$, $Dom(f\circ g)=[-3,6)$. **17.** $(u+1)^2\sqrt{u}$. **19.** $\frac{u-2}{u\ln u}$.

Autoevaluación de la página 89.

1. b. **2.** c. **3.** c. **4.** c. **5.** b. **6.** d. **7.** a.

Unidad 3. Continuidad de funciones

Ejercicios de la página 104.

1. Es continua en $\mathbb{R}$. **3.** Es continua en $\mathbb{R}$. **5.** Es continua en $\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2\}$. **7.** Es continua en $\mathbb{R}$. **9.** Es continua en $\mathbb{R}\setminus\left\{\ldots-\frac{3}{2}\pi,-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi,\ldots\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi \text{ con } n\in\mathbb{Z}\right\}$. **11.** Es continua en $\mathbb{R}\setminus\{-6,8\}$.

Ejercicios de la página 111.

1. Es continua en $\mathbb{R}$. **3.** Es continua en $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi \text{ con } n\in\mathbb{Z}\right\}$. **5.** Es continua en $\mathbb{R}$. **7.** Es continua en $\mathbb{R}\setminus\{n\pi \text{ con } n\in\mathbb{Z}\}$. **9.** Es continua en $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}n \text{ con } n\in\mathbb{Z}\right\}$. **11.** Es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicios de la página 114.

1. Las respuestas pueden variar, una de ellas es: -2 y -1. **3.** 3 y 4.

Ejercicios de repaso de la página 115.

1. Es continua en $\mathbb{R}$. **3.** Es continua en $[0,\infty)$. **5.** Es continua en $\mathbb{R}\setminus\{-2,2,4\}$. **7.** Es continua en $\mathbb{R}$. **9.** Es continua en $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi \text{ con } n\in\mathbb{Z}\right\}$. **11.** Es continua en $\mathbb{R}$. **13.** Las respuestas pueden variar, una de ellas es: en el intervalo $(-2,0)$ hay una raíz. **15.** Las respuestas pueden variar, una de ellas es: en el intervalo $(-4,0)$ hay una raíz.

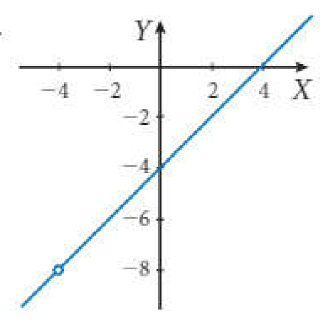
Autoevaluación de la página 116.

1. a. **2.** d. **3.** c. **4.** d. **5.** c.

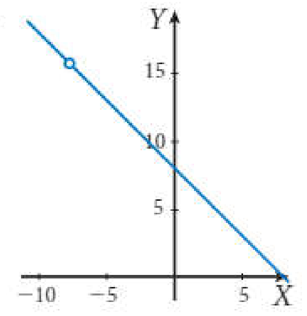
Unidad 4. Límites de funciones

Ejercicios de la página 123.

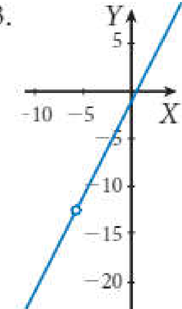
1. $\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^2-16}{x+4}=-8$.



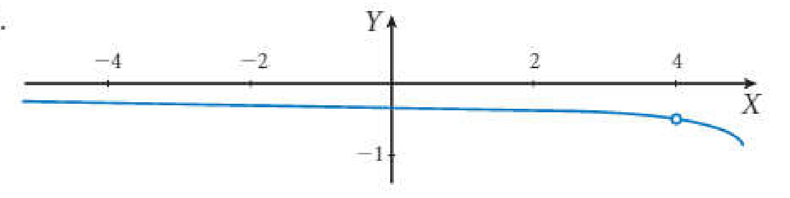
3. $\lim\limits_{x\to-8}\frac{64-x^2}{x+8}=16$.



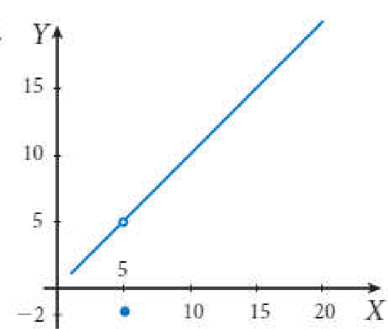
5. $\lim\limits_{x\to-6}\frac{2x^2+11x-6}{x+6}=-13$.



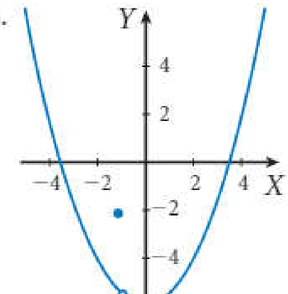
7. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{5-x}-1}{x-4}=-\frac{1}{2}$.



9. $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 5.$

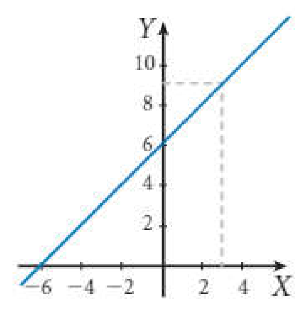


11. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -5.5.$

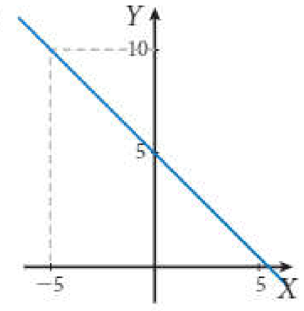


Ejercicios de la página 125.

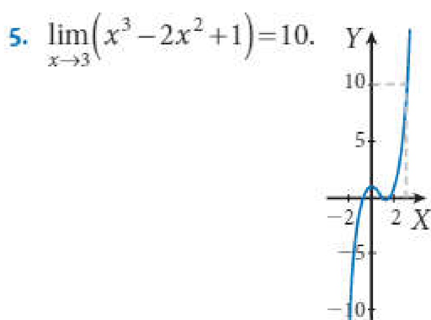
1. $\lim\limits_{x \to 3} (x+6) = 9.$



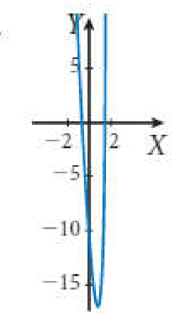
3. $\lim\limits_{x \to -5} (-x+5) = 10.$



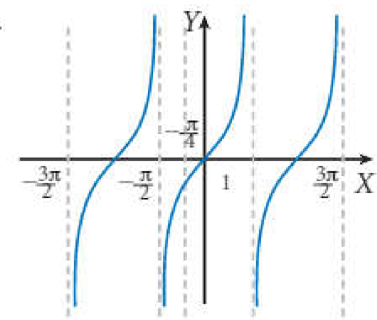
5. $\lim\limits_{x \to 3} \left(x^3 - 2x^2 + 1\right) = 10.$



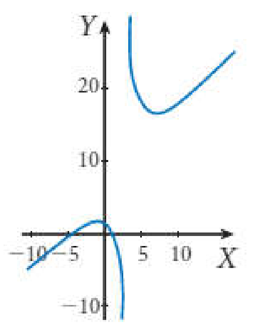
7. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^5 + 8x^4 - 12x - 11\right) = -11.$



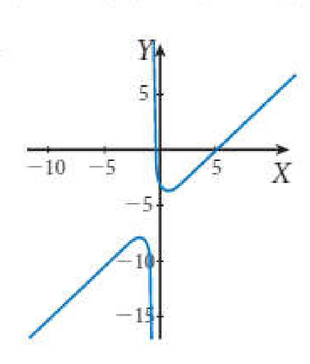
9. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} (\tan x) = -1.$



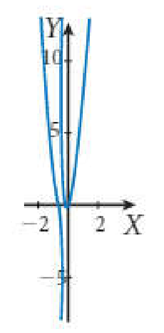
11. $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2+3x-4}{x-3} = 0.$



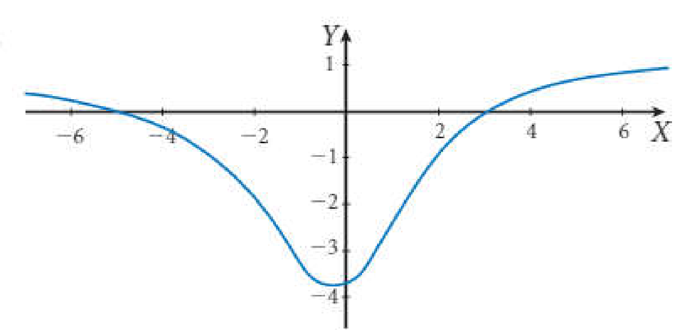
13. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{5x^2-23x-10}{5x+3} = -\frac{81}{22}.$



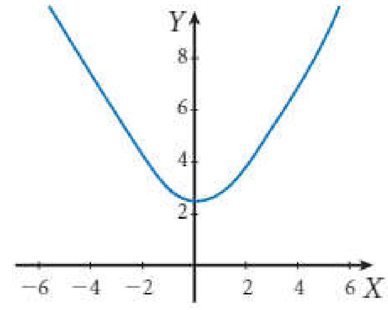
15. $\lim\limits_{x \to \frac{2}{5}} \frac{25x^3+20x^2+3x}{5x+2} = \frac{3}{2}.$



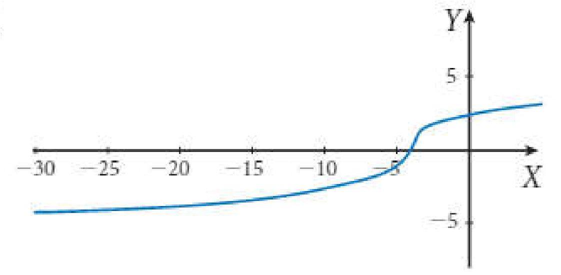
17. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+2x-15}{x^2+4} = -\frac{15}{8}$.



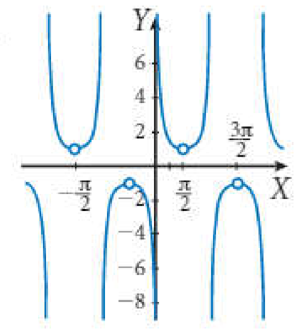
19. $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{3x^2+6} = 3$.



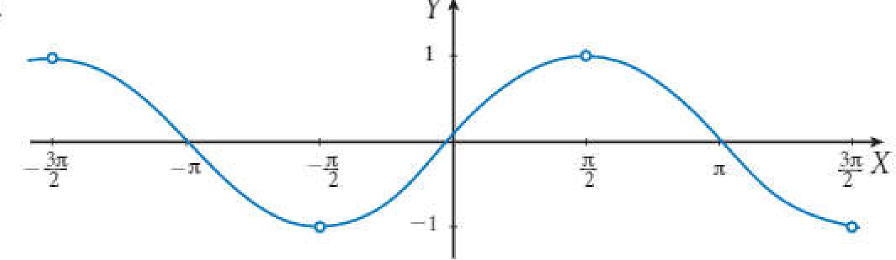
21. $\lim\limits_{x\to -25} \sqrt[3]{3x+12} = -\sqrt[3]{63}$.



23. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\sec x \cot x) = \sqrt{2}$.

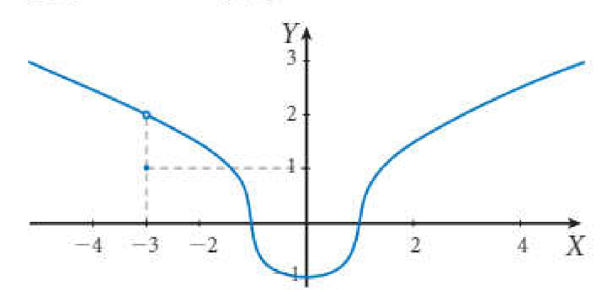


25. $\lim\limits_{x\to \pi} (\cos x \tan x) = 0$.

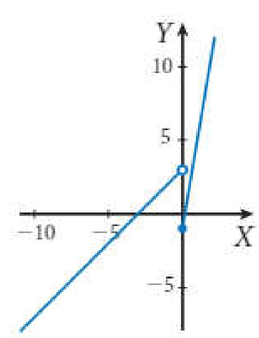


Ejercicios de la página 128.

1. $f(-3)=1$. $\lim\limits_{x\to -3^{+}} f(x)=2$. $\lim\limits_{x\to -3^{-}} f(x)=2$. $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=2$. La función es discontinua en $x=-3$.

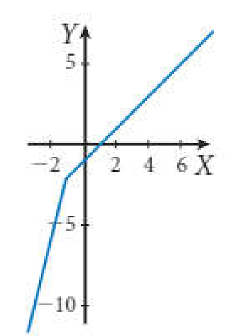


3. $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)=3$. $\lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x)=-1$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe. $\lim\limits_{x\to -1^{+}} f(x)=2$. $\lim\limits_{x\to -1^{-}} f(x)=2$. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$.

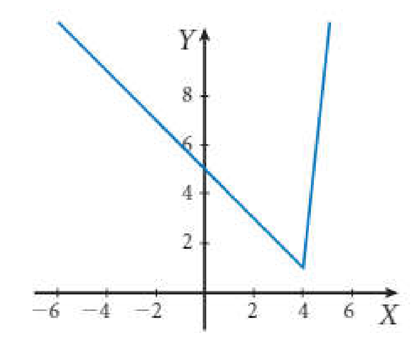


5. $\lim\limits_{x\to -1^{+}} f(x)=-2$. $\lim\limits_{x\to -1^{-}} f(x)=-2$. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-2$.

$\lim\limits_{x\to \sqrt{2}^{+}} f(x)=\sqrt{2}-1$. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}^{-}} f(x)=\sqrt{2}-1$. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} f(x)=\sqrt{2}-1$.



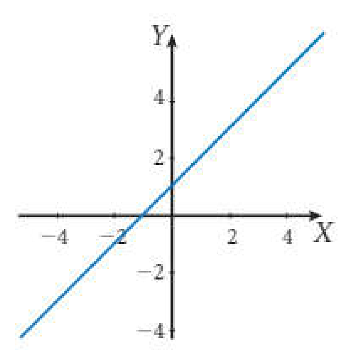
7. $\lim\limits_{x\to 4^{+}} f(x)=1$. $\lim\limits_{x\to 4^{-}} f(x)=1$. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=1$. $\lim\limits_{x\to -4^{+}} f(x)=9$. $\lim\limits_{x\to -4^{-}} f(x)=9$. $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=9$.



9. $\lim_{x\to\frac{1}{6}^-} f(x)=5.$ $\lim_{x\to\frac{1}{6}^+} f(x)=10.$ $\lim_{x\to\frac{1}{6}} f(x)$ no existe.

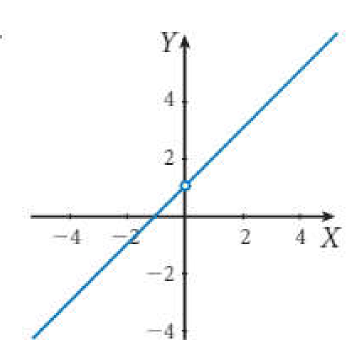
$\lim_{x\to-\frac{1}{4}^-} f(x)=\frac{75}{16}.$ $\lim_{x\to-\frac{1}{4}^+} f(x)=\frac{75}{16}.$ $\lim_{x\to-\frac{1}{4}} f(\mathbf{x})=\frac{75}{16}.$


11. $\lim_{x\to2^-} f(x)=3.$ $\lim_{x\to2^+} f(x)=3.$ $\lim_{x\to2} f(x)=3$. $\lim_{x\to-3^-} f(x)=-2.$ $\lim_{x\to-3^+} f(x)=-2.$ $\lim_{x\to-3} f(x)=-2.$

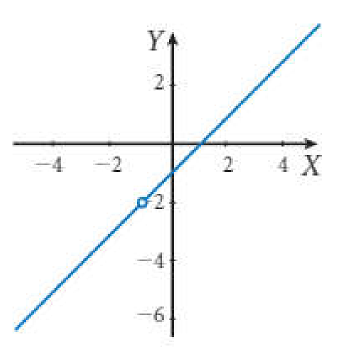


Ejercicios de la página 134.

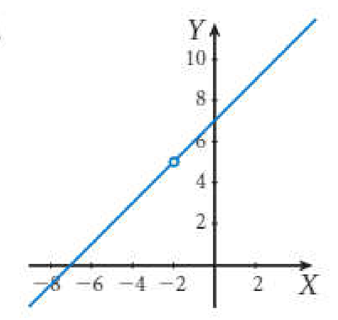
1. $\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{x}=1.$



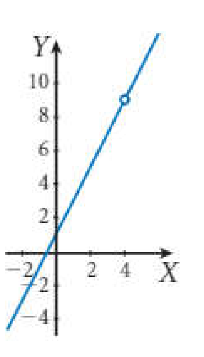
3. $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2.$



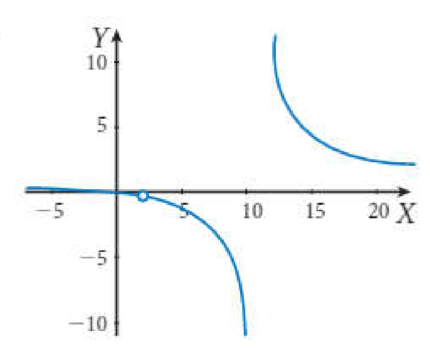
5. $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+9x+14}{x+2}=5.$



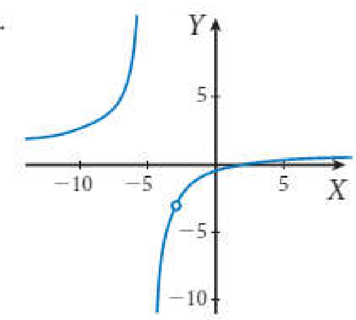
7. $\lim_{x\to4}\frac{2x^2-7x-4}{x-4}=9.$



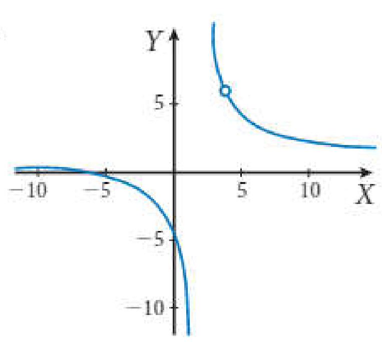
9. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(x-11)} = -\frac{4}{9}$.



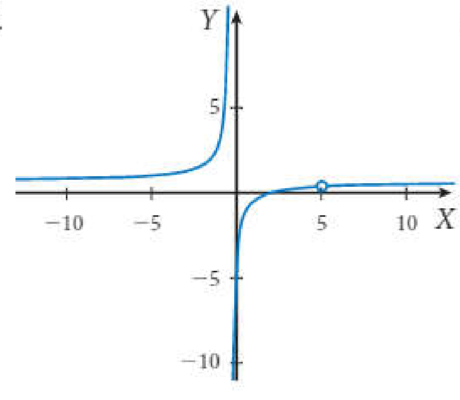
11. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x^2+8x+15} = -3$.



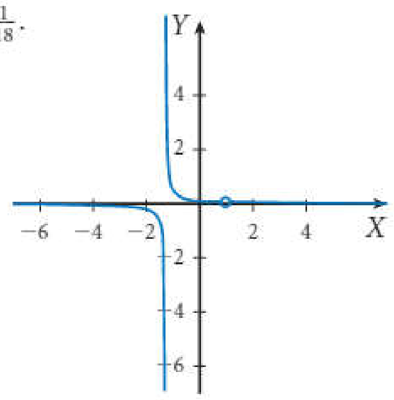
13. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2+4x-32}{x^2-6x+8} = 6$.



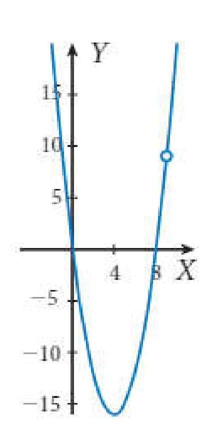
15. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{2x^2-14x+20}{3x^2-14x-5} = \frac{3}{8}$.



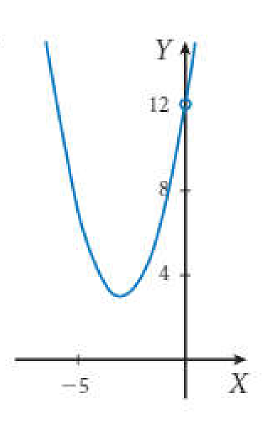
17. $\lim\limits_{x \to \frac{9}{7}} \frac{9-7x}{81-49x^2} = \frac{1}{18}$.



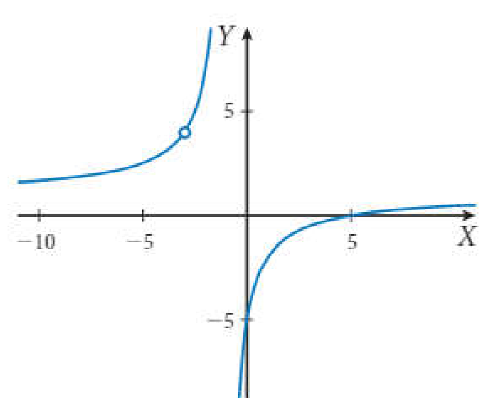
19. $\lim\limits_{x \to 9} \frac{x^3-17x^2+72x}{x-9} = 9$.



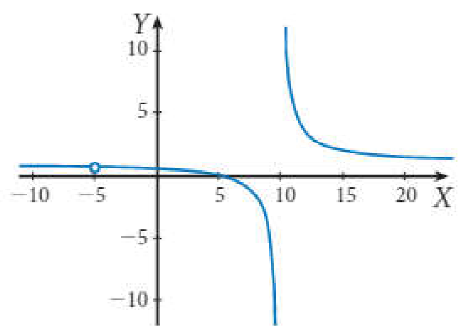
21. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h} = 12$.



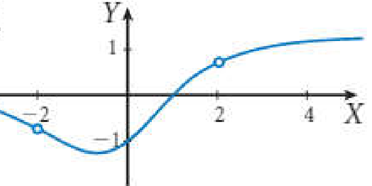
23. $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+x^2-21x-45}{x^3+7x^2+15x+9} = 4.$



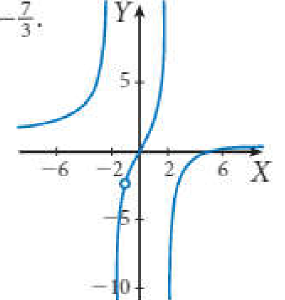
25. $\lim_{x\to -5} \frac{x^3+5x^2-25x-125}{x^3-75x-250} = \frac{2}{3}.$



27. $\lim_{x\to -4} \frac{x^4+3x^3-8x^2-12x+16}{x^4-16} = 0.$

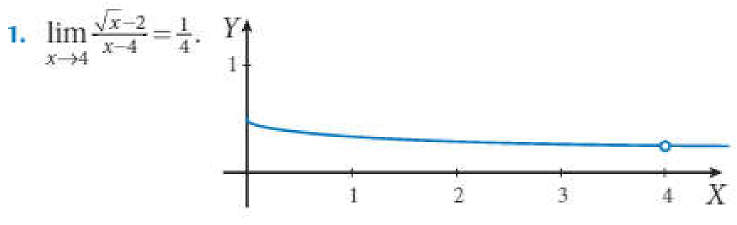


29. $\lim_{x\to -1} \frac{x^4-6x^3-x^2+6x}{x^4-5x^2+4} = -\frac{7}{3}.$

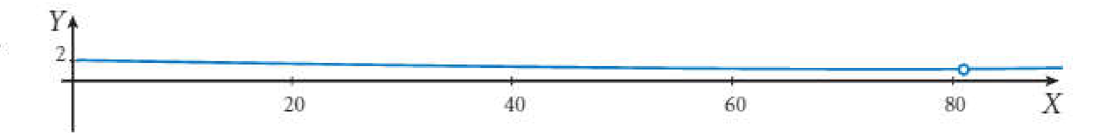


Ejercicios de la página 138.

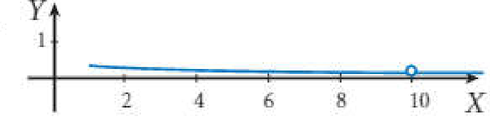
1. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}.$



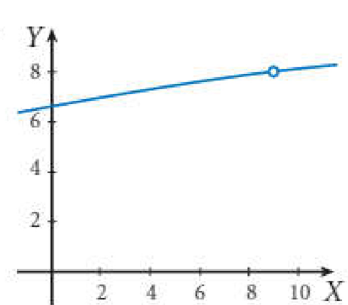
3. $\lim_{x\to 81} \frac{18\sqrt{x}-162}{x-81} = 1.$



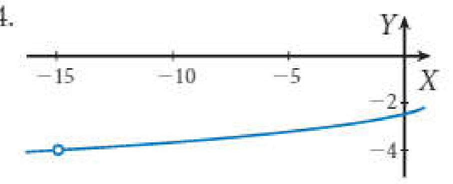
5. $\lim_{x\to 10} \frac{3-\sqrt{x-1}}{10-x} = \frac{1}{6}.$



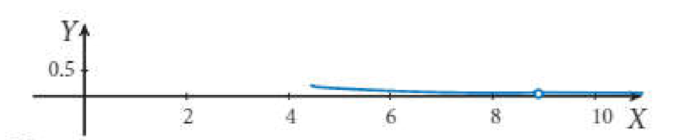
7. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x+7}-4}=8.$



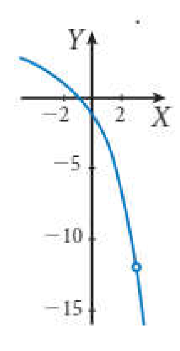
9. $\lim\limits_{x\to -15}\frac{x+15}{\sqrt{4-4x}-8}=-4.$



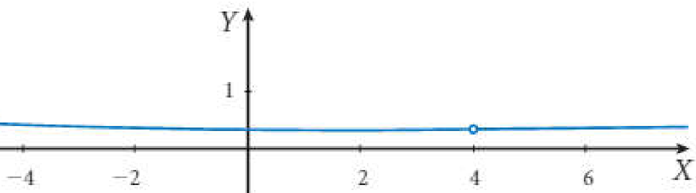
11. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{2x-9}-3}{x^2-9x}=\frac{1}{27}.$



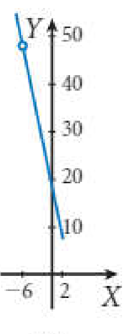
13. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^2-2x+6}-x}=-12.$



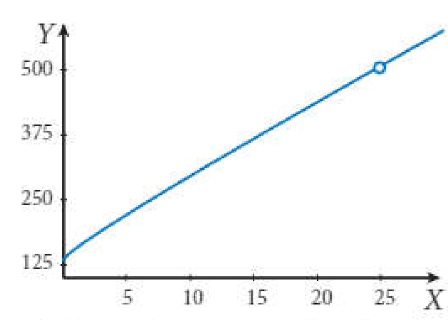
15. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{13-x}}{x-4}=\frac{1}{3}.$



17. $\lim\limits_{x\to -6}\frac{x^2-36}{\sqrt{4-2x}-4}=48.$

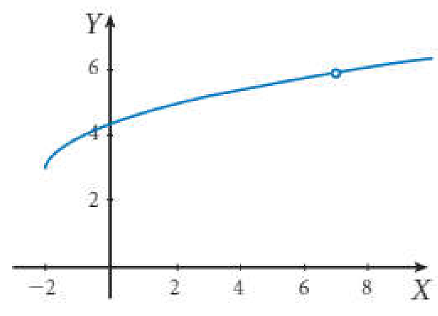


19. $\lim\limits_{x\to 25}\frac{x^2-625}{\sqrt{x}-5}=500.$

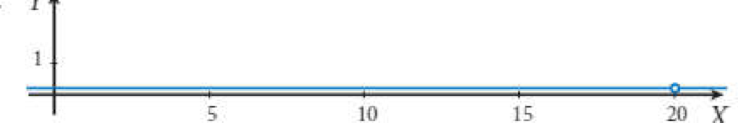


En la figura las escalas de los ejes son distintas.

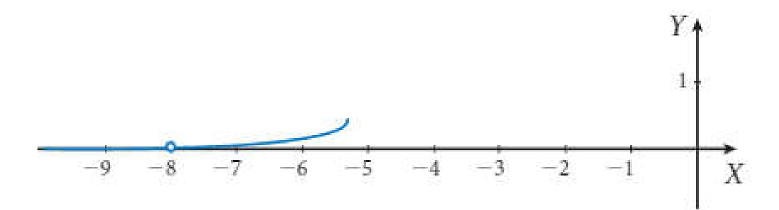
21. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x+2}-3}=6.$



23. $\lim\limits_{x\to20}\frac{\sqrt{x+5}-5}{x-20}=\frac{1}{10}$.

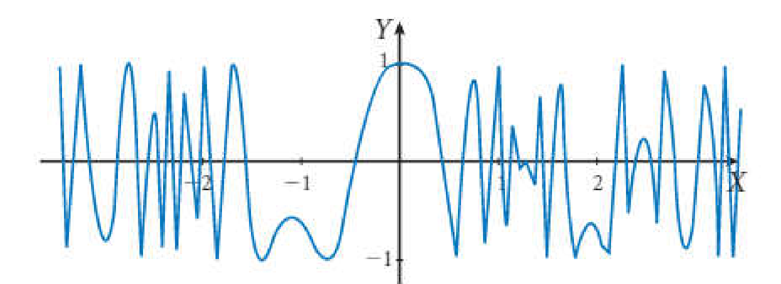


25. $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{x^2-28}-\sqrt{x^2+3x-4}}{x^2+11x+24}=\frac{1}{20}$.

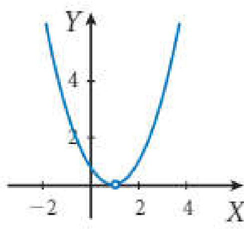


Ejercicios de la página 141.

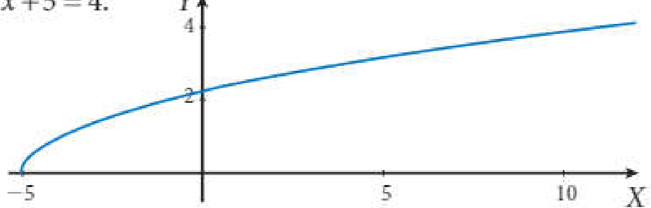
1. $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(5x^3+8x^2-x\right)=1$.



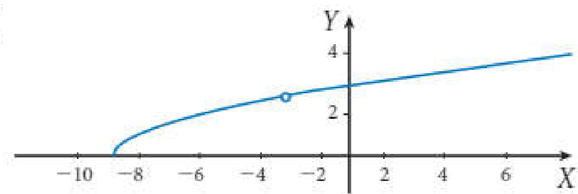
3. $\lim\limits_{x\to1}\left|\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}\right|=0$.



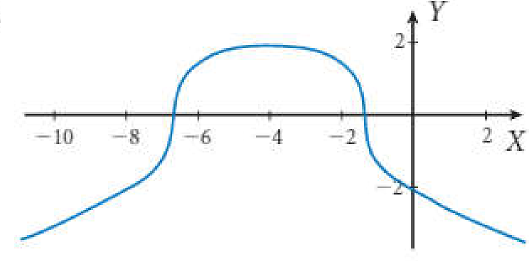
5. $\lim\limits_{x\to11}\sqrt{x+5}=4$.



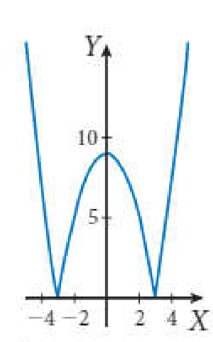
7. $\lim\limits_{x\to-3}\sqrt{\frac{x^2+11x+24}{x+3}}=\sqrt{5}$.



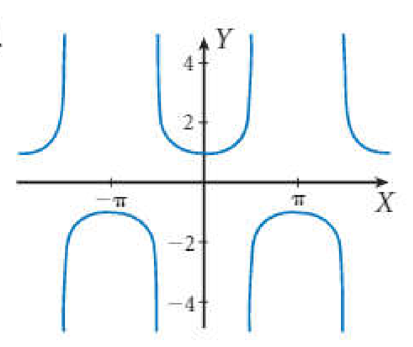
9. $\lim\limits_{x\to-2}\sqrt[3]{-x^2-8x-9}=\sqrt[3]{3}$.



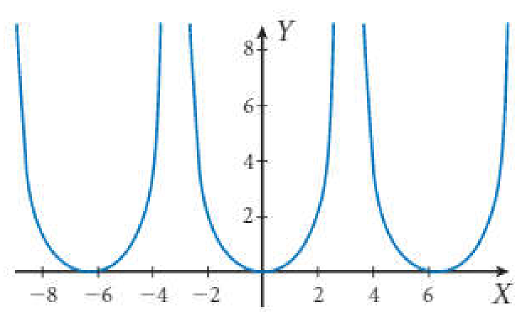
11. $\lim_{x\to -4}\left|9-x^2\right|=7.$



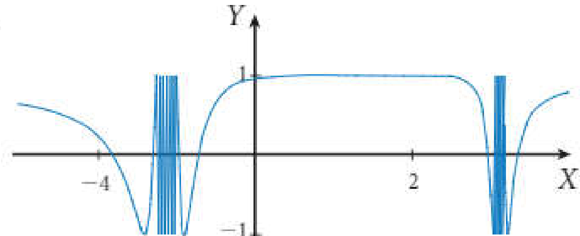
13. $\lim_{x\to -\pi}(\sec x)^{\frac{1}{3}}=-1.$



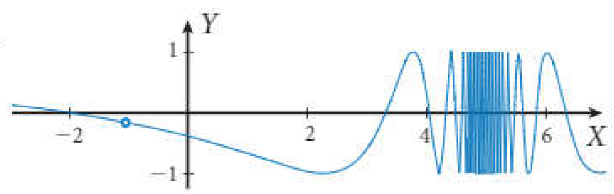
15. $\lim_{x\to 0}\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cos x\right)=0.$



17. $\lim_{x\to 2}\cos\left(\frac{x^2-3x+2}{2x^2-8}\right)=\cos\frac{1}{8}.$

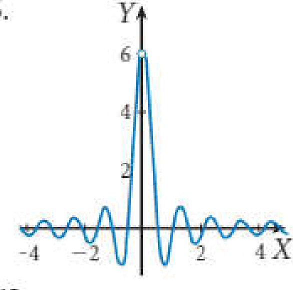


19. $\lim_{x\to -1}\operatorname{sen}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2-4x-5}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\right).$

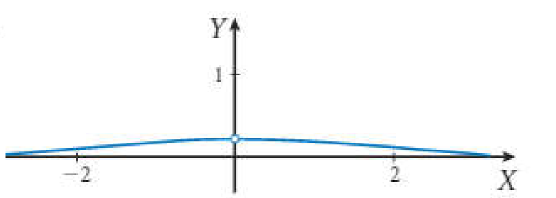


Ejercicios de la página 146.

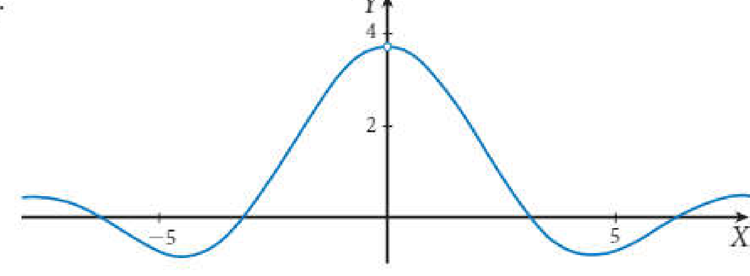
1. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}6x}{x}=6.$



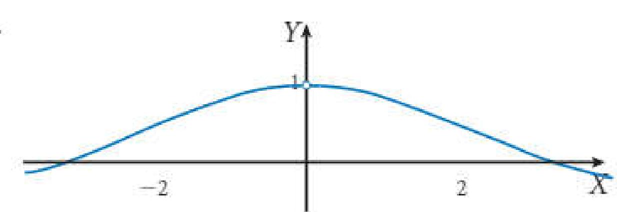
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}6x}{x}=6.$



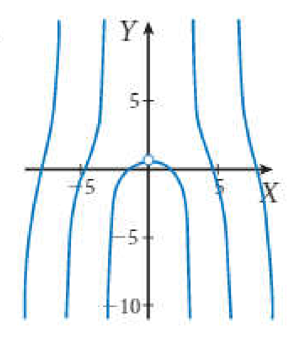
5. $\lim_{x\to 0}\frac{15\operatorname{sen}x}{4x}=\frac{15}{4}.$



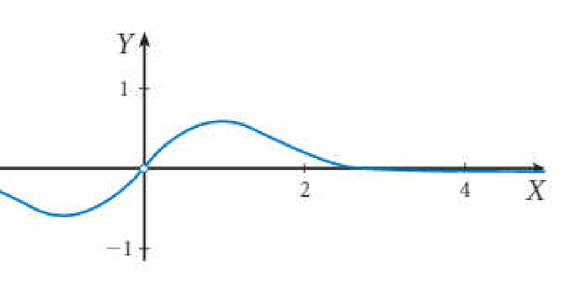
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x\cos x}{x}=1.$



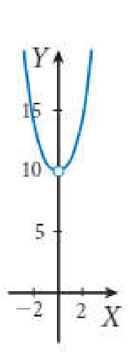
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x}{2\operatorname{sen} x}=\frac{1}{2}.$



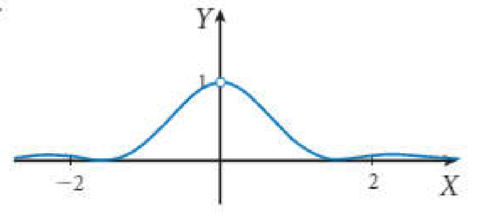
11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}=0.$



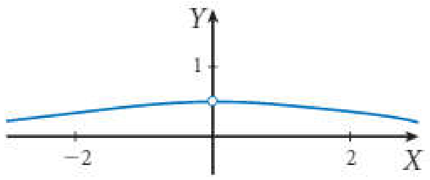
13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{1-\cos x}=10.$



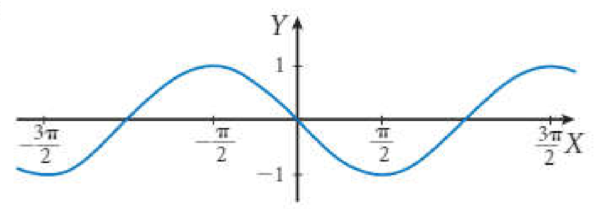
15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^4 x}{x^2}=1.$



17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$

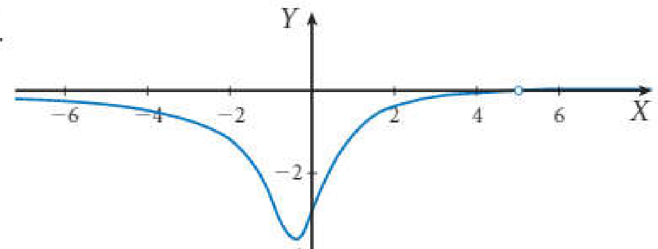


19. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\operatorname{sen} x.$

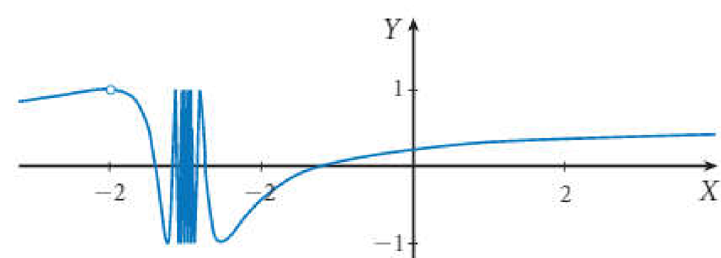


Ejercicios de repaso de la página 148.

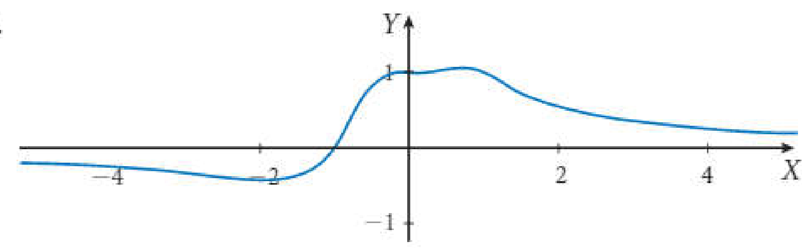
1. $\lim\limits_{x\to 5}\tan\left(\frac{x^3-5x^2+x-5}{x^4+5x^2+4}\right)=0.$



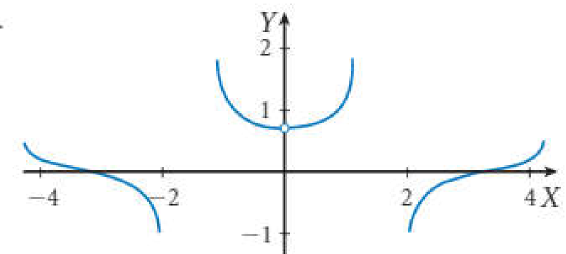
3. $\lim_{x\to -4} \cos\left(\frac{x^2+8x+16}{x^2+7x+12}\right)=1.$



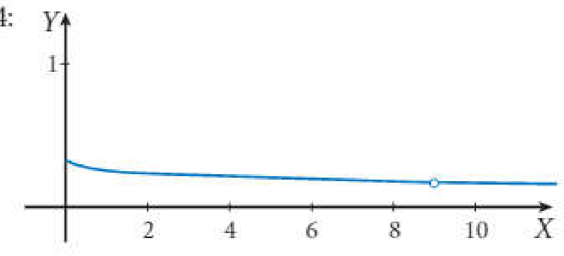
5. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+1}{x^4+1}=1.$



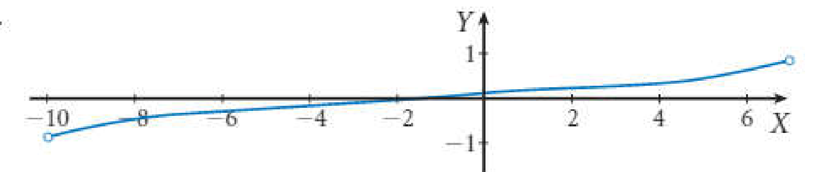
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2-\tan x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$



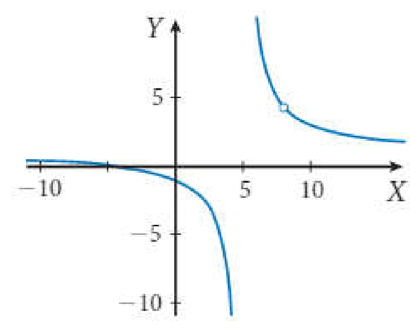
9. $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Si tomamos $a=4$:



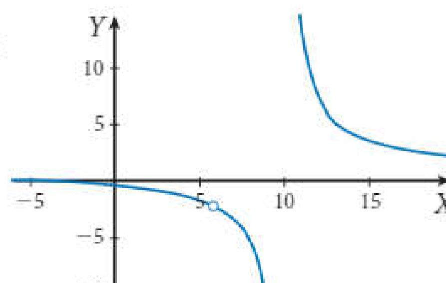
11. $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{x+10}+\sqrt{7-x}}=\frac{3}{5}.$



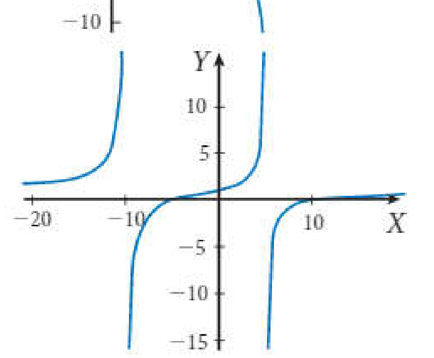
13. $\lim_{x\to -8}\frac{x^2+13x+40}{x^2+3x-40}=\frac{3}{13}.$



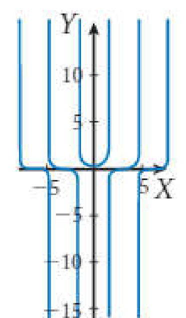
15. $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-3x-18}{x^2-16x+60}=-\frac{9}{4}$.



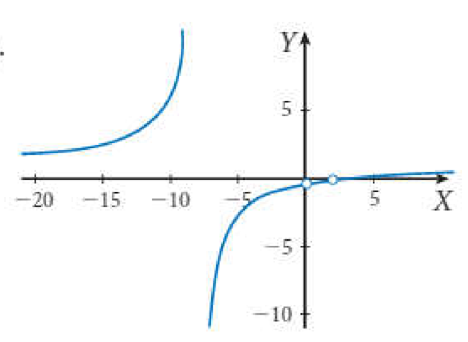
17. $\lim_{x\to -4}\frac{x^2-5x-50}{x^2+5x-50}=\frac{7}{27}$.



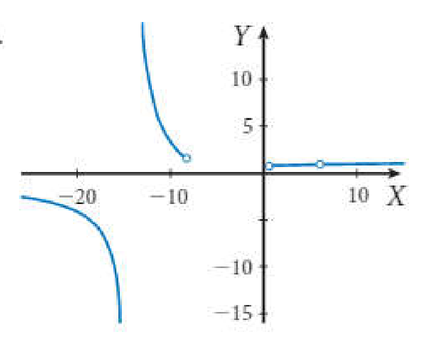
19. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\pi x}=\frac{1}{\pi}$.



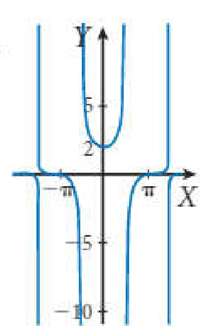
21. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^3+6x^2-16x}=-\frac{1}{10}$.



23. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\pi x}=\frac{1}{\pi}$.



25. $\lim_{x\to 0}\frac{4(\tan x-\operatorname{sen} x)}{x^3}=2$.



Autoevaluación de la página 150.

1. c. **2.** a. **3.** d. **4.** a. **5.** b. **6.** d. **7.** b. **8.** b.

Unidad 5. Derivadas de funciones

Ejercicios de la página 159.

1. $f'(-1)=1$. **3.** $f'(-3)=0$. **5.** $f'(-5)=1$. **7.** $f'(3)=6$. **9.** $f'(-7)=14$. **11.** $f'\left(\frac{1}{2}\right)=5$.
13. $f'(8)=-\frac{1}{4}$. **15.** $f'(3)=27$. **17.** $f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **19.** $f'(7)=\frac{7}{\sqrt{45}}$.

Ejercicios de la página 169.

1. $f'(x)=2x+5$. **3.** $f'(x)=-16x^7+12x^3-8$. **5.** $f'(x)=-9x^{-4}-4x^{-3}$. **7.** $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}$.

9. $f'(x)=180x^2-\frac{48}{x^3}-\frac{168}{x^4}+\frac{140}{x^6}$. **11.** $f'(x)=5\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}-18\sqrt{2}x^2+18\sqrt{x}-72x-\frac{3}{\sqrt{x}}+18$.

13. $f'(x)=-\frac{12}{(x-3)^2}$. **15.** $f'(x)=\frac{53}{(5x+1)^2}$. **17.** $f'(x)=\frac{2x^4+48x^3-66x^2+24x}{(x^2+3x-2)^2}$. **19.** $y=\frac{9}{5}x+18$.

21. $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{8}{\sqrt{2}}$. **23.** $y=-\frac{19}{25}x-\frac{49}{25}$. **25.** $P\left(-\frac{5}{2},-\frac{29}{4}\right)$. **27.** $P(1,f(1))=P(1,-2)$; $P\left(-\frac{5}{3},f\left(-\frac{5}{3}\right)\right)=P\left(-\frac{5}{3},\frac{202}{27}\right)$. **29.** $P(0,f(0))=P(0,2)$; $P(-1,f(-1))=P\left(-1,\frac{17}{12}\right)$; $P(3,f(3))=P\left(3,-\frac{37}{4}\right)$.

Ejercicios de la página 171.

1. $f'(x)=\sec^2 x-\operatorname{sen} x$. **3.** $f'(x)=-6\operatorname{sen} x-9\cos x$. **5.** $f'(x)=\sec^3 x+\sec x\tan^2 x$.

7. $f'(x)=\frac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$. **9.** $f'(x)=\frac{2\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$. **11.** $f'(x)=\frac{-x\operatorname{sen} x-\cos x+1}{x^2}$. **13.** $f'(x)=\frac{x^2+2x\tan x-2}{\sec x}$.

15. $f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\operatorname{sen} x-\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}+\frac{\cos x}{x}$. **17.** $f'(x)=\frac{-2\csc^3 x+2\csc x\cot^2 x}{(\cot x+\csc x)^2}$.

19. $f'(x)=\frac{2x^{10}\operatorname{sen} x\cos x-5x^4\operatorname{sen}^2 x-2x^5\operatorname{sen} x\cos x}{(x^5-1)^2}$.

Ejercicios de la página 174.

1. $f'(x)=20(5x+7)^3$. **3.** $f'(x)=2\cos 2x$. **5.** $f'(x)=-2\cos x\operatorname{sen} x=-\operatorname{sen} 2x$.

7. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\sec^2\left(\frac{1}{x}\right)$. **9.** $f'(x)=\frac{720x^5+250x^4-1008x^3-360x^2-24}{(-5x^5+12x^3-4)^6}$. **11.** $f'(x)=-\operatorname{sen} x\cos(\cos x)$.

13. $f'(x)=\frac{2x\operatorname{sen}^2 x-2x^2\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}$. **15.** $f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$. **17.** $f'(x)=\frac{-2\csc^2\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x}}$. **19.** $f'(x)=\frac{2x^2-13x+6}{2(x-6)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+9}}$.

21. $f'(x)=\frac{6x^3-18x^2+14x-43}{2\left(\sqrt{x-3}\right)^3}$. **23.** $f'(x)=\left(-12x^3-30x\right)\csc^3\left(x^4+5x^2\right)\cot\left(x^4+5x^2\right)$.

25. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\tan^2\left(\sqrt{x}\right)\right)\left(\tan\left(\sqrt{x}\right)\right)\left(\sec^2\left(\sqrt{x}\right)\right)$.

Ejercicios de la página 184.

1. $P(r)-P(r_0)\approx 2\pi(r-r_0)$. **3.** $V(r)-V(r_0)\approx\frac{20}{3}\pi r_0(r-r_0)$. **5.** El lado a crece aproximadamente a razón de 0.14 centímetros por segundo. **7.** La presión disminuye a razón de dos quintos de kilogramo por centímetro cuadrado.

Ejercicios de repaso de la página 186.

1. $f'(x)=-\frac{2}{15}x^{-\frac{10}{9}}$. **3.** $f'(x)=-\frac{3x^2+8}{2\sqrt{x}(x^2-8)^2}-\frac{x\cos x+2\cos x-\operatorname{sen} x}{(x+2)^2}$. **5.** $f'(x)=\frac{\sec x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\sec x\tan x+\frac{x^{\frac{9}{2}}}{2}-5x^4+5x^{\frac{9}{2}}$.

7. $f'(x)=\frac{x\operatorname{sen} x-2x^2\cos x}{2\sqrt{x^3}\operatorname{sen}^2 x}$. **9.** $f'(x)=3x^3\sec^2 x+9x^2\tan x-12\sec^2 x$. **11.** $f'(x)=\frac{3x^2\sqrt{8x-5}+4}{2\sqrt{8x-5}\sqrt{x^3+\sqrt{8x-5}}}$.

13. $f'(x)=\frac{84}{(7x-4)^5}$. **15.** $f'(x)=\frac{x^2+5}{2x^2\sqrt{\frac{x^2-5}{x}}}$. **17.** $y=-\frac{5}{3}x-\frac{13}{3}$. **19.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$. **21.** $y=x-1$.

23. $f'(x)=15x^2+2>0$, entonces nunca es igual a cero; así la gráfica de la función no tiene tangentes horizontales. **25.** $y=3x-13$. **27.** $\frac{dI}{dR}=-\frac{175}{R^2}$.

Autoevaluación de la página 188.

1. b. **2.** d. **3.** b. **4.** a. **5.** b. **6.** d. **7.** b.

Unidad 6. Funciones inversas y sus derivadas

Ejercicios de la página 202.

1. $\frac{2x}{1+\left(x^2-1\right)^2}$. **3.** $\frac{-3x^{-4}}{\sqrt{1-x^{-6}}}$. **5.** $\frac{24x^2}{1+64x^6}$. **7.** $\frac{2x}{x^2\sqrt{2x^2-1}}$. **9.** $\frac{1}{(5x+2)\sqrt{4x^2+2x}}$. **11.** $\operatorname{arcsen}(x+1)+\frac{x}{\sqrt{-x^2-2x}}$.

13. $\frac{x+3-\left(1+x^2\right)\arctan x}{\left(1+x^2\right)(x+3)^2}$. **15.** $\frac{24x-8-6\sqrt{1-16x^2}\operatorname{arcsen}4x}{\sqrt{1-16x^2}(6x-2)^2}$. **17.** $\frac{x^2-2-x\left|x-\sqrt{2}\right|\sqrt{x^2-2x\sqrt{2}+1}\left(\operatorname{arcsec}\left(x-\sqrt{2}\right)\right)}{\left|x-\sqrt{2}\right|\sqrt{x^2-2x\sqrt{2}+1}\left(\sqrt{x^2-2}\right)^3}$.

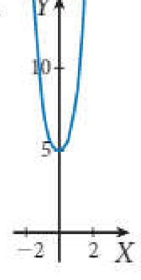
Autoevaluación de la página 204.

1. a. **2.** b. **3.** c. **4.** a. **5.** c.

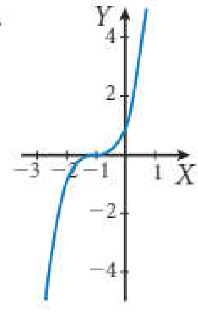
Unidad 7. Máximos y mínimos

Ejercicios de la página 214.

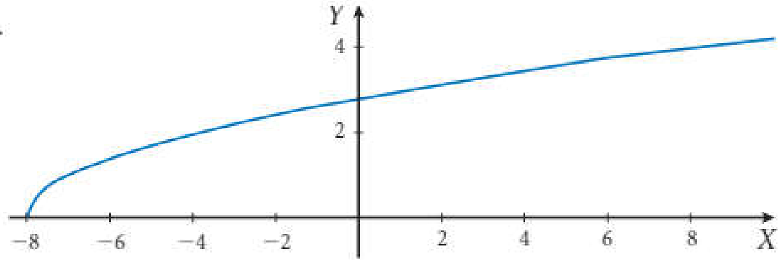
1. Decreciente en $(-\infty,0]$, creciente en $[0,\infty)$.



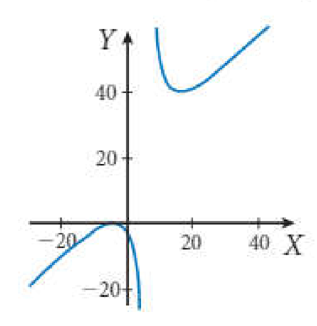
3. Creciente en $(-\infty,-1]$ y $[-1,\infty)$.



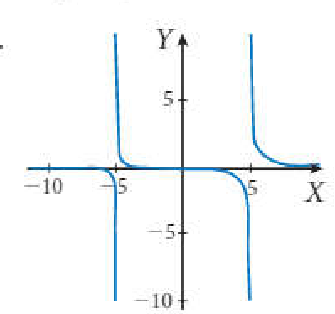
5. Creciente en $[-8,\infty)$.



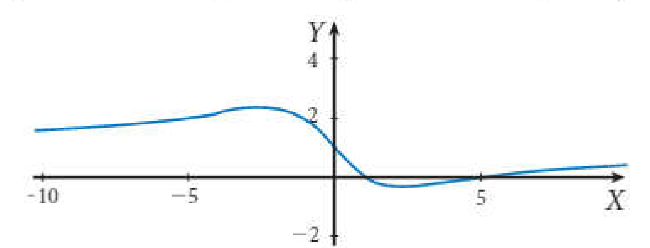
7. Creciente en $(-\infty,-4]$, decreciente en $[-4,6]$, decreciente en $(6,16]$ y creciente en $[16,\infty)$.



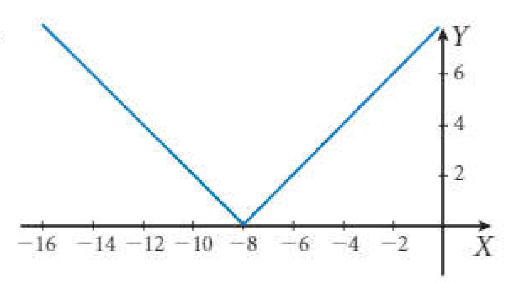
9. Decreciente en $(-\infty,-5)$, $(-5,5)$ y $(5,\infty)$.



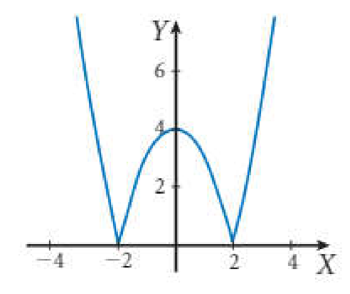
11. Creciente en $\left(-\infty,-\sqrt{5}\right]$, decreciente en $\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$ y creciente en $\left[\sqrt{5},\infty\right)$.



13. Decreciente en $(-\infty,-8)$ y creciente en $(-8,\infty)$.

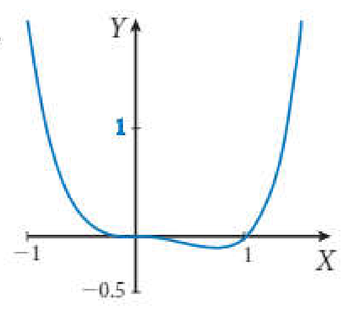


15. Decreciente en $(-\infty,-2)$, creciente en $(-2,0)$, decreciente en $(0,2)$ y creciente en $(2,\infty)$.

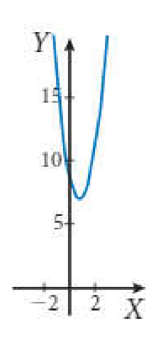


Ejercicios de la página 219.

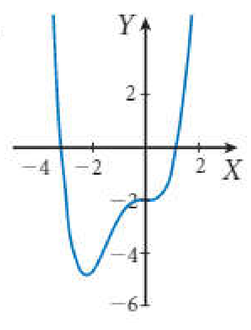
1. Mínimo en $x=\frac{3}{4}$.



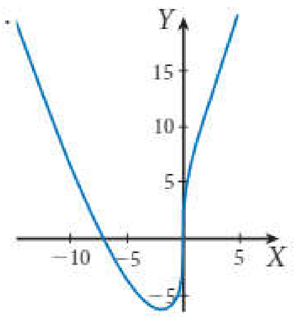
3. Mínimo en $x=\frac{5}{6}$.



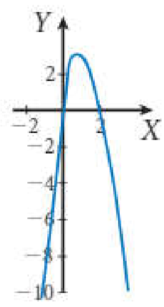
5. Mínimo en $x=-\frac{9}{4}$.



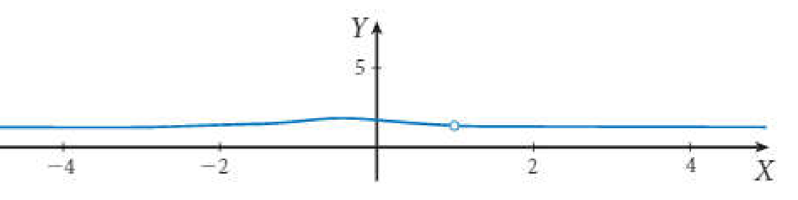
7. Mínimo en $x=-\frac{7}{4}$.



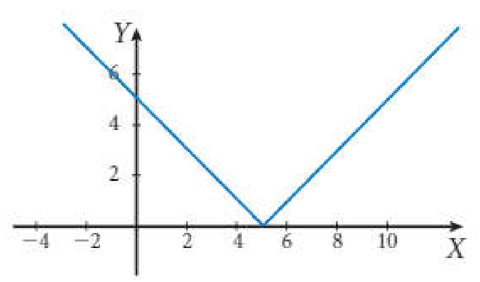
9. Máximo en $x = \frac{3}{4}$.



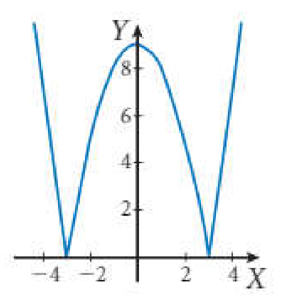
11. Máximo en $x = -\frac{1}{2}$.



13. Mínimo en $x = 5$.

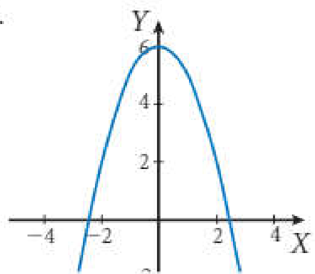


15. Máximo en $x = 0$, mínimos en $x = -3$ y $x = 3$.

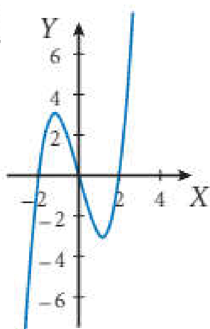


Ejercicios de la página 222.

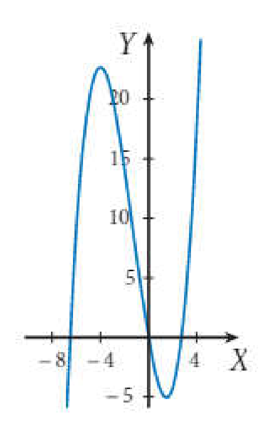
1. Máximo en $x = 0$.



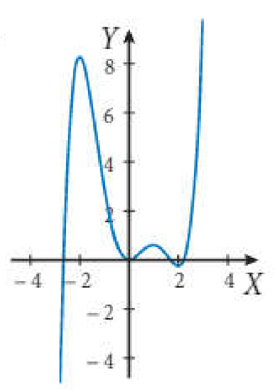
3. Máximo en $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, mínimo en $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



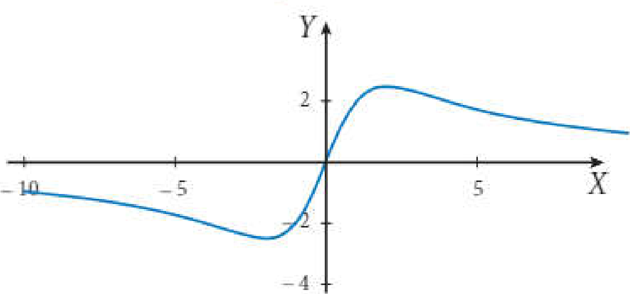
5. Máximo en $x = -4$, mínimo en $x = \frac{3}{2}$.



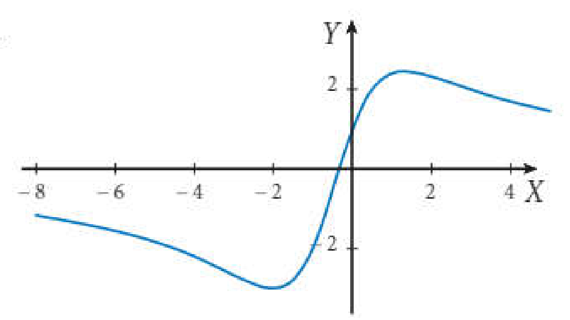
7. Máximos en $x=-2$ y $x=1$, mínimos en $x=0$ y $x=-2$.



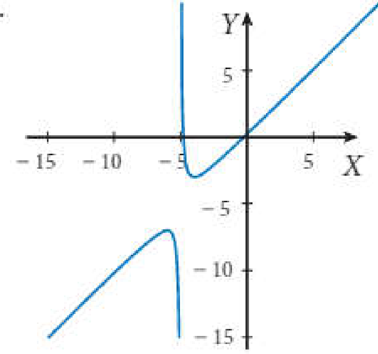
9. Máximo en $x=2$, mínimo en $x=-2$.



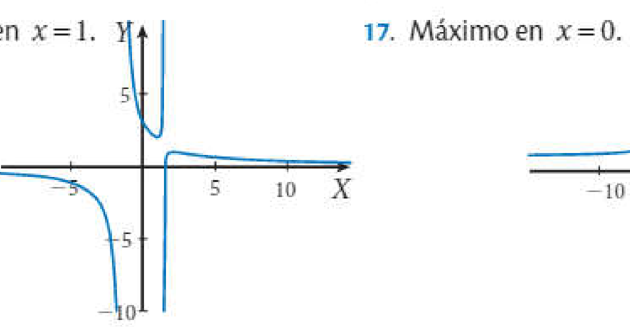
11. Máximo en $x=\frac{4}{3}$, mínimo en $x=-2$.



13. Máximo en $x=-6$, mínimo en $x=-4$.



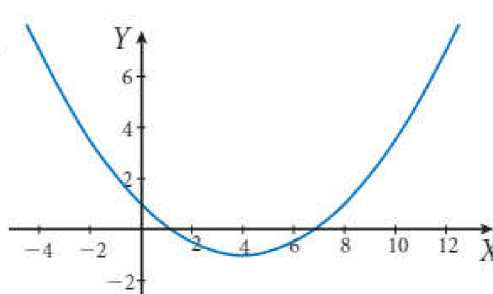
15. Máximo en $x=2$, mínimo en $x=1$.



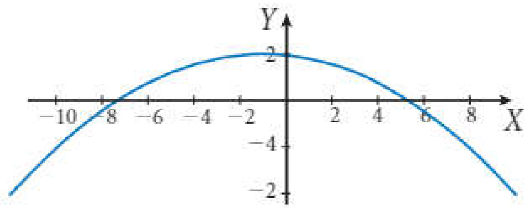
17. Máximo en $x=0$.

Ejercicios de la página 226.

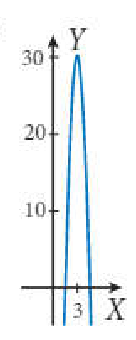
1. Mínimo absoluto en $x=4,\ f(4)=-1.$



3. Máximo absoluto en $x=-1,\ f(-1)=2.$



5. Máximo absoluto en $x=3,\ f(3)=30.$

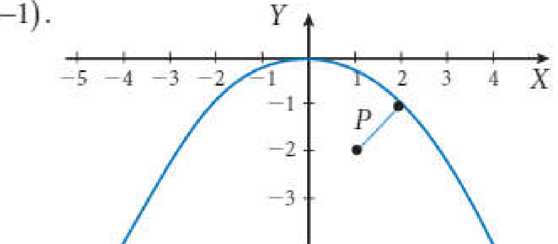


Ejercicios de la página 231.

1. $f(x)=x^2+\frac{16}{x}.$ **3.** $C(r)=2\,000\pi r^2+\frac{5\,000}{r}.$ **5.** $U\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{x-15}{x^2}$ pesos.

Ejercicios de la página 237.

1. a) La altura máxima es $\left(\frac{12}{9.8}\right)(12-6)\approx 7.35$ metros. **b)** la pelota alcanza la altura máxima, $\frac{12}{9.8}\simeq 1.22$ segundos después del lanzamiento. **3.** El valor mínimo se obtiene cuando $x=\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4).$ **5.** El número buscado es $3.$ **7.** $a=10$ y $b=10.$ **9.** $P=2\sqrt{2}+2.$ **11.** El punto de la parábola más cercano a $(1,-2)$ es $(2,-1).$

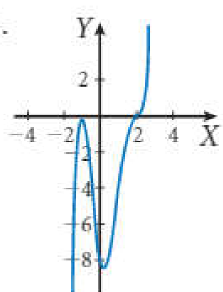


13. $a=\frac{6}{\sqrt{2}},\ b=\frac{6}{\sqrt{2}}.$

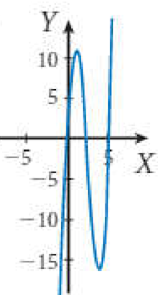
15. $y=-3x+6.$ **17. a)** $a=20,$ **b)** El material de cada caja cuesta 30 centavos. **19.** Las dimensiones del cono son: $h=12$ y $r=\sqrt{72}.$

Ejercicios de repaso de la página 241.

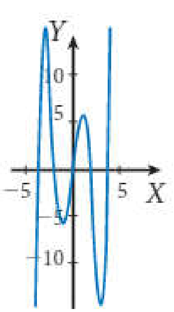
1. Máximo en $x=-1$, mínimo en $x=\frac{1}{5}$.



3. Máximo en $x=1$, mínimo en $x=4$.



5. Máximos en $x=-3$ y $x=1$, mínimos en $x=-1$ y $x=3$.



7. $a=b=35$. **9.** La caja de volumen máximo se obtiene al cortar un cuadrado de $15-5\sqrt{3}$ cm de lado. **11.** $a=3$, $b=\frac{3}{2}$. **13.** La base del triángulo de mayor área mide $\frac{3}{2}$ y su altura es $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **15.** El costo será mínimo cuando el punto A se encuentra a $\frac{5}{2\sqrt{2}} \simeq 1.8$ km del punto D.

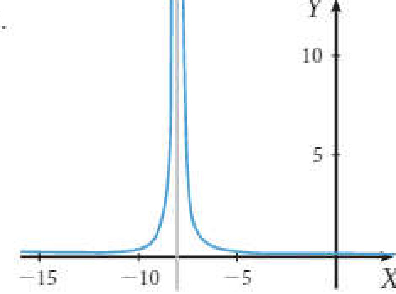
Autoevaluación de la página 244.

1. d. **2.** b. **3.** a. **4.** d. **5.** d. **6.** c. **7.** b. **8.** a. **9.** b.

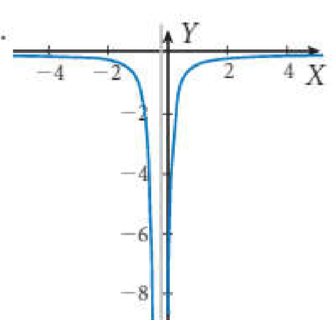
Unidad 8. Límites infinitos y al infinito

Ejercicios de la página 255.

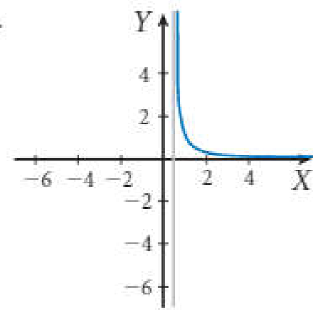
1. $\lim_{x \to -8} \frac{1}{(x+8)^2} = \infty$. Asíntota vertical $x=-8$.



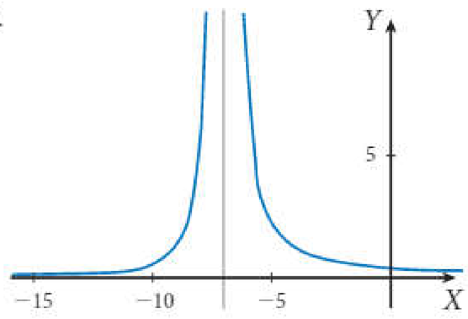
3. $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{4}} \frac{-8}{(4x+1)^2} = -\infty$. Asíntota vertical $x = -\frac{1}{4}$.



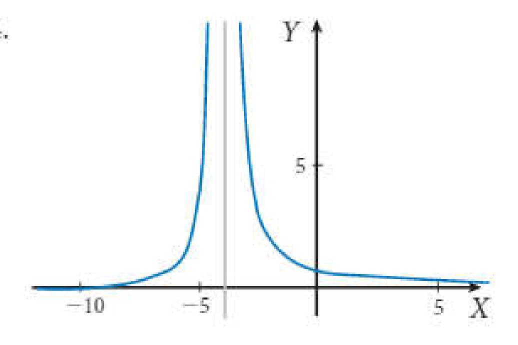
5. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{1}{2x-1} = \infty$. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{1}{2x-1} = -\infty$. Asíntota $x = \frac{1}{2}$.



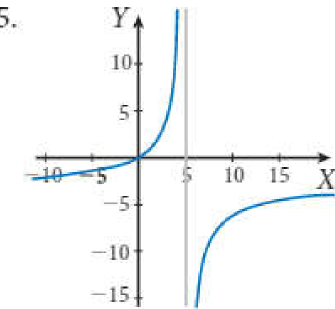
7. $\lim\limits_{x \to -7} \frac{x+14}{(x+7)^2} = \infty$. Asíntota vertical $x = -7$.



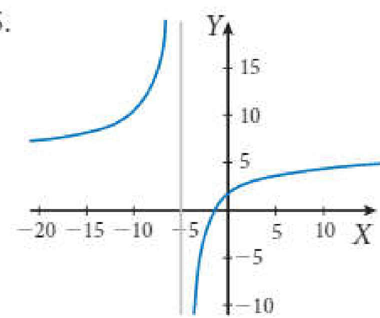
9. $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x+9}{(x+4)^2} = \infty$. Asíntota vertical $x = -4$.



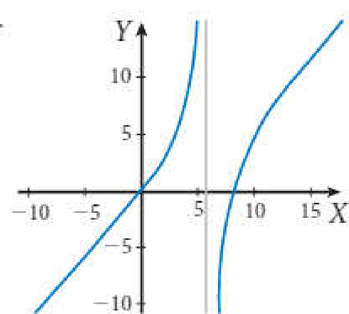
11. $\lim\limits_{x \to 5^+} \frac{-3x}{x-5} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 5^-} \frac{-3x}{x-5} = \infty$. Asíntota vertical $x = 5$.



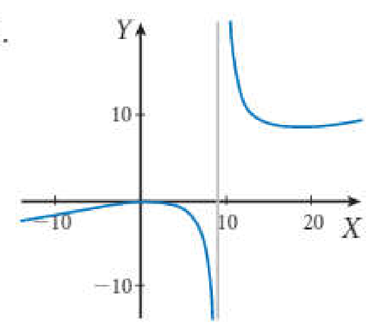
13. $\lim\limits_{x\to -5^+} \frac{6x+8}{x+5} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -5^-} \frac{6x+8}{x+5} = \infty$. Asíntota vertical $x=-5$.



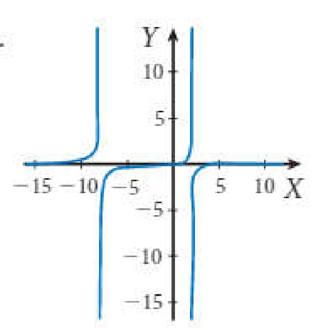
15. $\lim\limits_{x\to 6^+} \frac{x^2-8x}{x-6} = -\infty$. $\lim\limits_{x\to 6^-} \frac{x^2-8x}{x-6} = \infty$. Asíntota vertical $x=6$.



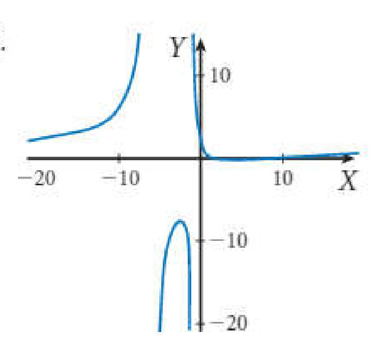
17. $\lim\limits_{x\to \frac{38}{4}^+} \frac{x^2-2x}{4x-38} = \infty$. $\lim\limits_{x\to \frac{38}{4}^-} \frac{x^2-2x}{4x-38} = -\infty$. Asíntota vertical $x=\frac{38}{4}$.



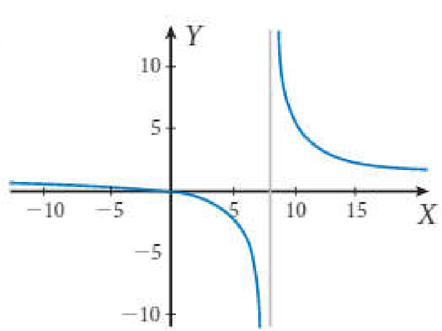
19. $\lim\limits_{x\to -8^+} \frac{-x}{(x+8)(x-2)} = -\infty$. $\lim\limits_{x\to -8^-} \frac{-x}{(x+8)(x-2)} = \infty$. Asíntota vertical $x=-8$.



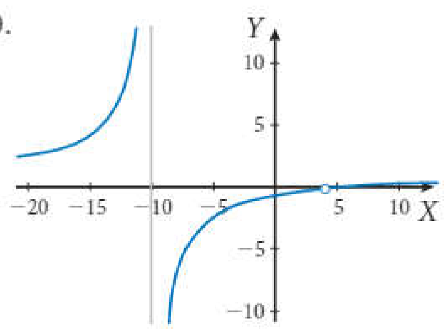
21. $\lim\limits_{x\to -6^+} \frac{(x-9)(x-1)}{(x+6)(x+1)} = -\infty$. $\lim\limits_{x\to -6^-} \frac{(x-9)(x-1)}{(x+6)(x+1)} = \infty$. Asíntota vertical $x=-6$.



23. $\lim_{x\to 9^+} \frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-40} = \infty$. $\lim_{x\to 9^-} \frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-40} = -\infty$. Asíntota vertical $x = 8$.

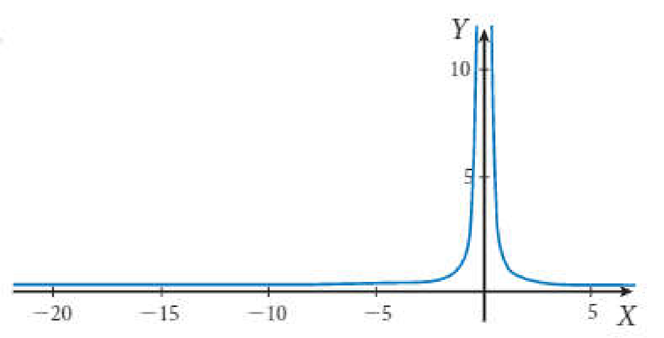


25. $\lim_{x\to -10^+} \frac{x^2-10x+24}{x^2+6x-40} = -\infty$. $\lim_{x\to -10^-} \frac{x^2-10x+24}{x^2+6x-40} = \infty$. Asíntota vertical $x = -10$.

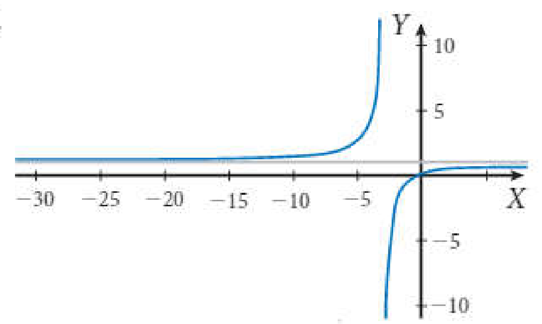


Ejercicios de la página 260.

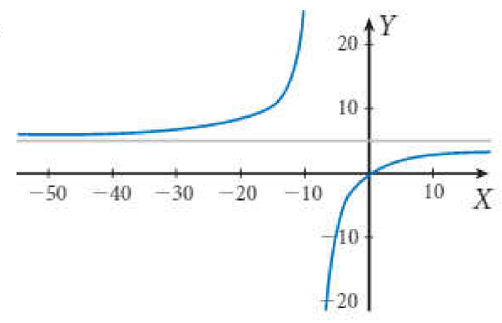
1. $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Asíntota horizontal $y = 0$.



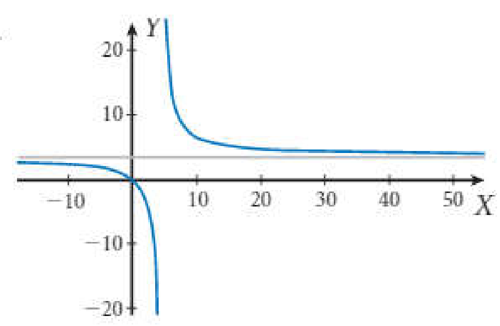
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{x+3} = 1$. Asíntota horizontal $y = 1$.



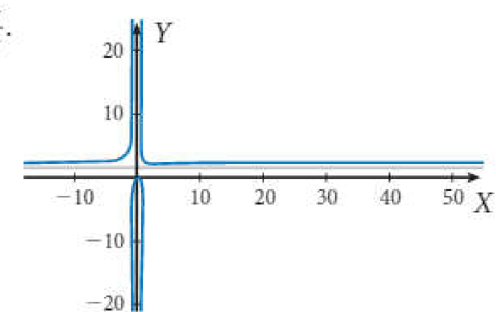
5. $\lim_{x\to -\infty} \frac{15x}{3x+24} = 5$. Asíntota horizontal $y = 5$.



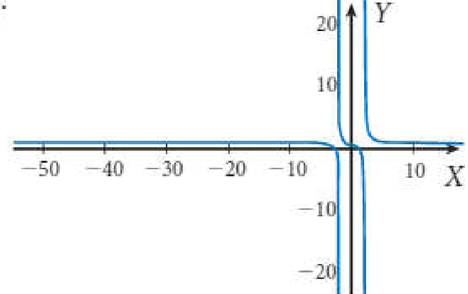
7. $\lim_{x\to\infty} \frac{32x+6}{9x-40} = \frac{32}{9}$. Asíntota horizontal $y = \frac{32}{9}$.



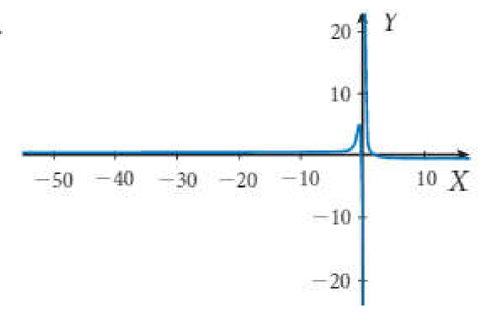
9. $\lim_{x\to\infty} \frac{28x^2-12x}{12x^2-5} = \frac{7}{3}$. Asíntota horizontal $y = \frac{7}{3}$.



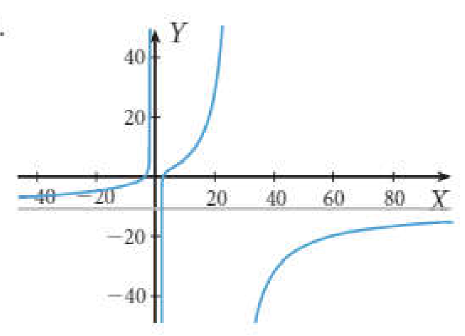
11. $\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^2+12x-20}{11x^2-48} = \frac{7}{11}$. Asíntota horizontal $y = \frac{7}{11}$.



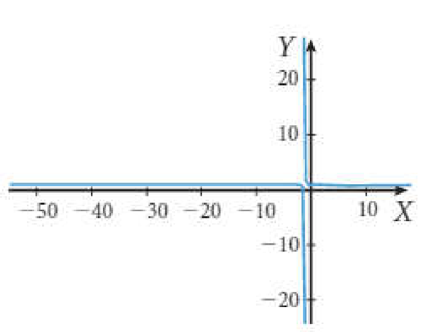
13. $\lim_{x\to-\infty} \frac{-9x^3+32x}{27x^3+4x^2-2} = -\frac{1}{3}$. Asíntota horizontal $y = -\frac{1}{3}$.



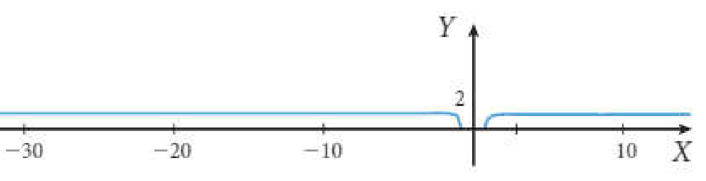
15. $\lim_{x\to\infty} \frac{22x^2+6x-13}{-2x^2+52x} = -11$. Asíntota horizontal $y = -11$.



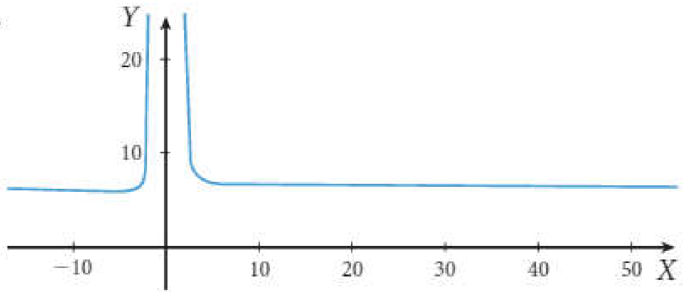
17. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{8x^5+5x^3+15}{10x^5+3x^3+15} = \frac{4}{5}$. Asíntota horizontal $y = \frac{4}{5}$.



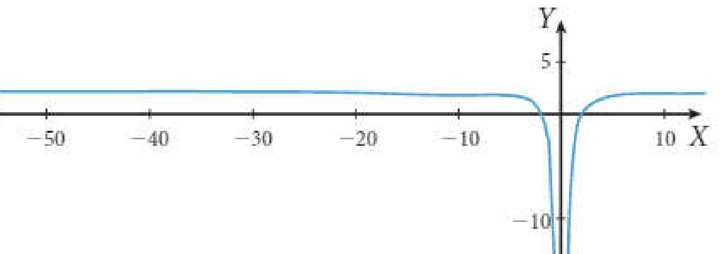
19. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{25x^4-9}}{5x^2} = 1$. Asíntota horizontal $y = 1$.



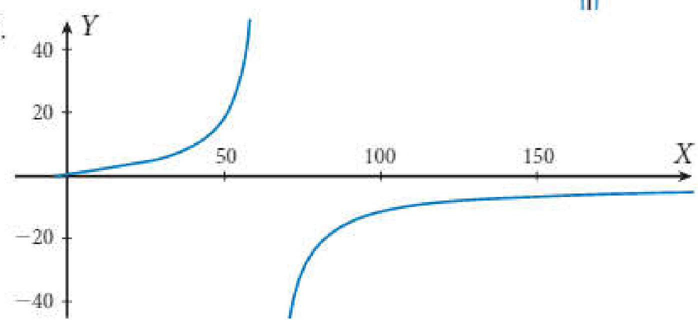
21. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{25x^2+8x+2}{\sqrt{16x^4-256}} = \frac{25}{4}$. Asíntota horizontal $y = \frac{25}{4}$.



23. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{18x^2-64}{\sqrt{81x^4+5x}} = 2$. Asíntota horizontal $y = 2$.

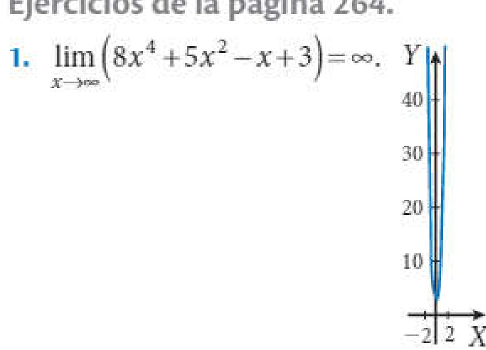


25. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+2\sqrt{x}}{8-\sqrt{x}} = -2$. Asíntota horizontal $y = -2$.

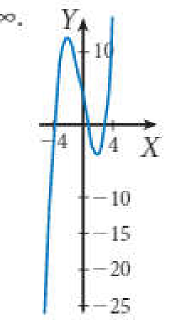


Ejercicios de la página 264.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(8x^4 + 5x^2 - x + 3\right) = \infty$.



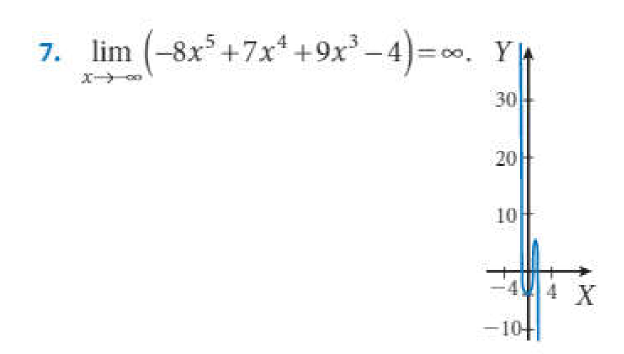
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 6x + 3\right) = -\infty$.



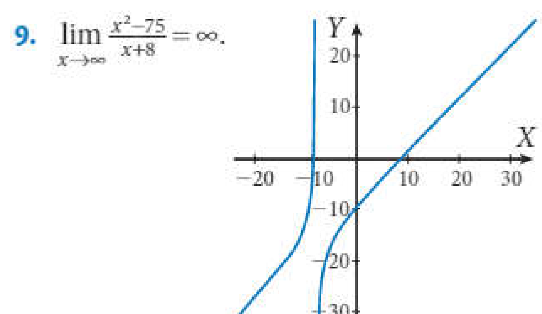
5. $\lim_{x\to\infty}\left(-9x^7-10x^6+x^3-2\right)=-\infty.$

Y X −2 2 −10 −15 −20 −25

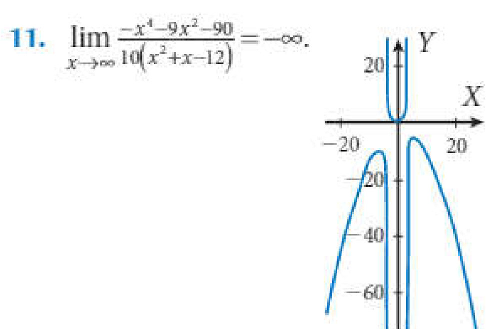
7. $\lim_{x\to-\infty}\left(-8x^5+7x^4+9x^3-4\right)=\infty.$



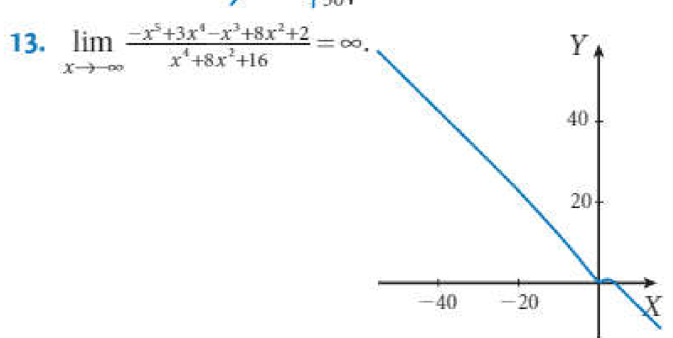
9. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-75}{x+8}=\infty.$



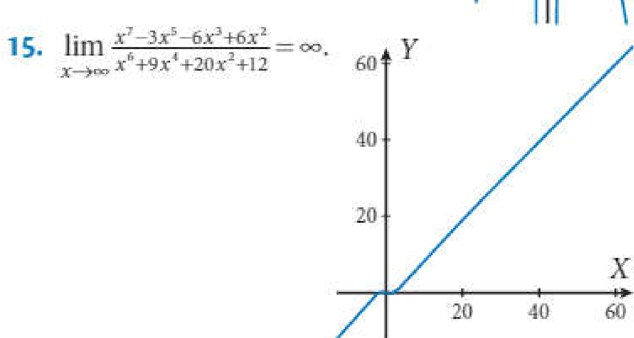
11. $\lim_{x\to\infty}\frac{-x^4-9x^2-90}{10\left(x^2+x-12\right)}=-\infty.$



13. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^5+3x^4-x^3+8x^2+2}{x^4+8x^2+16}=\infty.$

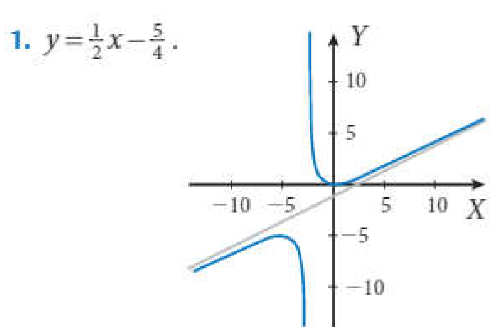


15. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^7-3x^5-6x^3+6x^2}{x^6+9x^4+20x^2+12}=\infty.$

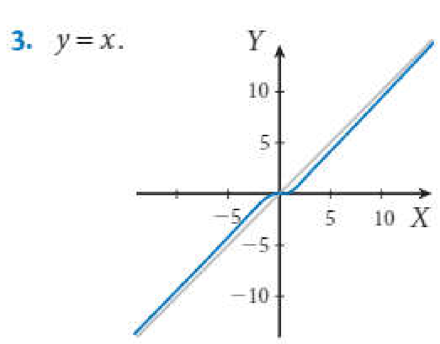


Ejercicios de la página 268.

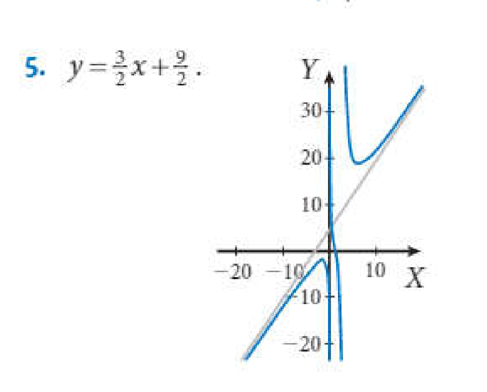
1. $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}.$



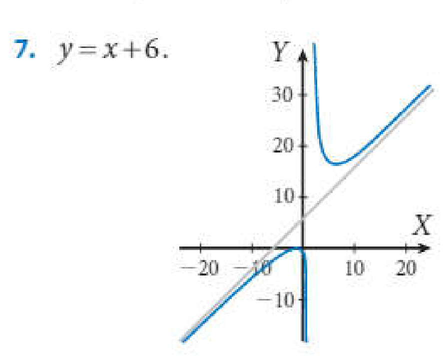
3. $y=x.$



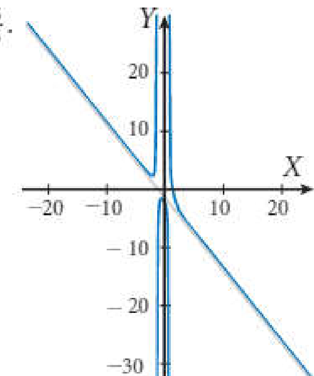
5. $y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}.$



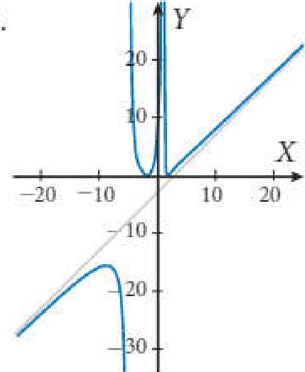
7. $y=x+6.$



9. $y=-\frac{5}{4}x-\frac{25}{16}$.

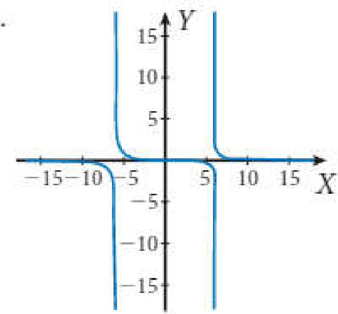


11. $y=x-3$.

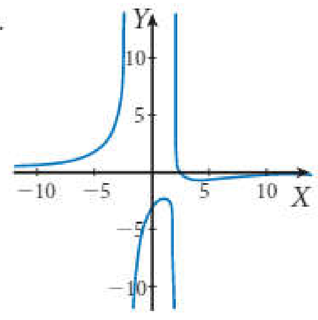


Ejercicios de la página 276.

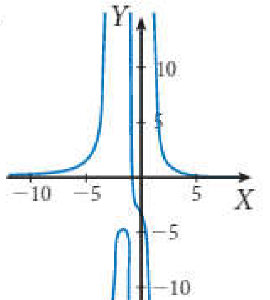
1. $\lim_{x\to 6^+}\left(\frac{1}{x-6}-\frac{8}{x^2-36}\right)=\infty$.



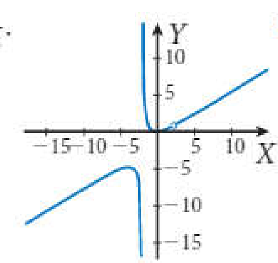
3. $\lim_{x\to -2^+}\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{6}{x+2}\right)=-\infty$.



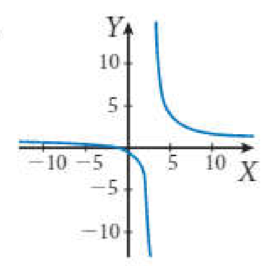
5. $\lim_{x\to -3^+}\left(\frac{10}{x^2+2x-3}-\frac{x}{x^2+4x+3}\right)=-\infty$.



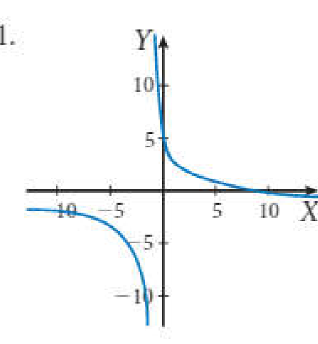
7. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{5x^3-3x}{8(x^2-4)}-\frac{9x^2-2}{8(x^2-4)}\right)=\frac{21}{32}$.



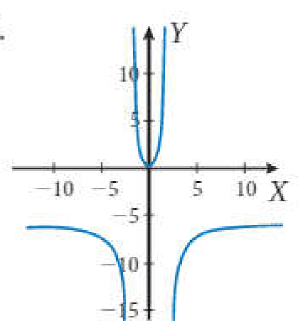
9. $\lim_{x\to 8^-}\left(\frac{x^2-16}{(x-8)(x-3)}-\frac{6x}{(x-8)(x-3)}\right)=2$.



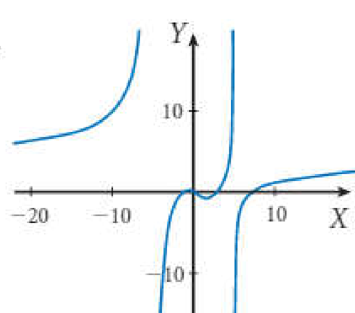
11. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x+1}-\frac{x^3}{x^2+5}\right)=-1$.



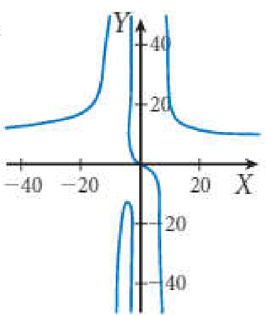
13. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{x^2-4}-\frac{7x^2+x+1}{x^2-4}\right)=-6$.



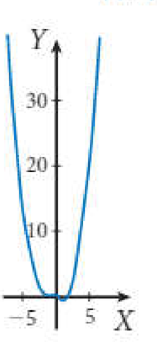
15. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4-3x^2}{x^3+8x}-\frac{x^3-4x^2-x}{x^2-25}\right)=4.$



17. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-2x^2+x-2}{(x+3)(x-8)}-\frac{x^3-7x^2+2x-14}{(x+9)(x-8)}\right)=11.$

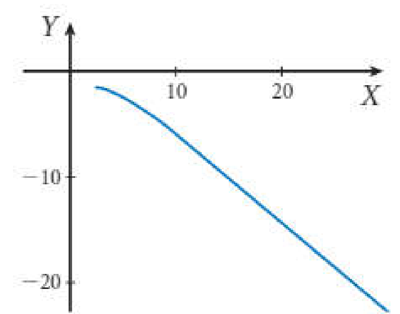


19. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^6-3x^3+1}{(x^2+1)(x^2+3)}-\frac{2+4x^4-x^5}{(x^2+1)(x^2+7)}\right)=\infty.$

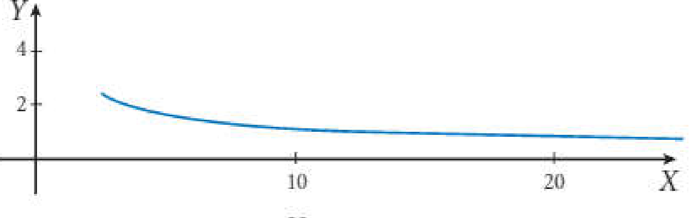


Ejercicios de la página 280.

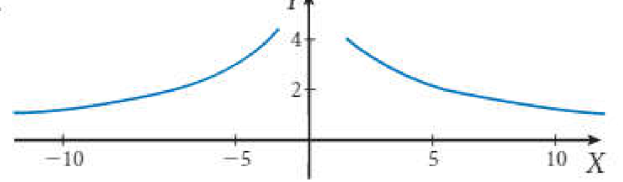
1. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x-4}-x\right)=-\infty.$



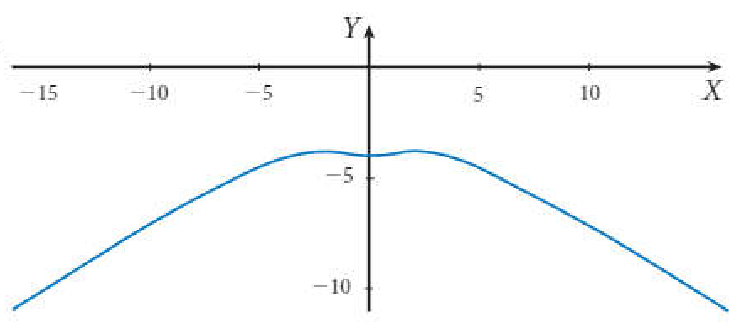
3. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x+8}-\sqrt{5x-8}\right)=0.$



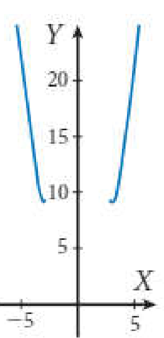
5. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+25}-\sqrt{x^2-1}\right)=0.$



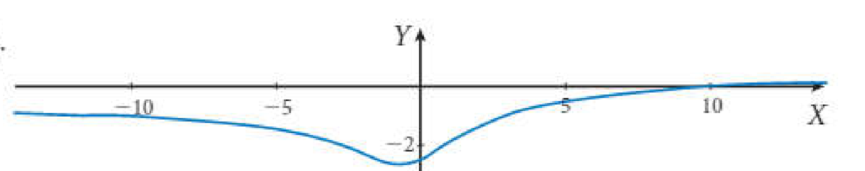
7. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+9}-\sqrt{7x^2+49}\right)=-\infty.$



9. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+6}-\sqrt{x^2-9}\right)=\infty.$

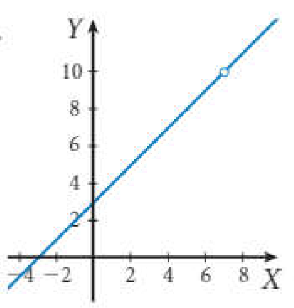


11. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+12}\right)=\frac{1}{2}.$

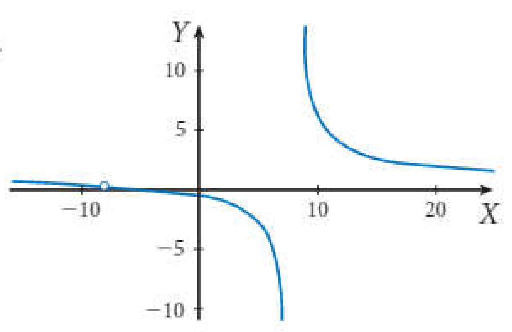


Ejercicios de la página 286.

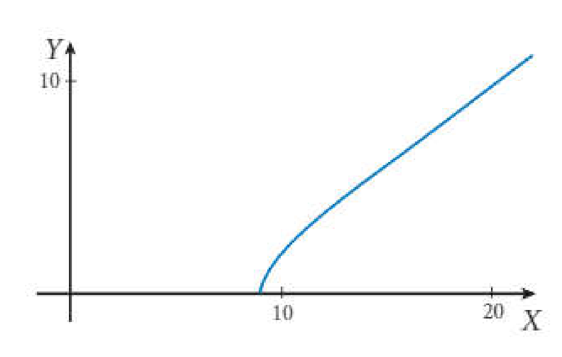
1. $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-4x-21}{x-7}=10.$



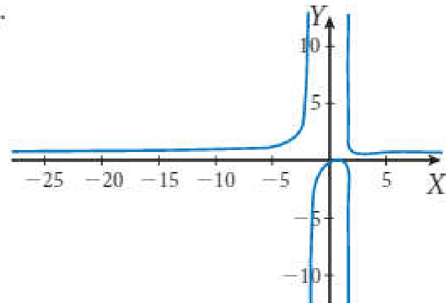
3. $\lim_{x\to -8}\frac{x^2+11x+24}{x^2-64}=\frac{5}{16}.$



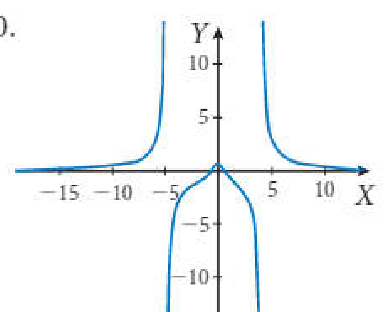
5. $\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{10\sqrt{x-9}}=0.$



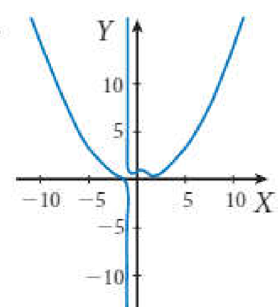
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7x^2-12x+3}{9x^2+x-27} = \frac{7}{9}.$



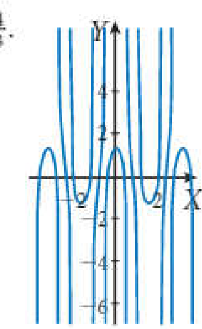
9. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{30x^2+6x-12}{x^4+x^3-19x^2+x-20} = 0.$



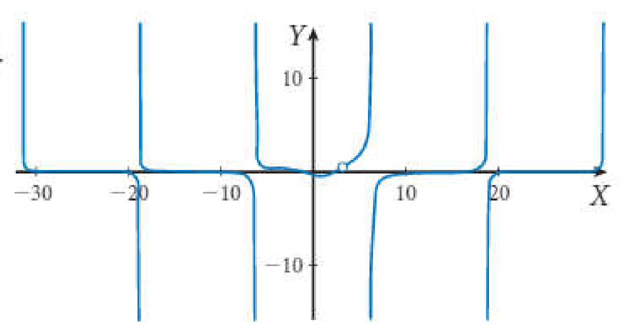
11. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^7-12x-19}{-7x^5-16x^3-21} = \infty.$



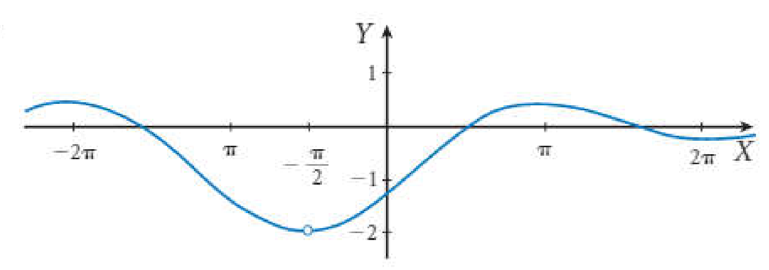
13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 8x}{\operatorname{sen} 6x} = \frac{4}{3}.$



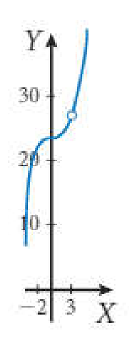
15. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\tan\frac{x}{4}+\cos x}{x-\pi} = \frac{1}{2}.$



17. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x}{x+\frac{\pi}{2}} = -2.$

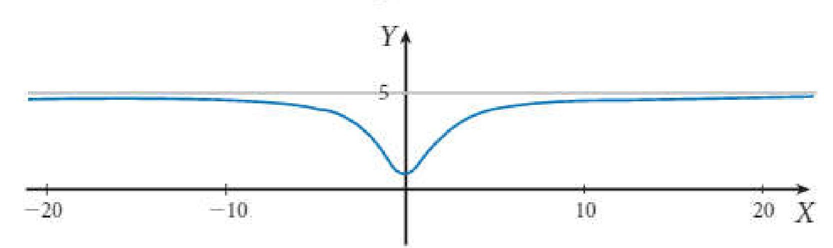


19. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-27}{4\left(\sqrt[4]{x^3+54}-3\right)} = 27.$

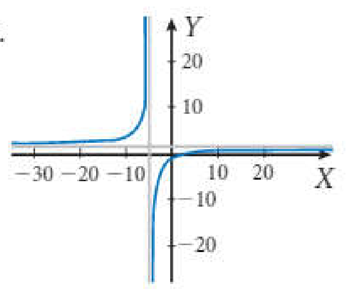


Ejercicios de repaso de la página 290.

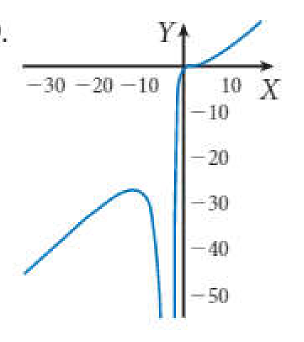
1. No tiene asíntotas verticales. Asíntota horizontal: $y = 5$. No tiene asíntotas oblicuas.



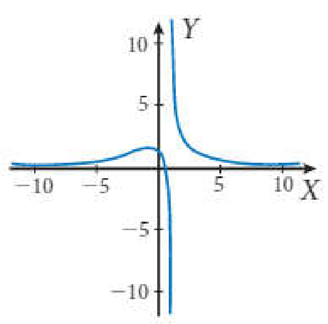
3. Asíntota vertical: $x = -5$. Asíntota horizontal: $y = 1$. No tiene asíntotas oblicuas.



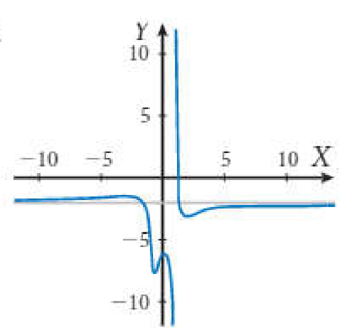
5. Asíntota vertical: $x = -3$. No tiene asíntotas horizontales. Asíntota oblicua: $y = x - 9$.



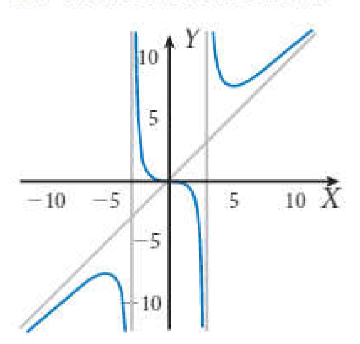
7. Asíntota vertical: $x = 1$. Asíntota horizontal: $y = 0$. No tiene asíntotas oblicuas.



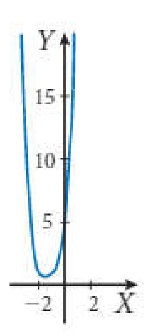
9. Asíntota vertical: $x = 1$. Asíntota horizontal: $y = -2$. No tiene asíntotas oblicuas.



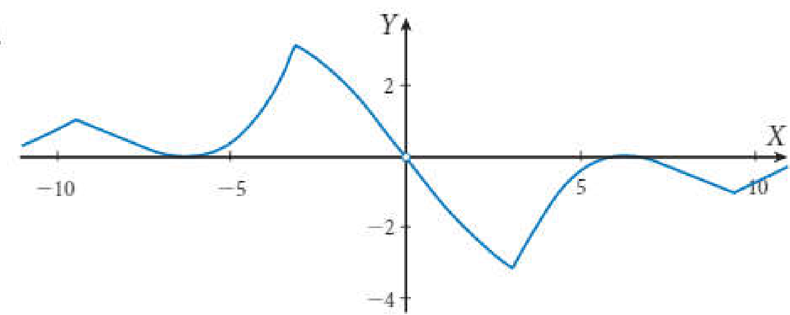
11. Asíntotas verticales: $x=-3$ y $x=3$. No tiene asíntotas horizontales. Asíntota oblicua: $y=x$.



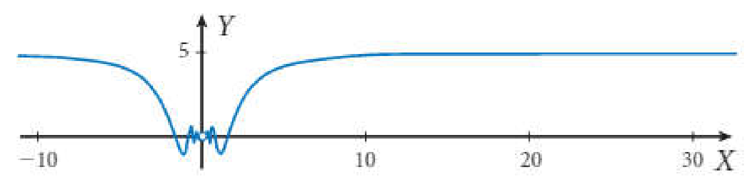
13. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-1}{x}=5$.



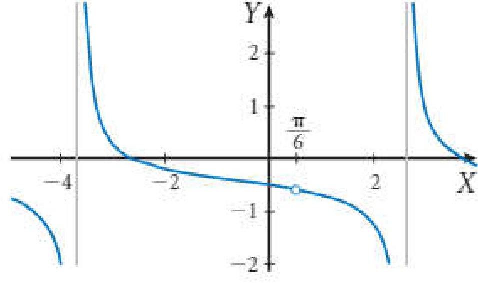
15. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{50+50\cos x}-10}{x}=0$.



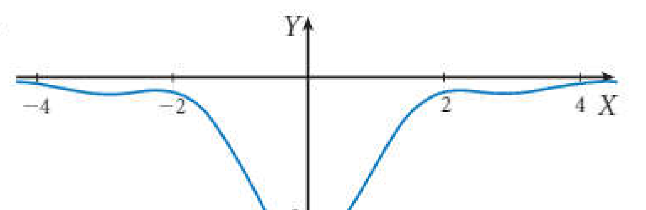
17. $\lim_{x\to\infty} x\,\text{sen}\frac{5}{x}=5$.



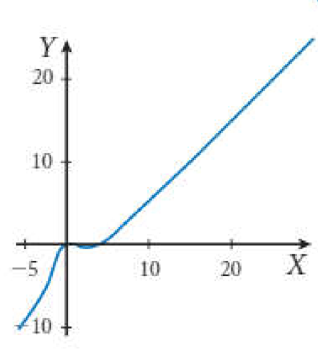
19. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\,\text{sen}\,x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.



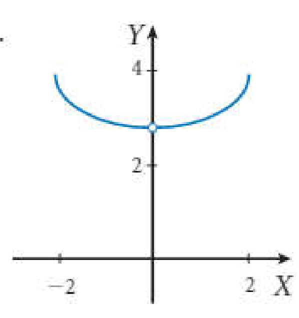
21. $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1}{x^2}=-\frac{5}{2}$.



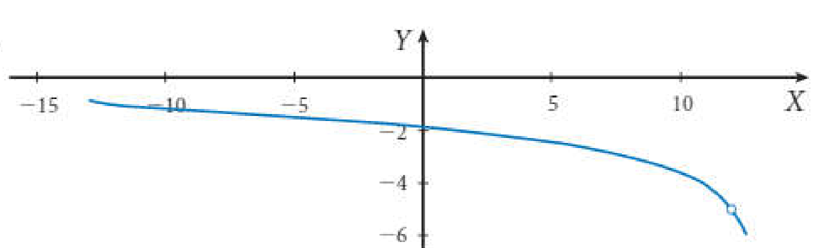
23. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-4x^4+x^3+x}{x^4+6x^2+x^3+5x+5}=\infty$.



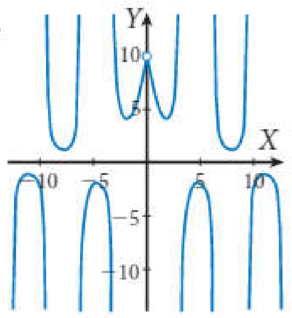
25. $\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2+x}-4\sqrt{2-x}}{x}=\frac{4}{\sqrt{2}}$.



27. $\lim\limits_{x\to 12}\frac{1-\sqrt{13-x}}{5-\sqrt{x+13}}=-5.$



29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10\arctan\frac{x}{1+x^2}}{\operatorname{sen}x}=10.$



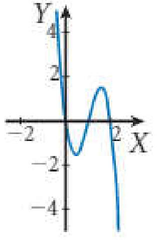
Autoevaluación de la página 292.

1. b. **2.** b. **3.** d. **4.** a. **5.** c. **6.** b. **7.** d. **8.** b. **9.** c. **10.** c.

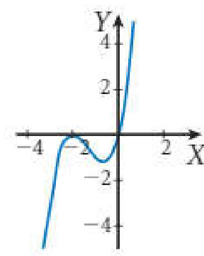
Unidad 9. La gráfica de una función

Ejercicios de la página 301.

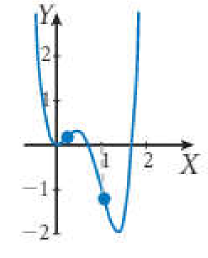
1. Cóncava hacia arriba en $(-\infty,1)$ y cóncava hacia abajo en $(1,\infty)$. Punto de inflexión $x=1$.



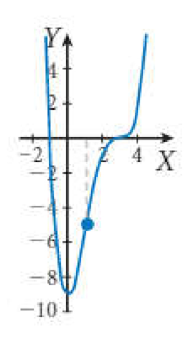
3. Cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{4}{3},\infty\right)$. Punto de inflexión $x=-\frac{4}{3}$.



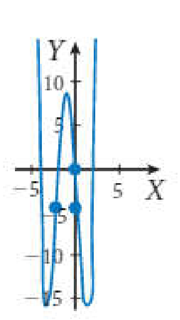
5. Cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)$ y $(1,\infty)$, y cóncava hacia abajo en $\left(\frac{1}{5},1\right)$. Puntos de inflexión $x=\frac{1}{5}$ y $x=1$.



7. Cóncava hacia arriba en $(-\infty,1)$ y $(3,\infty)$, y cóncava hacia abajo en $(1,3)$. Puntos de inflexión $x=1$ y $x=3$.

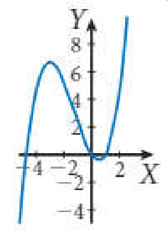


9. Cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(-\infty,-1-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$ y $\left(-1+\frac{\sqrt{15}}{3},\infty\right)$, y cóncava hacia abajo en $\left(-1-\frac{\sqrt{15}}{3},-1+\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$. Puntos de inflexión $x=-1-\frac{\sqrt{15}}{3}$ y $x=-1+\frac{\sqrt{15}}{3}$.

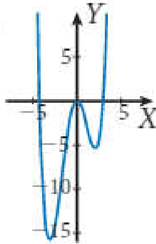


Ejercicios de la página 321.

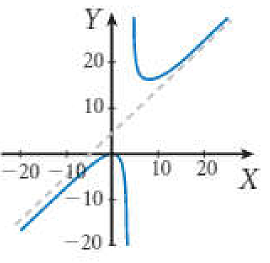
1. *Dom* $f=\mathbb{R}$; Intersecciones ejes: $(0,0),\left(\frac{-15-3\sqrt{57}}{8},0\right)$ y $\left(\frac{-15+3\sqrt{57}}{8},0\right)$; continua $\mathbb{R}$; $f'(x)=x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$; puntos críticos $x=-3$ y $x=\frac{1}{2}$; creciente $(-\infty,-3)$, $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, decreciente $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$; máximo $x=-3$, mínimo $x=\frac{1}{2}$; $f''(x)=2x+\frac{5}{2}$; cóncava hacia arriba $\left(-\frac{5}{4},\infty\right)$, cóncava hacia abajo $\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)$; punto de inflexión $x=-\frac{5}{4}$; no tiene límites laterales; $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{2}x\right)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{2}x\right)=-\infty$; no tiene asíntotas.



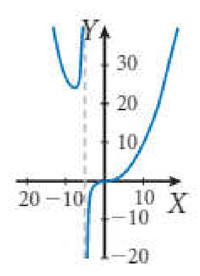
3. *Dom* $f=\mathbb{R}$; Intersecciones ejes: $(0,0),\left(\frac{-2-4\sqrt{7}}{3},0\right)$ y $\left(\frac{-2+4\sqrt{7}}{3},0\right)$; continua $\mathbb{R}$; $f'(x)=x^3+x^2-6x$; puntos críticos $x=0$, $x=-3$ y $x=2$; creciente $(-3,0)$, $(2,\infty)$, decreciente $(-\infty,-3)$ y $(0,2)$; máximo $x=0$, mínimo $x=-3$ y $x=2$; $f''(x)=3x^2+2x-6$; cóncava hacia arriba $\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{19}}{3}\right)$ y $\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{3},\infty\right)$, cóncava hacia abajo $\left(\frac{-1-\sqrt{19}}{3},\frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right)$; punto de inflexión $x=\frac{-1-\sqrt{19}}{3}$ y $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$; no tiene límites laterales; $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-3x^2\right)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-3x^2\right)=\infty$; no tiene asíntotas.



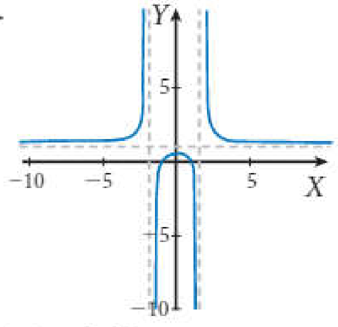
5. $Dom\,f=\mathbb{R}\setminus\{4\}$; Intersecciones ejes: $(0,0)$; continua $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; $f'(x)=\frac{x^2-8x}{(x-4)^2}$; puntos críticos y $x=8$; creciente $(-\infty,0)$, $(8,\infty)$, decreciente $(0,4)$ y $(4,8)$; máximo $x=0$, mínimo $x=8$; $f''(x)=\frac{32}{(x-4)^3}$; cóncava hacia arriba $(4,\infty)$, cóncava hacia abajo $(-\infty,4)$; no tiene puntos de inflexión; $\lim\limits_{x\to4^{+}}\frac{x^2}{x-4}=\infty$ y $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2}{x-4}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-4}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-4}=-\infty$; asíntota oblicua $y=x+4$, asíntota vertical $x=4$.



7. $Dom\,f=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$; Intersecciones ejes: $(0,0)$; continua $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$; $f'(x)=\frac{14x^3+105x^2}{(7x+35)^2}$; puntos críticos $x=0$ y $x=-\frac{15}{2}$; creciente $\left(-\frac{15}{2},-5\right)$, $(-5,0)$, $(0,\infty)$, decreciente $\left(-\infty,-\frac{15}{2}\right)$; mínimo $x=-\frac{15}{2}$; $f''(x)=\frac{98x(x^2+15x+75)}{(7x+35)^3}$; cóncava hacia arriba $(-\infty,-5)$ y $(0,\infty)$, cóncava hacia abajo $(-5,0)$; punto de inflexión $x=0$; $\lim\limits_{x\to-5^{+}}\frac{x^3}{7x+35}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^3}{7x+35}=\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{7x+35}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{7x+35}=\infty$; asíntota vertical $x=-5$.

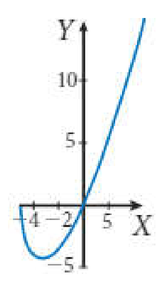


9. $Dom\,f=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$; Intersecciones ejes: $(-1,0)$, $(1,0)$ y $\left(0,\frac{1}{2}\right)$; continua $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$; $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-2)^2}$; punto crítico $x=0$; creciente $(-\infty,-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},0)$, decreciente $(0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},\infty)$; máximo $x=0$; $f''(x)=\frac{6x^2+4}{(x^2-2)^3}$; cóncava hacia arriba $(-\infty,-\sqrt{2})$ y $(\sqrt{2},\infty)$, cóncava hacia abajo $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$; no tiene puntos de inflexión; $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^{+}}\frac{x^2-1}{x^2-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}\frac{x^2-1}{x^2-2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^{+}}\frac{x^2-1}{x^2-2}=\infty$ y $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-1}{x^2-2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2}=1$; asíntotas verticales $x=-\sqrt{2}$ y $x=\sqrt{2}$, asíntota horizontal $y=1$.



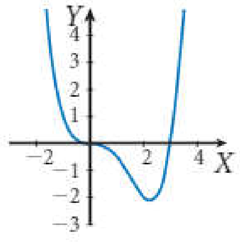
11. $Dom\,f=[-5,\infty)$; Intersecciones ejes: $(0,0)$ y $(-5,0)$; continua $[-5,\infty)$; $f'(x)=\frac{3x+10}{2\sqrt{x+5}}$; punto crítico $x=-\frac{10}{3}$; creciente $\left(-\frac{10}{3},\infty\right)$, decreciente $\left(-5,-\frac{10}{3}\right)$; mínimo $x=-\frac{10}{3}$; $f''(x)=\frac{3x+20}{4\left(\sqrt{x+5}\right)^3}$; cóncava hacia arriba

$(-5,\infty)$; no tiene puntos de inflexión; no tiene límites laterales; $\lim_{x\to\infty} x\sqrt{x+5}=\infty$; no tiene asíntotas.

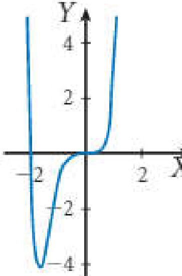


Ejercicios de repaso de la página 329.

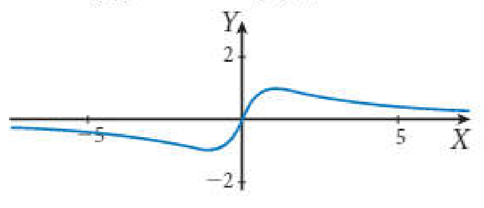
1. $Dom\, f=\mathbb{R}$; Intersecciones ejes: $(0,0)$ y $(3,0)$; continua $\mathbb{R}$; $f'(x)=4x^3-9x^2$; puntos críticos $x=0$ y $x=\frac{9}{4}$; creciente $\left(\frac{9}{4},\infty\right)$, decreciente $(-\infty,0)$, $\left(0,\frac{9}{4}\right)$; mínimo $x=\frac{9}{4}$; $f''(x)=12x^2-18x$; cóncava hacia arriba $(-\infty,0)$ y $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$, cóncava hacia abajo $\left(0,\frac{3}{2}\right)$; puntos de inflexión $x=0$ y $x=\frac{3}{2}$; no tiene límites laterales; $\lim_{x\to\infty}\left((x-3)x^3\right)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\left((x-3)x^3\right)=\infty$; no tiene asíntotas.



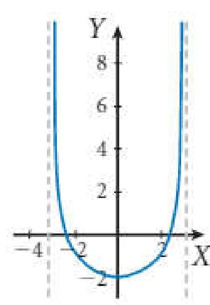
3. $Dom\, f=\mathbb{R}$; Intersecciones ejes: $(0,0)$ y $(-2,0)$; continua $\mathbb{R}$; $f'(x)=6x^5+10x^4$; puntos críticos $x=0$ y $x=-\frac{5}{3}$; creciente $\left(-\frac{5}{3},0\right)$, $(0,\infty)$, decreciente $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)$; mínimo $x=-\frac{5}{3}$; $f''(x)=30x^4+40x^3$; cóncava hacia arriba $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$ y $(0,\infty)$, cóncava hacia abajo $\left(-\frac{4}{3},0\right)$; puntos de inflexión $x=0$ y $x=-\frac{4}{3}$; no tiene límites laterales; $\lim_{x\to\infty}\left((x+2)x^5\right)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\left((x+2)x^5\right)=\infty$; no tiene asíntotas.



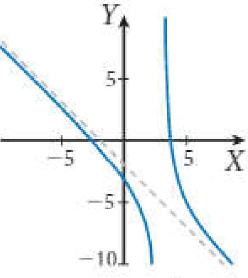
5. $Dom\, f=\mathbb{R}$; Intersecciones ejes: $(0,0)$; continua $\mathbb{R}$; $f'(x)=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$; puntos críticos $x=-1$ y $x=1$; creciente $(-1,1)$, decreciente $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$; máximo $x=1$, mínimo $x=-1$; $f''(x)=\frac{4x^3-12x}{(1+x^2)^3}$; cóncava hacia arriba $(-\sqrt{3},0)$ y $(\sqrt{3},\infty)$, cóncava hacia abajo $(-\infty,-\sqrt{3})$ y $(0,\sqrt{3})$; puntos de inflexión $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ y $x=\sqrt{3}$; no tiene límites laterales; $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0$; asíntota horizontal $y=0$.



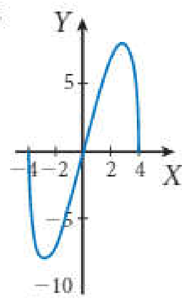
7. $Dom\,f=(-3,3)$; Intersecciones ejes: $(\sqrt{6},0)$, $(-\sqrt{6},0)$ y $(0,-2)$; continua $(-3,3)$; $f'(x)=\frac{12x-x^3}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3}$; punto crítico $x=0$; creciente $(0,3)$, decreciente $(-3,0)$; mínimo $x=0$; $f''(x)=\frac{108-3x^2}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^5}$; cóncava hacia arriba $(-3,3)$; no tiene puntos de inflexión; $\lim\limits_{x\to-3^{+}}\frac{x^2-6}{\sqrt{9-x^2}}=\infty$, $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-6}{\sqrt{9-x^2}}=\infty$; no tiene límites infinitos; asíntotas verticales $x=-3$ y $x=3$.



9. $Dom\,f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$; Intersecciones ejes: $\left(\frac{1+\sqrt{41}}{2},0\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{41}}{2},0\right)$ y $\left(0,-\frac{10}{3}\right)$; continua $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; $f'(x)=\frac{-x^2+6x-13}{(x-3)^2}$; no tiene puntos críticos; decreciente $(-\infty,3)$ y $(3,\infty)$; no tiene máximos ni mínimos; $f''(x)=\frac{8}{(x-3)^3}$; cóncava hacia arriba $(3,\infty)$, cóncava hacia abajo $(-\infty,3)$; no tiene puntos de inflexión; $\lim\limits_{x\to3^{+}}\frac{-x^2+x+10}{x-3}=\infty$, $\lim\limits_{x\to3}\frac{-x^2+x+10}{x-3}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+x+10}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x+10}{x-3}=\infty$; asíntota oblicua $y=-x-2$, asíntotas verticales $x=3$.

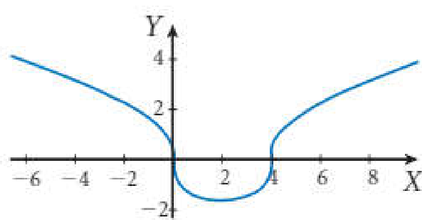


11. $Dom\,f=[-4,4]$; Intersecciones ejes: $(0,0)$, $(-4,0)$ y $(4,0)$; continua $(-4,4)$; $f'(x)=\frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$; puntos críticos $x=-\sqrt{8}$ y $x=\sqrt{8}$; creciente $(-\sqrt{8},\sqrt{8})$, decreciente $(-4,-\sqrt{8})$ y $(-\sqrt{8},4)$; máximo $x=\sqrt{8}$, mínimo $x=-\sqrt{8}$; $f''(x)=\frac{-48x+2x^3}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$; cóncava hacia arriba $(-4,0)$, cóncava hacia abajo $(0,4)$; punto de inflexión $x=0$; no tiene límites laterales; no tiene límites infinitos; no tiene asíntotas

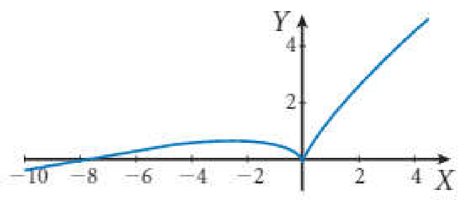


13. $Dom\,f=\mathbb{R}$; Intersecciones ejes: $(0,0)$ y $(4,0)$; continua $\mathbb{R}$; $f'(x)=\frac{2x-4}{3\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}}$; puntos críticos $x=2$, $x=0$ y $x=4$; creciente $(2,4)$ y $(4,\infty)$, decreciente $(-\infty,0)$ y $(0,2)$; mínimo $x=2$; $f''(x)=\frac{6x^2-28x+8}{9(x^2-4x)\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}}$; cóncava hacia arriba $(-\infty,0)$, $\left(\frac{7-\sqrt{37}}{3},4\right)$ y $\left(\frac{7+\sqrt{37}}{3},\infty\right)$, cóncava hacia abajo

$\left(0,\frac{7-\sqrt{37}}{3}\right)$ y $\left(4,\frac{7+\sqrt{37}}{3}\right)$; punto de inflexión $x=\frac{7-\sqrt{37}}{3}$ y $x=\frac{7+\sqrt{37}}{3}$; no tiene límites laterales; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2-4x}=\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2-4x}=\infty$; no tiene asíntotas



15. $Dom\, f=\mathbb{R}$; Intersecciones ejes: $(0,0)$ y $(-8,0)$; continua $\mathbb{R}$; $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2}$; puntos críticos $x=-\left(\frac{4}{3}\right)^3$ y $x=0$; creciente $\left(-\infty,-\left(\frac{4}{3}\right)^3\right)$ y $(0,\infty)$, decreciente $\left(-\left(\frac{4}{3}\right)^3,0\right)$; máximo $x=-\left(\frac{4}{3}\right)^3$, mínimo $x=0$; $f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$; cóncava hacia abajo $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$; no tiene puntos de inflexión; no tiene límites laterales; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2}+\frac{x}{2}=\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2}+\frac{x}{2}=-\infty$; no tiene asíntotas.



Autoevaluación de la página 330.

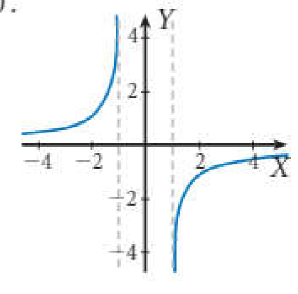
1. d. **2.** c. **3.** a. **4.** d. **5.** b. **6.** d. **7.** a. **8.** b.

Unidad 10. Logaritmos y exponenciales

Ejercicios de la página 343.

1. $\frac{2x+3}{x^2+3x}$. **3.** $\frac{3x^2+8x}{2(x^3+4x^2)}$. **5.** $\frac{\cos(\ln x)}{x}$. **7.** $\frac{2\ln x}{x}$. **9.** $\tan x$. **11.** $\frac{-x^2\ln x+4\ln x+x^2+2x+4}{(x^2+2x+4)^2}$.

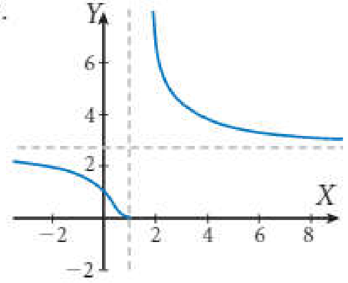
13. $\frac{(3x^2+8x)\ln x-(x^2+4x)}{\ln^2 x}$. **15.** $Dom\, f=\mathbb{R}\setminus[-1,1]$; Intersecciones ejes: la gráfica no corta a los ejes; continua $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$; $f'(x)=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$; no tiene puntos críticos; creciente $(-\infty,-1)$ y $(1,\infty)$; no tiene máximos ni mínimos; cóncava hacia arriba $(-\infty,-1)$; $f'(x)=\frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$; cóncava hacia abajo $(1,\infty)$; no tiene puntos de inflexión; $\lim\limits_{x\to-1^-}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$; asíntotas verticales $x=-1$ y $x=1$, asíntota horizontal $y=0$.



Ejercicios de la página 351.

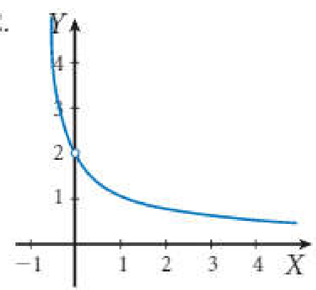
1. $3e^{3x}$. **3.** $-\operatorname{sen} x e^{\cos x}$. **5.** $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$. **7.** $\left(e^{6x-8}\right)\left(6\ln\left(\sqrt{x+6}\right)+\frac{1}{2(x+6)}\right)$. **9.** $\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$.

11. $\frac{e^x(x^2+1)-2xe^x}{(x^2+1)^2}$. **13.** $\frac{(2x-6)e^{(x^2-6x+7)}}{1+e^{2(x^2-6x+7)}}$. **15.** $Dom\, f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; Intersecciones ejes: $(0,1)$; continua $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $f'(x)=e^{\frac{x}{x-1}}\frac{-1}{(x-1)^2}$; no tiene puntos críticos; decreciente $(-\infty,1)$ y $(1,\infty)$; no tiene máximos ni mínimos; $f''(x)=\left(e^{\frac{x}{x-1}}\right)\left(\frac{2x-1}{(x-1)^4}\right)$; cóncava hacia arriba $\left(\frac{1}{2},1\right)$ y $(1,\infty,)$, cóncava hacia abajo $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$; punto de inflexión $x=\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{x-1}}=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{x-1}}=\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{x}{x-1}}=e$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{x-1}}=e$; asíntota vertical $x=1$, asíntota horizontal $y=e$.

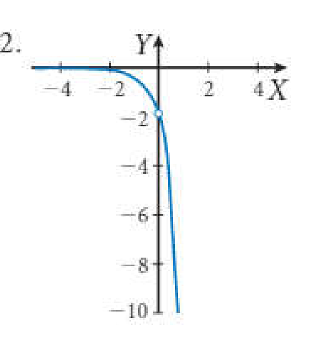


Ejercicios de la página 354.

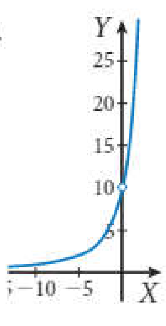
1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=2$.



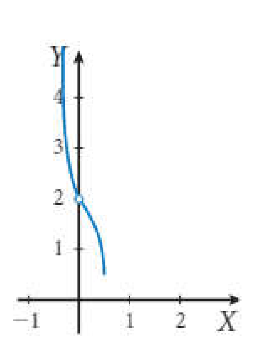
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{3x}}{x}=-2$.



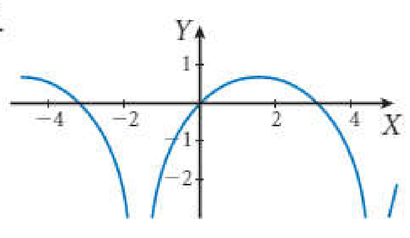
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{50e^x-50}{5x}=10$.



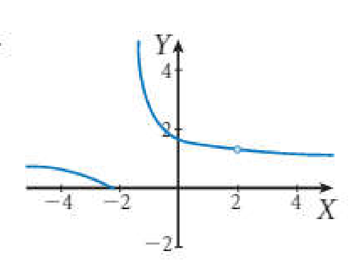
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(2x+\sqrt{1-4x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}=2$.



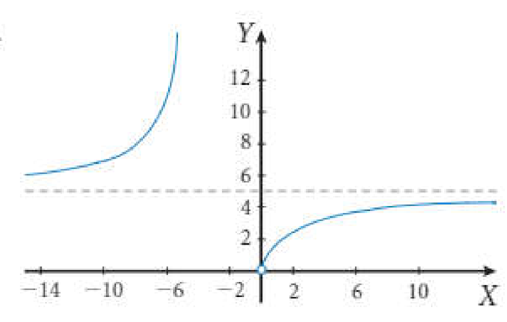
9. $\lim\limits_{x\to\pi}\ln(1+\operatorname{sen}x)=0$.



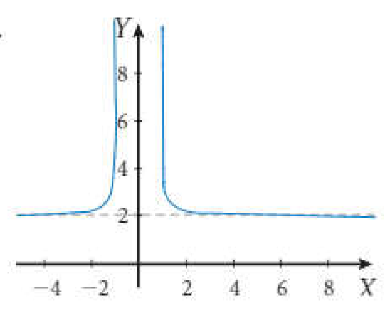
11. $\lim\limits_{x\to 2} e^{\frac{x-2}{x^2-4}}=e^{\frac{1}{4}}$.



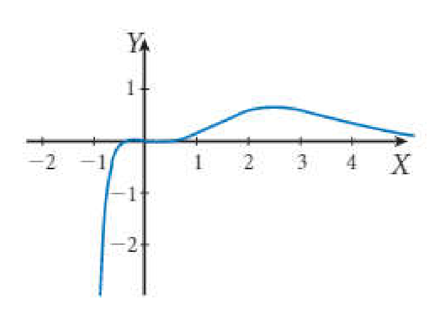
13. $\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(\frac{x+5}{x}\right)\right)=5.$



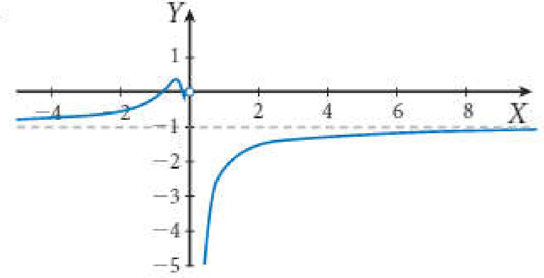
15. $\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)=2.$



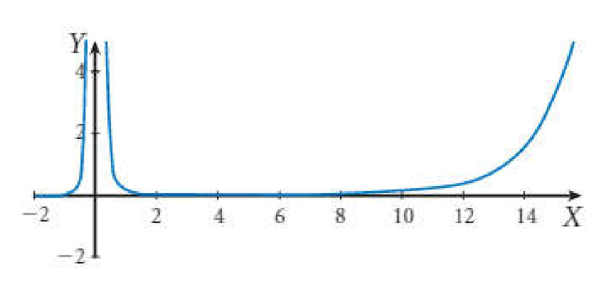
17. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{e^{2x}}=0.$



19. $\lim_{x\to\infty}\left(x\left(\cos\frac{1}{x}-e^{\frac{1}{x}}\right)\right)=-1.$



21. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{20x^4}=\infty.$



Ejercicios de la página 365.

1. 6. **3.** 1. **5.** 4. **7.** 0. **9.** 2. **11.** -3. **13.** 2^8. **15.** 5^{-3}. **17.** -3. **19.** $Dom\,f=(-10,\infty)$. **21.** $Dom\,f=(0,\infty)$. **23.** $Dom\,f=(-\infty,1)\cup(8,\infty)$. **25.** $1+\frac{\ln(7)}{\ln(6)}$. **27.** $\frac{\ln(24)}{\ln(7)}$. **29.** $-\frac{1}{\ln(7)}$.

Ejercicios de la página 368.

1. $x=\frac{8}{25}$. **3.** $x=-5$ y $x=9$. **5.** $x=-3$ y $x=3$. **7.** $x=-1-2\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)$. **9.** $x=5$. **11.** $x=3$. **13.** $x=331$. **15.** $x=0$. **17.** $x=\frac{1}{2}$.

Ejercicios de la página 373.

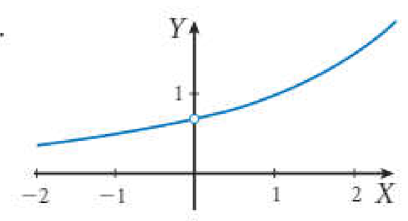
1. No importa cuál sea el monto que se invierta, para duplicarlo habrá que invertirlo 24 años. **3.** Entonces es mejor invertir con la tasa señalada en el inciso **a)**. **5.** El interés era de aproximadamente 7.18%.

7. Deben pasar 64×10^{-5} segundos. **9.** En una semana habrá aproximadamente 5.7×10^{23} bacterias.
11. Quedan aproximadamente 1.56 gramos.

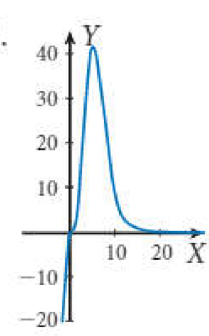
Ejercicios de repaso de la página 382.

1. $\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}$. **3.** $7\left(e^{7x-9}\right)\tan\left(e^{7x-9}\right)\sec\left(e^{7x-9}\right)$. **5.** $\frac{\tan x\sec x-\sec^3 x}{e^{\tan x}}$.

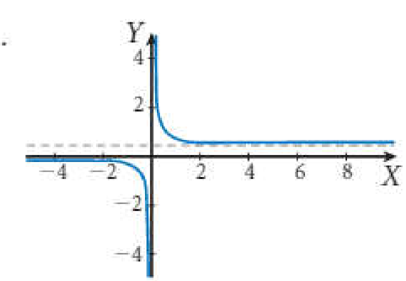
7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\ln 2$.



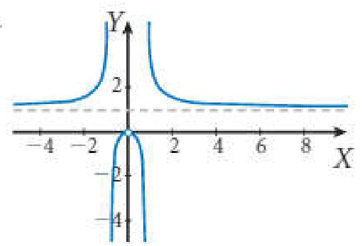
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5}{e^x}=0$.



11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{2x}=\frac{1}{2}$.



13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(10x^6+4x^2+1)}{\ln(x^6+x^2)}=1$.



15. -2. **17.** -6. **19.** 7. **21.** 10. **23.** $Dom\, f=(-8,\infty)$. **25.** $Dom\, f=(-\infty,3)\cup(5,\infty)$.
27. La ecuación no tiene solución. **29.** $x=1$ y $x=-1$. **31.** $x=729$. **33.** $x=-5$ y $x=7$.
35. $x=\frac{1}{2}$. **37.** Recibirá 39 pesos con 20 centavos. **39.** El segundo tiene razón.

Autoevaluación de la página 384.

1. b. **2.** d. **3.** a. **4.** c. **5.** d. **6.** a. **7.** c. **8.** d. **9.** a.

Unidad 11. Integrales de funciones

Ejercicios de la página 394.

1. $\int 5x^2-2x+4\,dx=\frac{5}{3}x^3-x^2+4x+C$. **3.** $\int\sqrt[4]{x}\,dx=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C$.

5. $\int\frac{20}{x}+3\cos x\;dx=20\ln x+3\,\mathrm{sen}\,x+C$. **7.** $\int\frac{9x^6+7x^5-x^4}{6x^3}dx=\frac{3}{8}x^4+\frac{7}{18}x^3-\frac{1}{12}x^2+C$.

9. $\int 12\sqrt{x^5}\,dx=\frac{24}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$. **11.** $\int\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}}dx=\frac{x^2}{2}+C$. **13.** $\int\frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}dx=\frac{1}{2}\arcsen x+C$.

15. $\int -8\cot x\csc x+5e^x\,dx=8\csc x+5e^x+C$. **17.** $\int\frac{e^2}{x}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=e^2\ln x-\arcsen x+C$.

19. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$. **21.** $\int\frac{x^3+7x^2-18x}{x-2}dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2+C$.

23. $f(x)=\frac{7}{4}x^4-3x^3+\frac{1}{2}x^2-6x-12$. **25.** $f(x)=\ln x+6$.

Ejercicios de la página 399.

1. $\int \operatorname{sen}(7x)\,dx = -\frac{1}{7}\cos 7x + C.$ **3.** $\int x^2\sec^2 4x^3\,dx = \frac{1}{12}\tan 4x^3 + C.$

5. $\int \frac{x^3+5x^2+8}{x+2}dx = \frac{(x+2)^3}{3} - \frac{(x+2)^2}{2} - 8(x+2) + 20\ln(x+2) + C.$ **7.** $\int \frac{\ln x}{2x}dx = \frac{1}{4}\ln^2 x + C.$

9. $\int \frac{x^2}{x^3+7}dx = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+7\right) + C.$ **11.** $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+10}}dx = \sqrt{x^2-4x+10} + C.$

13. $\int \cot x\,dx = \ln(\operatorname{sen} x) + C.$ **15.** $\int\left(x^{-4}\sec^2\left(4x^{-3}+2\right)\right)dx = -\frac{1}{12}\tan\left(4x^{-3}+2\right) + C.$

17. $\int(\tan 2x + \sec 2x)^2\,dx = -x + \tan 2x + \sec 2x + C.$ **19.** $\int \frac{1}{\sqrt{1-(8x+3)^2}}dx = \frac{1}{8}\operatorname{arcsen}(8x+3) + C.$

21. $\int \frac{8x^5\cos 7x^6}{1+\operatorname{sen}^2 7x^6}dx = \frac{4}{21}\arctan\left(\operatorname{sen} 7x^6\right) + C.$ **23.** $\int \csc x\,dx = -\ln(\csc x + \cot x) + C.$

25. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}dx = -\cos(\ln x) + C.$

Ejercicios de repaso de la página 401.

1. $\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + C.$ **3.** $\int\left(6x^5-15x^2\right)\left(x^6-5x^3\right)^{-4}dx = -\frac{\left(x^6-5x^3\right)^{-3}}{3} + C.$

5. $\int \frac{3\cos(\pi x+8)}{\operatorname{sen}^2(\pi x+8)}dx = -\frac{3}{\pi}\csc(\pi x+8) + C.$ **7.** $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln(9x-1))}{(9x-1)\cos^2(\ln(9x-1))}dx = \frac{1}{9}\sec(\ln(9x-1)) + C.$

9. $\int \frac{\sec^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = 2\tan\sqrt{x} + C$ **11.** $\int \frac{\left(10x^4+2x^5\right)e^x}{\sqrt{x^5e^x}}dx = 4\sqrt{x^5e^x} + C.$

13. $\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx = e^{\arctan x} + C.$ **15.** $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt{1-\cot^2 x}}dx = -\operatorname{arcsen}(\cot x) + C.$

17. $\int \frac{5^{\operatorname{arccot} x}}{1+x^2}dx = -\frac{5^{\operatorname{arccot} x}}{\ln 5} + C.$ **19.** $\int \operatorname{sen}\left(9x2^x\right)(9x\ln 2+9)2^x\,dx = -\cos\left(9x2^x\right) + C.$

21. $\int \frac{dx}{|x|\sqrt{16x^2-4}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsec} 2x + C.$ **23.** $f(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x - \frac{1}{5}.$ **25.** $f(x) = -\frac{1}{5}e^{\frac{1}{5x}} + \frac{6}{5}e.$

Autoevaluación de la página 402.

1. b. **2.** c. **3.** a. **4.** d. **5.** a. **6.** c.

Unidad 12. La integral definida

Ejercicios de la página 408.

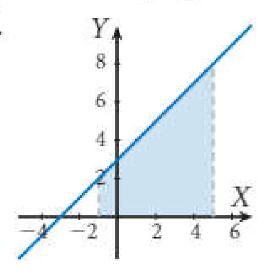
1. $\int_0^3 2x^2 - x + 10\,dx = \frac{87}{2}.$ **3.** $\int_0^6 \sqrt{3x+7}\,dx = \frac{2}{9}\left(125 - 7\sqrt{7}\right).$ **5.** $\int_{-2}^{7} \frac{4x}{\sqrt{x^2+5}}dx = 12\sqrt{6} - 12.$

7. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = 0.$ **9.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+4}}dx = -4 + 2\sqrt{5}.$ **11.** $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2}dx = \frac{2}{3}.$

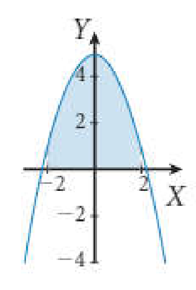
13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5e^{\tan x}\sec^2 x\,dx = 5e - 5.$ **15.** $\int_1^8 \frac{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 37.$ **17.** $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{3}.$ **19.** $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}dx = 0.$

Ejercicios de la página 412.

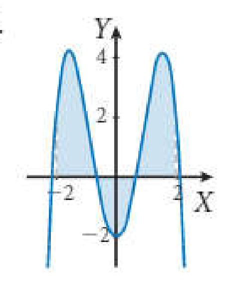
1. 30.



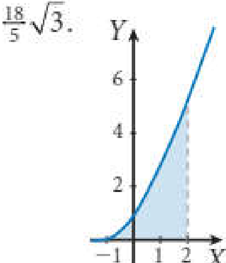
3. $\frac{44}{3}.$



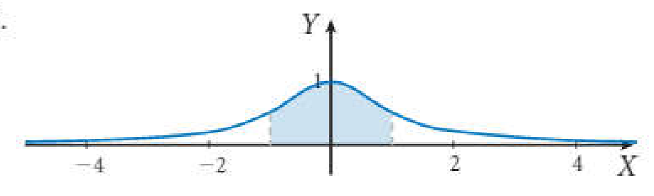
5. $\frac{88}{15}.$



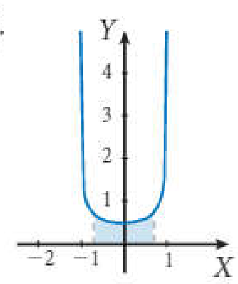
7. $\frac{18}{5}\sqrt{3}$.



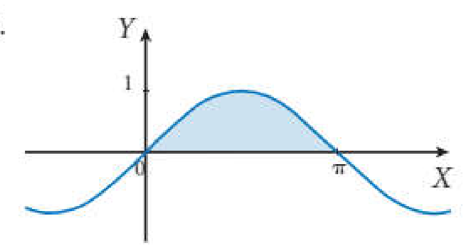
9. $\frac{\pi}{2}$.



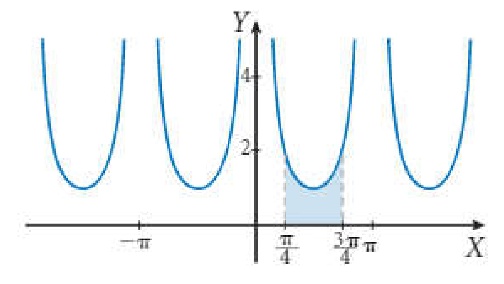
11. $\frac{\pi}{4}$.



13. 2.



15. 2.

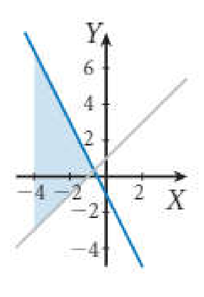


Ejercicios de la página 415.

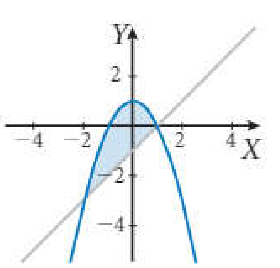
1. El valor promedio es 3. **3.** El valor promedio es $-\frac{14}{3}$. **5.** El valor promedio es $\frac{89}{12}$. **7.** El valor promedio es $\frac{49}{9}$. **9.** El valor promedio es $\frac{3}{2}$ y se alcanza en el punto $c=\frac{1}{2}$. **11.** El valor promedio es -3 y se alcanza en los puntos $c=-1$ y $c=1$.

Ejercicios de la página 420.

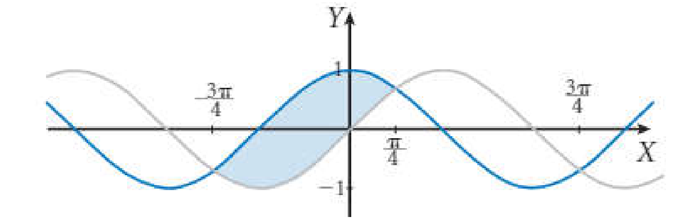
1. $A=\frac{50}{3}$.



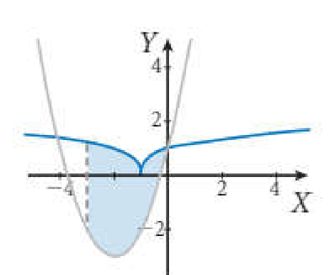
3. $A=\frac{9}{2}$.



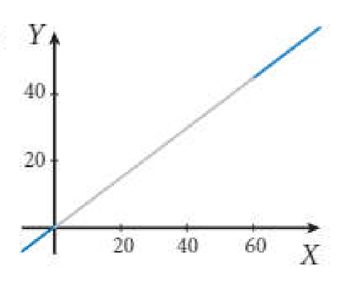
5. $A=\frac{4}{\sqrt{2}}$.



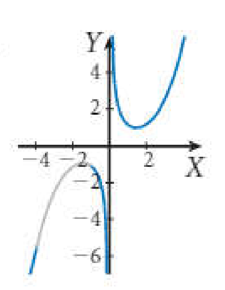
7. $A=\frac{14}{9}\sqrt[9]{2}+\frac{61}{9}$.



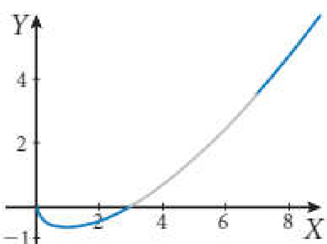
9. 75.



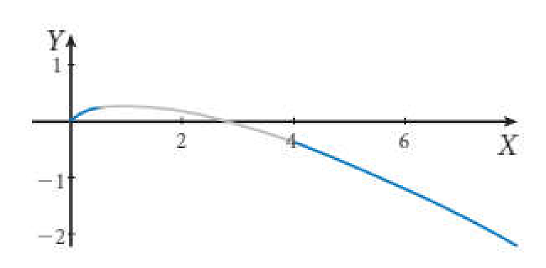
11. 6.



13. $\frac{10}{3}\sqrt{7}-2\sqrt{3}\approx 5.36$.



15. $\frac{44}{15}\sqrt{2}-\frac{2}{3\sqrt[4]{8}}-\frac{1}{5\sqrt[4]{2}}\approx 3.58$.



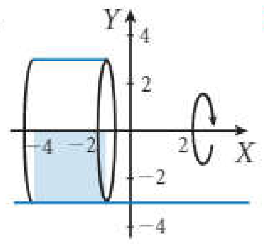
Ejercicios de la página 422.

1. El proyectil se encuentra a 15.9 metros de altura después de 3 segundos. **3.** El móvil va a 50 m/s.

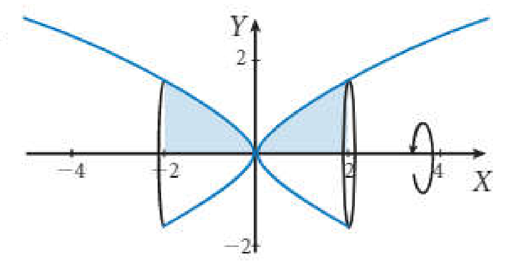
5. El pozo tiene una profundidad de 4.9 metros.

Ejercicios de la página 424.

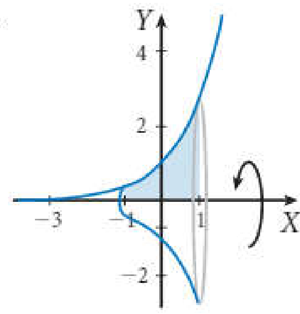
1. $V=27\pi\approx 84.82$.



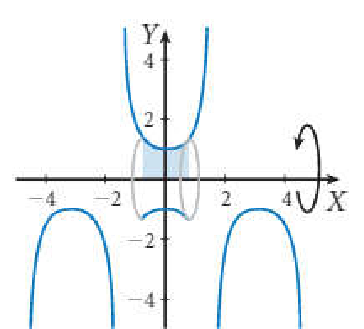
3. $V=\frac{24\sqrt[3]{2}}{7}\pi\approx 13.57$.



5. $V=\frac{\pi}{2}\left(e^2-e^{-2}\right)\approx 11.4$.



7. $V=2\pi\approx 6.28$.



9. $V=\frac{625}{6}\pi\approx 327.25$.

Ejercicios de la página 427.

1. El trabajo realizado es de aproximadamente 16 413.23 joules. **3.** El trabajo realizado para levantar la cubeta es de 396 joules. **5.** El trabajo requerido es de 0.5 joules.

Ejercicios de repaso de la página 430.

1. $\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{x^4+3}\,dx = 0.$ **3.** $\int_1^e \frac{2}{x(1+\ln x)}dx = 2\ln 2.$ **5.** $L=\frac{3}{8}\left(3^{\frac{2}{3}}\right)+\frac{3}{4}\left(3^{\frac{4}{3}}\right)-\frac{9}{8}\approx 2.9.$ **7.** $T=260$ joules. **9.** $V=\frac{10\,851}{4\,480}\pi\approx 28.81.$ **11.** $A=\frac{50}{3}.$ **13.** $T=5.6$ joules. **15.** La piedra se encuentra a 17.5 metros de altura después de 5 segundos.

Autoevaluación de la página 432.

1. b. **2.** d. **3.** a. **4.** c. **5.** d. **6.** d. **7.** b. **8.** a.

Unidad 13. Métodos de integración

Ejercicios de la página 441.

1. $\int \sec^2 3x\,dx = \frac{1}{3}\tan 3x + C.$ **3.** $\int \frac{x}{x+9}dx = x+9-9\ln(x+9)+C.$ **5.** $\int e^x\cos\left(e^x\right)dx = \text{sen}\left(e^x\right)+C.$

7. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx = \sqrt{x^2+4x+6}+C.$ **9.** $\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x}dx = -\cos(\ln x)+C.$ **11.** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\,\text{sen}\sqrt{x}+C.$

13. $\int x\tan x^2\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left(\cos x^2\right)+C.$

15. $\int x^2\sqrt[4]{x+7}\,dx = \frac{4}{13}(x+7)^{\frac{13}{4}}-\frac{56}{9}(x+7)^{\frac{9}{4}}+\frac{196}{5}(x+7)^{\frac{5}{4}}+C.$

17. $\int \frac{e^{3x}}{1+e^x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}-e^x-\frac{3}{2}+\ln\left(1+e^x\right)+C.$ **19.** $\int \frac{\sqrt{x}+8}{x-64}dx = 2\sqrt{x}-16+16\ln\left(\sqrt{x}-8\right)+C.$

21. $A=\frac{339}{16}.$

Ejercicios de la página 448.

1. $\int x\,\text{sen}\,7x\,dx = -\frac{x}{7}\cos 7x+\frac{1}{49}\text{sen}\,7x+C.$ **3.** $\int \arctan x\,dx = x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$

5. $\int(\ln x)^2dx = x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C.$ **7.** $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\text{sen}\,x\cos x+x)+C.$

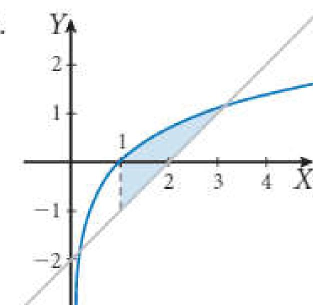
9. $\int x\csc^2 x\,dx = -x\cot x+\ln(\text{sen}\,x)+C.$ **11.** $\int\left(3x^3+x^2+7\right)e^x\,dx = 3x^3e^x-8x^2e^x+16xe^x-9e^x+C.$

13. $\int x^6e^x\,dx = x^6e^x-6x^5e^x+30x^4e^x-120x^3e^x+360x^2e^x-720xe^x+720e^x+C.$

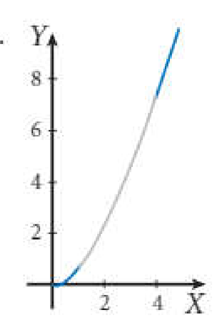
15. $\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C.$ **17.** $\int e^{4x}\cos 3x\,dx = \frac{3}{25}e^{4x}\,\text{sen}\,3x+\frac{4}{25}e^{4x}\cos 3x+C.$

19. $\int e^{6x}\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{145}\left(-2e^{6x}\cos\frac{x}{2}+24e^{6x}\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\right)+C.$

21. $A = 3\ln 3 - 2$.



23. $L = \frac{22}{3}$.



Ejercicios de la página 453.

1. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C.$ **3.** $\int \sqrt{x^2-64}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-64}}{2} + 32\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-64}}{8}\right) + C.$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}\,dx = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+25}+x}{5}\right) + C.$ **7.** $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-16} - 4\operatorname{arcsec}\frac{x}{4} + C.$

9. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right) - \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + C.$

11. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-6x+45}}\,dx = 2\sqrt{x^2-6x+45} + 6\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+45}+x-3}{6}\right) + C.$

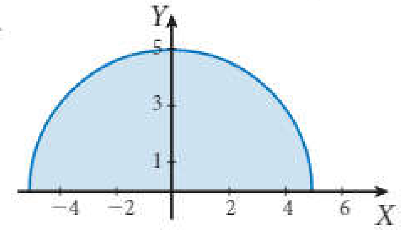
13. $\int \frac{1}{\left(\sqrt{x^2-4x+20}\right)^3}\,dx = \frac{x-2}{16\sqrt{x^2-4x+20}} + C.$

15. $\int \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-\frac{3}{2}}\,dx = \sqrt{x^2-3x+2} - \frac{1}{2}\operatorname{arcsec}(2x-3) + C.$

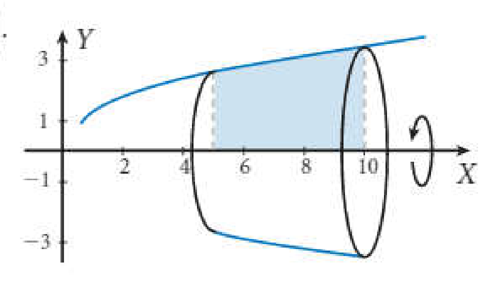
17. $\int \frac{x+\frac{9}{2}}{\sqrt{x^2+9x+\frac{181}{4}}}\,dx = \sqrt{x^2+9x+\frac{181}{4}} + C.$

19. $\int \frac{x}{x^2-3x+\frac{25}{4}}\,dx = \sqrt{x^2-3x+\frac{25}{4}} + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\sqrt{x^2-3x+\frac{25}{4}}+2x-3}{4}\right) + C.$

21. $A = \frac{25}{2}\pi$.



23. $V = \pi\left(\frac{25}{8}\sqrt{589} - \ln\left(\frac{25+\sqrt{589}}{6}\right) - \frac{45}{8}\sqrt{21} + \ln\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\right).$



25. El área de la región sombreada es $32 - 18\ln 3$.

Ejercicios de la página 465.

1. $\int \frac{8x+4}{x(x+2)}\,dx = 2\ln x + 6\ln(x+2) + k.$ **3.** $\int \frac{x^2-6x-3}{x^2-9}\,dx = x - 4\ln(x+3) - 2\ln(x-3) + k.$

5. $\int \frac{5x+1}{x^2+5x}\,dx = \frac{1}{5}\ln x + \frac{24}{5}\ln(x+5) + k.$

7. $\int \frac{6x^3+11x^2-167x-152}{x^2+x-30}dx = 3x^2+5x+\frac{50}{11}\ln(x+6)+\frac{38}{11}\ln(x-5)+k.$

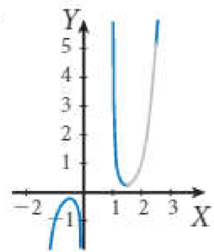
9. $\int \frac{9x}{(x+3)^2}dx = \frac{27}{x+3}+9\ln(x+3)+k.$ **11.** $\int \frac{3x^2+4x-6}{x^2+16x+64}dx = 3x-\frac{154}{x+8}-44\ln(x+8)+k.$

13. $\int \frac{5x^2+x-34}{(x+1)^2(x-4)}dx = 3\ln(x+1)-\frac{6}{x+1}+2\ln(x-4)+k.$

15. $\int \frac{3x^3-5x^2-22x+48}{(x-2)^2x(x-6)}dx = \ln(x-2)-2\ln x+4\ln(x-6)+\frac{1}{x-2}+k.$

17. $\int \frac{x^3-2x^2+x-8}{(x-1)^3(x+5)}dx = \frac{2}{3(x-1)^2}-\frac{2}{9(x-1)}+\frac{7}{54}\ln(x-1)+\frac{47}{54}\ln(x+5)+k.$

19. $L=\frac{679}{240}+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}-\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 2.$



Ejercicios de la página 473.

1. $\int \frac{-x^2+13x-18}{(x^2-4x+5)(x-1)}dx = \ln(x^2-4x+5)-3\ln(x-1)+7\arctan(x-2)+k.$

3. $\int \frac{5x^3+16x^2+24x+16}{x^2(x^2+3x+4)}dx = -\frac{4}{x}+3\ln x+\ln(x^2+3x+4)+k.$

5. $\int \frac{x^3-4x^2+2x+3}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx = \frac{17}{14}\ln(x^2+3)-\frac{5}{7}\ln(x^2-x+1)-\frac{9\sqrt{3}}{7}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+\frac{22\sqrt{3}}{21}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+k.$

7. $\int \frac{x^3+3x^2+7x+5}{(x^2+2x+3)^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{1}{x^2+2x+3}+k.$

9. $\int \frac{3x^5-3x^4+8x^3-4x^2+3x-1}{x^2(x^2+1)^2}dx = 3\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+1}-2\arctan x+k.$

11. $\int \frac{3x^4-15x^3+27x^2-22x+2}{(x-2)^3(x^2+2)}dx = \frac{1}{2(x-2)^2}-\frac{1}{x-2}+\ln(x-2)+\ln(x^2+2)+k.$

Ejercicios de la página 484.

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{x-5}}dx = \frac{2\sqrt{5}}{5}\arctan\sqrt{\frac{x-5}{5}}+C.$ **3.** $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}dx = \frac{2}{9}(x^3-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3-1}+C.$ **5.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+C.$

Ejercicios de la página 488.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^3 x\,dx = \frac{\cos^6 x}{6}-\frac{\cos^4 x}{4}+C = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}+C.$

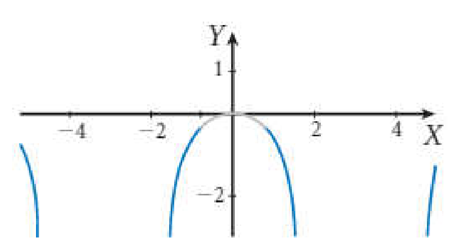
3. $\int \operatorname{sen}^9 x\cos^3 x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{10} x}{10}-\frac{\operatorname{sen}^{12} x}{12}+C.$ **5.** $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C.$

7. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x-\frac{1}{64}\operatorname{sen}4x+\frac{1}{16}x+C.$ **9.** $\int \tan^3 x\,dx = \frac{\tan^2 x}{2}+\ln(\cos x)+C.$

11. $\int \cot^3 x\csc^3 x\,dx = -\frac{\csc^5 x}{5}+\frac{\csc^3 x}{3}+C.$ **13.** $\int \cot^4 x\,dx = -\frac{\cot^3 x}{3}+\cot x+x+C.$

15. $\int \tan^3 x\cot^5 x\,dx = -\cot x-x+C.$ **17.** $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sec^4 x}dx = -\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+C.$

19. $L=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\ln\left(\sqrt{2}-1\right).$



21. $V=\frac{3\pi^2}{8}.$

Ejercicios de repaso de la página 491.

1. $\int\left(x^2+3\right)^2 dx=\frac{1}{5}x^5+2x^3+9x+C.$ **3.** $\int\frac{x}{x+12}dx=x-12\ln(x+12)+C.$

5. $\int\cot^3 x\csc^3 x\,dx=-\frac{\csc^5 x}{5}+\frac{\csc^3 x}{3}+C.$ **7.** $\int\frac{5x^2+8x+5}{(x+2)\left(x^2+x+1\right)}dx=3\ln(x+2)+\ln\left(x^2+x+1\right)+C.$

9. $\int\frac{x^3+x^2-81x+250}{x(x-5)^3}dx=\frac{1}{2(x-5)^2}-\frac{1}{x-5}-2\ln x+3\ln(x-5)+C.$

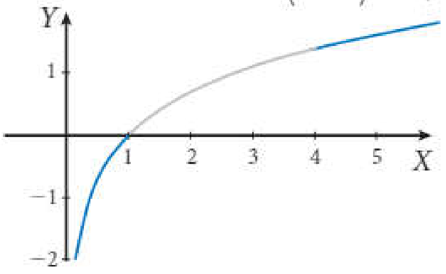
11. $\int\left(x^4+x^2\right)e^x dx=x^4e^x-4x^3e^x+13x^2e^x-26xe^x+26e^x+C.$

13. $\int\frac{x^2}{x^2-6x+13}dx=x-3-6\ln\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-6x+13}}\right)+\frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)+C.$

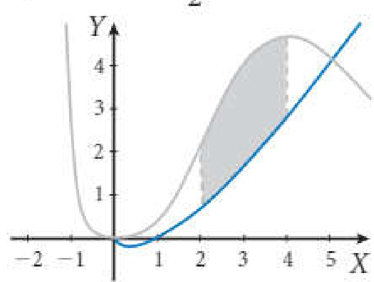
15. $\int\arccos x\,dx=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$ **17.** $\int 7x\sqrt{x+8}\,dx=\frac{14}{5}(x+8)^{\frac{5}{2}}-\frac{112}{3}(x+8)^{\frac{3}{2}}+C.$

19. $\int x^2\sqrt[3]{x+6}\,dx=\frac{3}{10}(x+6)^{\frac{10}{3}}-\frac{36}{7}(x+6)^{\frac{7}{3}}+27(x+6)^{\frac{4}{3}}+C.$

21. $\int\frac{x^7}{\sqrt{x^4-4}}dx=\frac{1}{6}\left(x^4-4\right)^{\frac{3}{2}}+2\left(x^4-4\right)^{\frac{1}{2}}+C.$ **23.** $L=\sqrt{17}-\sqrt{2}-\ln\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)+\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$



25. El área entre las dos curvas en el intervalo $[2,4]$ es $168e^{-2}+\frac{3}{2}-824e^{-4}-7\ln 2.$



Autoevaluación de la página 492.

1. c. **2.** b. **3.** a. **4.** d. **5.** d. **6.** d.

Índice analítico

L

M

N

O

P

R

S

T

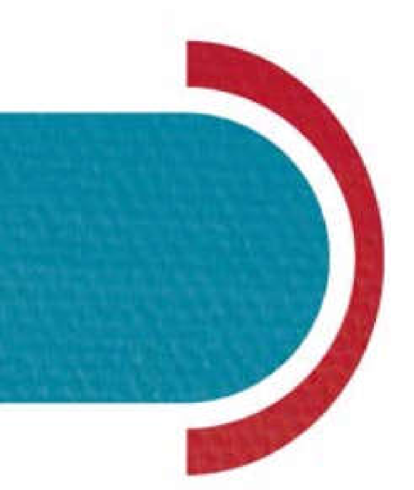
V



Espacios es una serie de libros para estudiantes de bachillerato, cuyos objetivos principales son comprender y atender la actualidad de los jóvenes y satisfacer los propósitos específicos de cada asignatura. Con las actividades propuestas, los estudiantes consolidarán habilidades de pensamiento indispensables para la vida, como saber resolver problemas, generar juicios de valor y tomar decisiones.

La estructura de esta obra facilita el estudio de los temas centrales de la materia: funciones, derivadas, máximos y mínimos, límites, gráficas, logaritmos y exponenciales, integrales y métodos de integración, así como un programa de cálculo simbólico para el cálculo diferencial e integral.

Se trabaja de manera fundamental con ejemplos y ejercicios de naturaleza geométrica, física, química, biológica y económica. A través de ellos, se puede observar la fuerza y grado de aplicación que tienen los conceptos y métodos del Cálculo.



El libro que de por sí constituye un ejercicio valioso de didáctica con abundantes explicaciones y exposiciones tanto de procedimientos como de conceptos matemáticos, incluye material suplementario que podrá ser consultado en el Sitio Web http://www.pearsonenespanol.com/calculo_oteyza, con el que los alumnos desarrollarán su máximo potencial.

ISBN 978-607-32-2085-9

